

Inventor's paradoxの一例 - Hilbert行列の行列式について -

愛知教育大学数学教育講座 石戸谷 公直

1 Inventor's paradox について

G. Polya 著 “How to solve it” の p.121 に次のように定義されている：

Inventor's paradox. The more ambiguous plan may have more chance of success.

This may sound paradoxical. Yet, when passing from one problem to another, we may often observe that the new, more ambiguous problem is easier to handle than the original problem. ...

関連して, p.108 には

Generalization is passing from the consideration of one object to the consideration of a set containing that object; or passing from the consideration of a restricted set to that of more comprehensive set containing the restricted one.

.....

The more general problem may be easier to solve. ... The main achievement in solving the special problem was to invent the general problem. ...

問題を拡大すると問題が解きやすくなることがある, ということは, 数学に接している者にとっては少しも “paradoxical” なことではない。多くの例が考えられるが, 敢えて屋上屋を重ねてみたい。

2 Hilbert 行列について

Hilbert 行列とは次の形の正方行列のことである：

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

この行列は D. Hilbert によって [1] で取り上げられている。そこには,

$$|H_n| = \frac{\{1^{n-1} 2^{n-2} \cdots (n-2)^2 (n-1)^1\}^4}{1^{2n-1} 2^{2n-2} \cdots (2n-2)^2 (2n-1)^1}$$

という公式があげられている。これは実は単位分数である：

$$|H_n| = \frac{1}{(2n-1)!! \left\{ \binom{2n-2}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} \cdots \binom{2}{1} \right\}^2}$$

※ $k!!$ の定義： $(-1)!! = 0!! = 1$ とする。 $k \geq 1$ については、 $k!! = (k-2)!! \times k$ と定める。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6048000}$

[1] では Legendre 多項式との関連で考察されている。

行列式の値だけなら、掃き出し法を駆使して次数を下げることによって求めることもできる。(第5節参照)

3 一般化の試み

3.1 一般化 I

行列 H_n の (i, j) 成分は $\frac{1}{i+j-1}$ である。分母を i, j の1次式 $a+bi+cj$ に一般化すると次のような結果が得られる：

$$\det \left(\frac{1}{a+bi+cj} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{(bc)^{n(n-1)/2} \{ (n-1)! (n-2)! \cdots 2! 1! \}^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a+bi+cj)}$$

これは、前述の「掃き出し法で次数を下げる」という方法で得られるが、それでは残念ながら“inventor’s paradox”には該当しない。

3.2 一般化 II

$i+j-1 = (i-1/2) + (j-1/2)$ であるから、これを $x_i + x_j$ と一般化すると、

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+x_1} & \frac{1}{x_1+x_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+x_n} \\ \frac{1}{x_2+x_1} & \frac{1}{x_2+x_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+x_1} & \frac{1}{x_n+x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+x_n} \end{vmatrix};$$

これは x_1, x_2, \dots, x_n の対称式であるから、対称式の基本定理により、基本対称式たちの多項式として表わされることがわかる。が、これだけでは決定的でない。

3.3 一般化 II'

$i + j - 1 = (i - 1) + j = x_i + y_j$ と見て一般化してみる：

$$D = D(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}.$$

前節の式より文字数が増え、より複雑になったように見えるが、 x_1, x_2, \dots, x_n に関しても、 y_1, y_2, \dots, y_n に関しても交代式であるから、交代式の基本定理が使える。同じ次数の多項式については、交代式の方が対称式より自由度が小さいので、より決定的であり得る。

各 $i = 1, 2, \dots, n$ について、第 i 行を通分する：

$$D = \det \left(\frac{(x_i + y_1) \cdots (x_i + y_{j-1})(x_i + y_{j+1}) \cdots (x_i + y_n)}{(x_i + y_1)(x_i + y_2) \cdots (x_i + y_n)} \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

