イプシロン　2012.Vol.54，7 － 27

作図ツールGCを使った多様な探究のための教材開発の実際
－3つの問題に関するケーススタディ－

愛知教育大学数学教育講座　**飯　島　康　之**

０．はじめに

iPadでも動作する作図ツールGC/html５の実践に関して，2010年の鈴木実践（１月，10月）では，二つの提案を行った（飯島（2011））。その一つは，１月の実践で提案した「グループ活動の中での５分間程度の利用」であった。これは，iPadのようなタブレット端末を普段の授業の中で気軽に使えるかどうかを確かめるための指標であった。10月の実践では，「複数の点の動かし方への注目」を提案した。同時にこの実践の中で実感したのは，生徒の豊富な言語活動だった。たしかに普段の実践の中で日常的に使うには，「５分間程度の利用」が基本になるのだが，附属学校での実践としては，グループに委ねる時間を増やして多様な探究の可能性を検討してみたいと思った。

そのような実践を目指すためには，教材開発が不可欠である。本稿では，2012年２月にGC活用研究会で実施した長谷川実践に関連して行った教材開発と，2013年１・２月に予定している牛田実践や小林実践を念頭において行っている教材開発を素材としながら，作図ツールGCを使った多様な探究のための教材開発の実際についてまとめることとしたい。

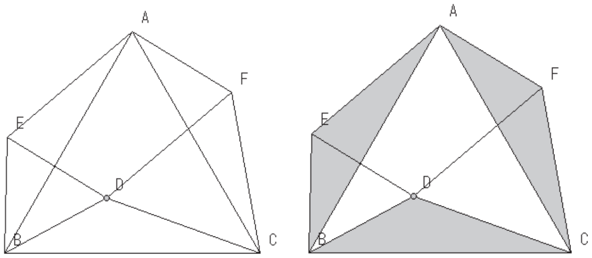
なお，以下の問題はもちろん，研究授業のための教材開発として扱ってきたものであるが，教材研究をしてきた私たち自身も意外な発見等があり，自分自身の数学的探究としても興味深いものだった。逆にいえば，多様な探究のための教材研究は，まず自分自身が数学的探究を楽しみ，そのプロセスを再構築するとしたら，どこに数学的なおもしろさや意外性を仕組んでいくかという面も十分に含まれているといえるだろう。

１．長谷川実践で扱った問題　－３つの正三角形から構成する四角形の問題－

１．１　最初の問題

長谷川実践に際して検討した問題の一つは，次の問題だった。

問題１－１　正三角形ABCの内部に点Dをとり，次の図のように，BD，DCを一辺とする正三角形EBD，FDCをかく。そして，A，E，D，Fを結んで四角形AEDFをつくるとき，AEDFは平行四辺形になることを証明せよ。



図－１

中学生向けの，少し発展的な証明問題である。この問題の証明では，図－１右に示す３つの三角形の合同を見いだすこと，△DBCとその他の２つの三角形との合同を示すこと，そして正三角形の性質を使って，四角形AEDFの２組の辺の長さが等しいことを証明することが鍵になる。

この問題の証明を支援するためにGCを使おうとするならば，この３つの合同な三角形に注目することなどに役立つかどうかが重要だが，あまり役立つとは思えない。とすると，証明問題を考える部分は紙と鉛筆で行うことが妥当であり，「条件下では問題文の内容がいつもなりたつ」ことを確認することを中心的に使うのならば，電子黒板など，大きな画面での提示や説明で十分ということになる。

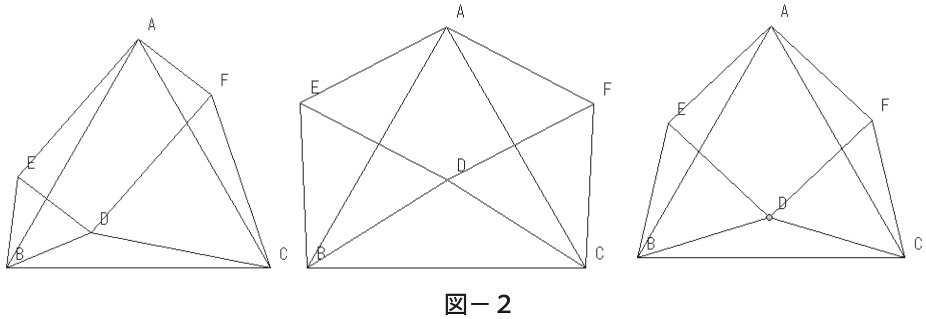
１．２　問題をオープンにする（1）

性質を発見する道具として，GCを使うことを想定するならば，結論の部分をオープンにして，次のような問いを考えることができる。

問題１－２　正三角形ABCの内部に点Dをとり，次の図のように，BD，DCを一辺とする正三角形EBD，FDCをかく。そして，A，E，D，Fを結んで四角形AEDFをつくるとき，AEDFはどのような形になるか。（図は図－１左参照）

想定する解答は，「AEDFはいつも平行四辺形」であるが，この問いの場合には，次のような答えも追加されることになる。

・AEDFは，長方形のときもある。
・AEDFは，ひし形のときもある。
・AEDFは，正方形のときもある。



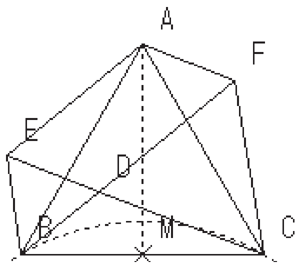
図－２

そして，平行四辺形，長方形，ひし形，正方形の４種類があるならば，次の問いに続くのは自然な流れといえるだろう。

問題１－３　問題１－２の図において，点Dを正三角形ABCの内部のどこにとると四角形AEDFはそれぞれ，平行四辺形，長方形，ひし形，正方形になるのだろうか。

１．３　条件を満たす点の集合を調べ，結果から予想を生成することを支援するものとしてのGCの利用

ここでは，場合分けを「点Dの位置」によって考察する。GCを使う場合には，それぞれ，複数の点Dをプロットすることで観察結果を集約し，その観察結果からの予想を生み出す活動を行うことになる。観察結果としては，次のようなものが想定される。



図－３

１．４（GCは使わずに）紙と鉛筆を中心に行うべきものとしての証明

上記で得られた予想は証明すべきであることはいうまでもない。つまり，次の問題１－４が生まれてくる。しかし，これはGCを使って解決されるわけではなく，紙と鉛筆での活動が中心になるといえよう。

問題１－４　問題１－３に対して作った予想を証明せよ。

それぞれの証明の概略は，次のようになる。

⑴　点Dが三角形ABCの内部にあるときは，いつもAEDFは平行四辺形。

△DBCと△EBAは，正三角形の対応する辺として２組の辺が等しく，∠DBC＝60°－∠ABD＝∠EBAとなり，２組の辺とそのはさむ角が等しいので合同。同様に，△DBCと△FACも合同。よって，△EBAと△FACも合同。

四角形AEDFにおいて，AE＝DC＝DF，ED＝BD＝AFとなり，２組の対辺の長さが等しいのでAEDFは平行四辺形。

⑵　点Dが中線AM上にあるときは，AEDFはひし形。

⑴から平行四辺形がいえる。さらに，Dが中線上にあるときは△DBCは二等辺三角形になるので，DB＝DCとなり，それぞれ正三角形の辺なので，ED＝DFとなる。隣り合う２辺が等しい平行四辺形なので，AEDFはひし形になる。

⑶　点Dが，ある円の上にあるときに，AEDFは長方形。

長方形になるためには，∠EDF＝∠Rであればよい。つまり，∠BDC＝150°であればよい。そ

のため，円周角の定理の逆により，点Dはある円上にあることになる。

⑶' 円周角の定理の逆だけから⑶は円の一部ということがわかるが，この円の中心をOとすると，中心角∠BOC＝２∠BDC＝300°となるため，その中心は，AをBCに対して線対称移動した点になる。