各 $i = 1, 2, \dots, n$ について、第 i 行から共通因子 $\frac{1}{(x_i + y_1) \cdots (x_i + y_n)}$ をくくり出す：

$$D = \frac{D'}{\prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq n} (x_i + y_j)}$$

$$\text{ここに、} \quad D' = \det \left((x_i + y_1) \cdots (x_i + y_{j-1})(x_i + y_{j+1}) \cdots (x_i + y_n) \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

これより、 D' は x_1, x_2, \dots, x_n に関して交代式であることが分かる。

同様に、各列についての通分を考えると、

$$D'(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \det \left((x_1 + y_j) \cdots (x_{i-1} + y_j)(x_{i+1} + y_j) \cdots (x_n + y_j) \right)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

とも表わされるから、 D' は y_1, y_2, \dots, y_n に関して交代式であることが分かる。

したがって、交代式の基本定理により、

$$\text{補題 1.} \quad D' = C \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j)$$

上で、 C は $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ の多項式である。多項式 C の次数を見てみよう：

$$\deg D' = (n-1)n, \quad \deg \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \deg \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j) = \frac{n(n-1)}{2}$$

であるから、 $\deg C =$ 、すなわち、 C は定数である。

補題 2. D' における $x_n^{n-1} x_{n-1}^{n-2} \cdots x_2^1 y_n^{n-1} y_{n-1}^{n-2} \cdots y_2^1$ の係数は 1 である。

[証] 表記の便宜上、 $n = 4$ で説明する：

$$\begin{vmatrix} (x_2 + y_1)(x_3 + y_1)(x_4 + y_1) & (x_2 + y_2)(x_3 + y_2)(x_4 + y_2) & (x_2 + y_3)(x_3 + y_3)(x_4 + y_3) & (x_2 + y_4)(x_3 + y_4)(x_4 + y_4) \\ (x_1 + y_1)(x_3 + y_1)(x_4 + y_1) & (x_1 + y_2)(x_3 + y_2)(x_4 + y_2) & (x_1 + y_3)(x_3 + y_3)(x_4 + y_3) & (x_1 + y_4)(x_3 + y_4)(x_4 + y_4) \\ (x_1 + y_1)(x_2 + y_1)(x_4 + y_1) & (x_1 + y_2)(x_2 + y_2)(x_4 + y_2) & (x_1 + y_3)(x_2 + y_3)(x_4 + y_3) & (x_1 + y_4)(x_2 + y_4)(x_4 + y_4) \\ (x_1 + y_1)(x_2 + y_1)(x_3 + y_1) & (x_1 + y_2)(x_2 + y_2)(x_3 + y_2) & (x_1 + y_3)(x_2 + y_3)(x_3 + y_3) & (x_1 + y_4)(x_2 + y_4)(x_3 + y_4) \end{vmatrix}$$

行列式の計算式：

- (1) 各列から一つずつ選ぶ；
- (2) ただし行が重複しないように；
- (3) 選んだ成分たちの積に，選んだ行番号たちでできる順列の符号をかけて総和に基づいて $x_4^3 x_3^2 x_2^1 y_4^3 y_3^2 y_2^1$ の係数を考えよう。

第1列からの選び方： y_1 が含まれないようにするには，第1列のどれを選んだにしても展開した時の x_i だけの項を選ばなければならない。その中で x_1 を含まないものは第1行だけである。

そこで，第1列からは第1行の成分を選ぶしかない。その中で該当する項は $x_4 x_3 x_2$ のみである。

すると(2)により，第2列からは第2行以降の成分を選ぶしかない。 y_2 の次数が1であるようにするには，展開した時の $x_i x_j$ の項を選ばなければならない。その中で x_2 (上で選んだ項 $x_4 x_3 x_2$ に既に1個含まれている) を含まないものは第2行だけである。