⑷ ⑵と⑶の交点の場所では正方形。

AEDFが正方形になるためには，ひし形と長方形の条件の両方が成り立てばよいので，⑵と⑶の交点にあれば正方形になる。

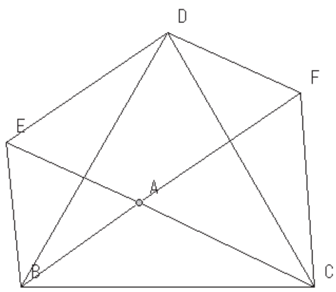
１．５　問題をオープンにする（２）

問題２の中では，点Dの位置に関して，「正三角形ABCの内部」に限定している。これは数学の問題としては妥当であるだけでなく，紙上でフリーハンドで作図をする場合などには，その条件の中で作図をするから，特に違和感を感じることはないだろう。しかし，GCなどの作図ツールを使う場合には，一般に点Dのような動点に対して，「正三角形の内部」のような制約条件をつけることは難しい（GCの場合には，辺上とか円上など，幾何的対象の上に制約することになる。）。つまり，辺上や外部も含めて点Dは自由に動いてしまう。実際，点DがABCの外部にあるときもAEDFは平行四辺形になるということを踏まえると，この条件ははずして次の問題に変える方が妥当と考えることもできる。

問題１－５　正三角形ABCがある。適当な位置に点Dをとり，次の図のように，BD，DCを一辺とする正三角形EBD，FDCをかく。そして，A，E，D，Fを結んで四角形AEDFをつくる。点Dをさまざまな位置にとると，AEDFはどのような形になるか。（図は図－１左）

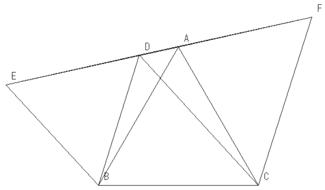
あるいは，内部を意識しないならば，（点の名前が変わるが）次のような問題文にすることもできる。

問題１－６　三角形ABCがある。３つの辺AB，BC，CAをそれぞれ一辺とする正三角形DBC，EBA，FACを次の図のようにかく。そして，D，E，A，Fを結んで四角形DEAFをつくる。点Aをさまざまな位置にとると，AEDFはどのような形になるか。（この問題文の場合には，前述の内部・外部等の配慮は不要になり，問題文としては自然になる。）



図－４

点D（あるいはA）の位置を内部に限定することなく，外部にも移動可能とすることによって，新たに「AEDFが線分になる場合」が生まれる。

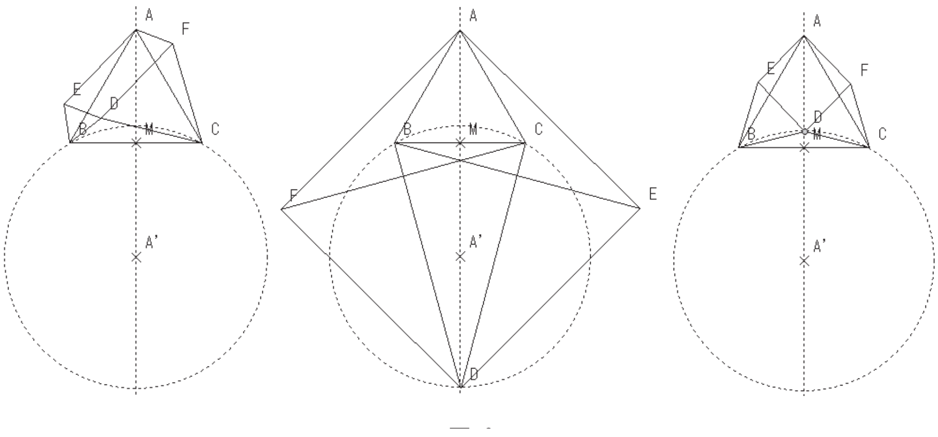


図－５

この場合，

$\angle EDF = \angle EDB + \angle BDC + \angle CDF = 180°$　つまり　$\angle BDC = 60°$

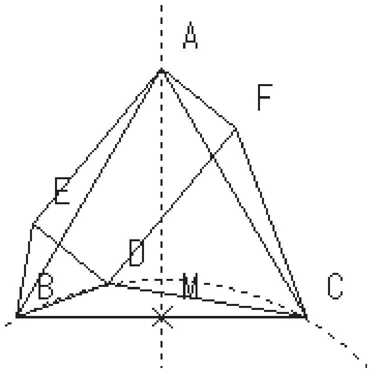
が必要十分条件となり，円周角の定理の逆により，点Dは△ABCの外接円上にあれば一直線になることがいえる。また，内部の場合には，AEDFが長方形になるのは，点Dが円の一部のときだったが，外部も含めることにより，円全体となる。また，正方形になるのは，ひし形になる直線の部分と長方形になる円の部分の交点の位置であり，２つの可能性があることがわかる。

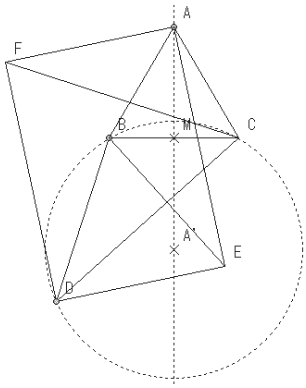


図－６

１．６　中学生的に厳密な証明をするための場合分けの必要性

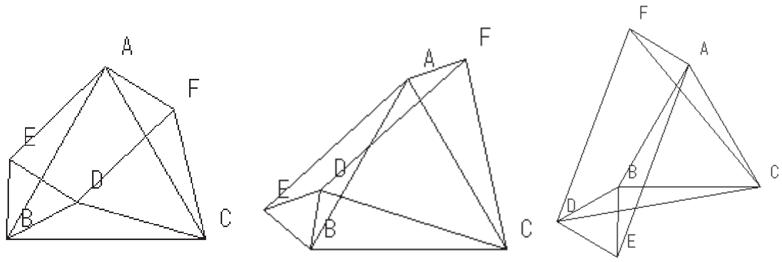
問題１－５，６のようにDの位置を内部から外部も含めた場合へと拡張することは，上記のような結果を生む。発見を主体とした学習を構成する上で，「最初正方形の可能性は一つしかないと思ったが，長方形とひし形の共通部分としての正方形の可能性を考えると下の方にもう一つの可能性があることが分かった」ことなどは，とても興味深い発見の候補になりうるだろう。一方，内部からの拡張は，長方形になる場合でいえば，次の二つの場合分けを意識化しなければならない。





図－７

しかし，それだけの問題ではない。そもそも「いつも平行四辺形」ということが基盤になっているが，平行四辺形の証明を考える上で，たとえば，次のような場合をどう扱うのかという問題も派生する。



図－８

１．７　必ず指導すべきこと，生徒が気づけば授業中に扱うべきこと，必要に応じて授業後のレポート作成等に委ねればよいこと

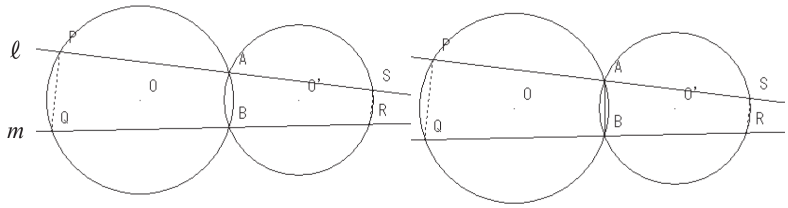
問題１－２のように点Dを内部に限定することによって，上記で述べたような場合分けの必要性はなくなる。そういう意味で，内部に限定することは，証明指導としてはすっきりとまとめることができる問題である。一方，問題１－５，６のような扱いの場合には，発見の可能性も増えるが，本来は配慮しなければならないことも増える。関連することのすべてを授業の中で解説することを求めるべきではないだろう。生徒の多様な探究に委ねるべき教材と位置づけるならば，全員に対して理解を求め，指導すべきことと，生徒の気づきに委ねるべきことの仕分けが必要である。さらに，生徒の気づきに対して，授業の中で全員の理解を求めるべきことと，問題点の所在の理解にとどめ，より正確な文章化は，その後の個人のレポート作成等に委ねるべきことに分ける必要があると思われる。

２．　２つの円と２つの直線に関連する問題

２．１　出発点

もともと，次の問題２－１は（以前のカリキュラムの）教科書等でも扱われていた問題である。その問題の発展の一つとして，問題２－２はどうだろうかと，牛田先生から打診を受けた。

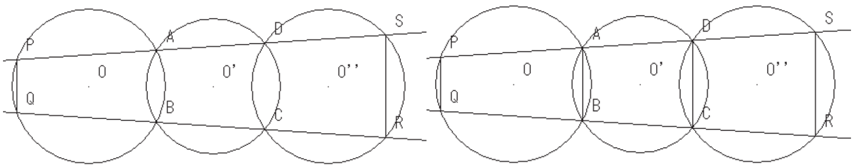
問題２－１　図のように，二つの円O，O'があり，２点A，Bで交わっている。A，Bをそれぞれ通る直線ℓ，mがあり，円との交点をP，R，Q，Sとするとき，PQ//SRとなることを証明せよ。