そこで，第2列からは第2行の成分を選ぶしかない。その中で該当する項は $x_4 x_3 y_2$ のみである。同様に進める：

第3列からは第3行の成分を選ぶしかない。その中で該当する項は $x_4 y_3^2$ のみである。

第4列からは第4行の成分を選ぶしかない。その中で該当する項は y_4^3 のみである。

選んだ順列 (1, 2, 3, 4) の符号は +， 該当する成分の積は $x_4^3 x_3^2 x_2^1 y_4^3 y_3^2 y_2^1$

以上により， D' における $x_4^3 x_3^2 x_2^1 y_4^3 y_3^2 y_2^1$ の係数は 1 である。 ■

一方，上の系1の右辺での $x_n^{n-1} x_{n-1}^{n-2} \dots x_2^1 y_n^{n-1} y_{n-1}^{n-2} \dots y_2^1$ の係数は $C \times (-1)^{n(n-1)/2 + n(n-1)/2} = C$ である。したがって， $C = 1$ となり，結局，

$$\text{系. } D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j) / \prod_{1 \leq i, j \leq n} (x_i + y_j)$$

4 応用

4.1 Hilbert 行列の行列式

上の結果を用いて，あらためて Hilbert 行列の行列式を求めてみよう。

$x_i = i - 1$, $y_j = j$ とすると，($k = n(n - 1)/2$ として)

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j) = (-1)^k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = (-1)^k 1! 2! \dots (n - 1)!$$

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i, j \leq n} (x_i + y_j) &= \prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j - 1) \\ &= 1^1 2^2 3^3 \dots (n - 1)^{n-1} n^n (n + 1)^{n-1} \dots (2n - 2)^2 (2n - 1)^1 \\ &= \frac{1^{2n-1} 2^{2n-2} 3^{2n-3} \dots (n - 1)^{n+1} n^n (n + 1)^{n-1} \dots (2n - 2)^2 (2n - 1)^1}{1^{2n-2} 2^{2n-4} 3^{2n-6} \dots (n - 1)^2} \\ &= \frac{1^{2n-1} 2^{2n-2} 3^{2n-3} \dots (2n - 2)^2 (2n - 1)^1}{\{1! 2! 3! \dots (n - 1)!\}^2} \end{aligned}$$

したがって，

$$D = \frac{\{1! 2! 3! \dots (n - 1)!\}^4}{1^{2n-1} 2^{2n-2} 3^{2n-3} \dots (2n - 2)^2 (2n - 1)^1}$$

4.2 Hilbert 行列の逆行列

行列

$$H = H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{pmatrix}$$

を仮に一般 Hilbert 行列と呼ぼう。その各小行列式はやはり上の公式を適用して求められる。
 H^{-1} の (i, j) 成分を $h_{i,j}$ とおくと、

$$\text{補題. } h_{i,l} = (-1)^{i+j} \frac{\prod_{1 \leq l \leq n} (x_i + y_l) \prod_{1 \leq k \leq n} (x_k + y_j)}{(x_i + y_j) \prod_{1 \leq k < i} (x_k - x_i) \prod_{i < l \leq n} (x_i - x_l) \prod_{1 \leq k < j} (y_k - y_j) \prod_{j < l \leq n} (y_j - y_l)}$$

[証] H から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の正方行列を $H_{i,j}$ とすると、

$$H_{i,j} = H(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$$

$$\therefore |H_{i,j}| = D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$$

$$= \prod_{1 \leq k < l \leq n; k, l \neq i} (x_k - x_l) \times \prod_{1 \leq k < l \leq n; k, l \neq j} (y_k - y_l) \Big/ \prod_{1 \leq k, l \leq n, k \neq i, l \neq j} (x_k + y_l)$$

$$\therefore h_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} |H_{i,j}|}{|H|}$$

$$= (-1)^{i+j} \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq n; k, l \neq i} (x_k - x_l) \times \prod_{1 \leq k < l \leq n; k, l \neq j} (y_k - y_l)}{\prod_{1 \leq k, l \leq n, k \neq i, l \neq j} (x_k + y_l)} \times \frac{\prod_{1 \leq k, l \leq n} (x_k + y_l)}{\prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_k - x_l) \prod_{1 \leq k < l \leq n} (y_k - y_l)}$$

$$= (-1)^{i+j} \frac{\prod_{1 \leq l \leq n} (x_i + y_l) \times \prod_{1 \leq k \leq n} (x_k + y_j) \times \frac{1}{x_i + y_j}}{\prod_{1 \leq k < i} (x_k - x_i) \prod_{i < l \leq n} (x_i - x_l) \prod_{1 \leq k < j} (y_k - y_j) \prod_{j < l \leq n} (y_j - y_l)}$$

特に $x_i = i-1$, $y_j = j$ とすると、

$$h_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{\prod_{1 \leq l \leq n} (i+l-1) \times \prod_{1 \leq k \leq n} (k+j-1) \times \frac{1}{i+j-1}}{\prod_{1 \leq k < i} (k-i) \prod_{i < l \leq n} (i-l) \prod_{1 \leq k < j} (k-j) \prod_{j < l \leq n} (j-l)}$$

$$= (-1)^{i+j} \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!} \times \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!} \times \frac{1}{i+j-1} \frac{1}{(i-1)! (n-i)! (j-1)! (n-j)!}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{i+j} \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!(n-i)!(i-1)!} \times \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!(n-j)!(j-1)!} \times \frac{1}{i+j-1} \\
 &= (-1)^{i+j} \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!n!} \times \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} \times \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!} \times \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \times \frac{1}{i+j-1} \\
 &= (-1)^{i+j} \binom{n+i-1}{i-1} \binom{n}{i} \binom{n+j-1}{j-1} \binom{n}{j} \times \frac{ij}{i+j-1}
 \end{aligned}$$

5 掃き出し法で — ほんの少しの一般化

ほんの少し一般化して, $D_n(a) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+2} & \cdots & \frac{1}{a+n} \\ \frac{1}{a+2} & \frac{1}{a+3} & \cdots & \frac{1}{a+n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a+n} & \frac{1}{a+n+1} & \cdots & \frac{1}{a+2n-1} \end{vmatrix}$ を考える。

第1行の第2成分以降を消去するため, 第1列の $\frac{a+1}{a+j}$ 倍を第 j 列に加える ($j=2, \dots, n$):

$$\text{第}(i, j)\text{成分} = \frac{1}{a+i+j-1} - \frac{a+1}{(a+i)(a+j)} = \frac{(i-1)(j-1)}{(a+i+j-1)(a+i)(a+j)}$$

第1行で展開して

$$D_n(a) = \frac{1}{a+1} \prod_{i=2}^n \frac{i-1}{a+i} \prod_{j=2}^n \frac{j-1}{a+j} \begin{vmatrix} \frac{1}{a+3} & \frac{1}{a+4} & \cdots & \frac{1}{a+n+1} \\ \frac{1}{a+4} & \frac{1}{a+5} & \cdots & \frac{1}{a+n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a+n+1} & \frac{1}{a+n+2} & \cdots & \frac{1}{a+2n-1} \end{vmatrix}$$

これから得られる漸化式 $D_n(a) = \frac{1}{a+1} \left(\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{a+i} \right)^2 D_{n-1}(a+2)$ を利用して,

$$\begin{aligned}
 D &= D_n(0) = \frac{1}{(2n-1)!!} \left(\frac{(n-1)! 1!}{n!} \right)^2 \left(\frac{(n-2)! 3!}{(n+1)!} \right)^2 \cdots \left(\frac{1! (2n-3)!}{(2n-2)!} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{(2n-1)!!} \frac{1}{\left\{ \binom{2n-2}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} \cdots \binom{4}{2} \binom{2}{1} \right\}^2}
 \end{aligned}$$

参考文献

- [1] G. Polya: *How to solve it*, Princeton University Press (1945)
- [2] D. Hilbert; *Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms*, Acta mathematica Vol.18 (1894)