図－９

解決２－１　ABを結ぶと，四角形PQBAは円に内接するので，∠APQ＝∠ABR，四角形ABRSも円に内接するので，∠ABR＋∠ASR＝２∠R，よって∠APQ＋∠ASR＝２∠RとなりPQ//SR。

問題２－２　図のように三つの円O，O'，O"があり，それぞれA，B，C，Dで交わっている。A，Dを通る直線とB，Cを通る直線を引き，円との交点を図のように，P，Q，R，Sとする。このとき，四角形PQRSは円に内接する四角形になることを証明せよ。



図－10

解決２－２　AB，CDを結ぶと，PQBA，ABCD，DCRSがそれぞれ円に内接する四角形になるので，∠APQ＝∠ABC＝∠CDS＝180°　－∠SRC

よって，∠APQ＋∠SRC＝180°　になるので，四角形PQRSは円に内接する。

この図の場合，O，O'，O"を動かすと，動かし方によって４本の直線の向きはそれぞれ変わらない場合もあれば，変わる場合もあるのだが，一つおきに平行になる関係と，PQRSが円に内接するという性質は変わらないことを確認できる。なかなか興味深い動きである。

しかし，もし問題２－１の後に問題２－２を扱うとしたら，解決２－１を踏まえると解決２－２はその練習問題くらいの簡単な問題にしかならない。逆に，問題２－１を扱わずに最初から問題２－２を扱うとどうみても唐突な感じがする。

また，作図ツールを使うのは証明よりも発見の方が適しているので，結論を明示して「証明せよ」という問題を次の問題２－３に変えてみた。

問題２－３　図のように三つの円O，O'，O"があり，それぞれA，B，C，Dで交わっている。A，Bを通る直線とC，Dを通る直線を引き，円との交点を図のように，P，Q，R，Sとする。O，O'，O"を動かしたとき，四角形PQRSについてどのようなことが成り立っているか調べよ。（図－10参照）

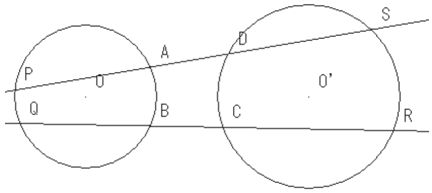
発見しうる候補としては，次のようなものがありうる。

⑴　なりうる四角形としては，長方形，等脚台形がある。それ以外の場合は，円に内接する四角形。（いわゆる平行四辺形，ひし形にはならない。）

⑵　∠APQ＋∠SRC＝180°　（関連して，PQ//DC，QB//SR）

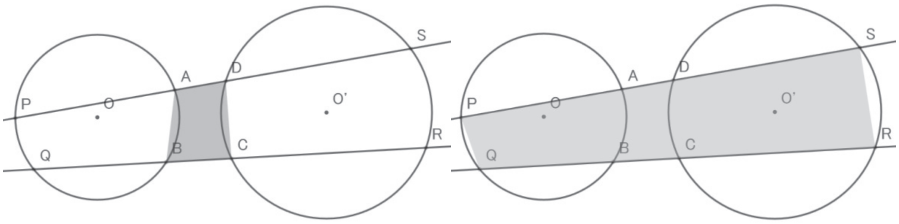
２．２　条件の緩和（中央の円を取り除く）

円が３つ登場することに違和感があったので，中央の円を取り除き，次のような図にしてみた。



図－11

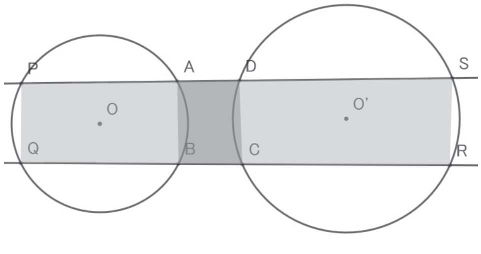
図としてはかなりすっきりとした図になる。そしてまた，問題２－１の２つの円の位置関係を２点で交わる状態から離れた位置まで移動した図に対して２直線を追加して問題を考える図として理解することもできる。この図の中の次の構成要素（ABCD，PQRS）を考え，それらの関係を考えることができないかを検討してみた。



図－12

２．３　ABCD→PQRS：長方形→長方形

ABCDが長方形のときには，次図のようにPQRSが長方形になる。



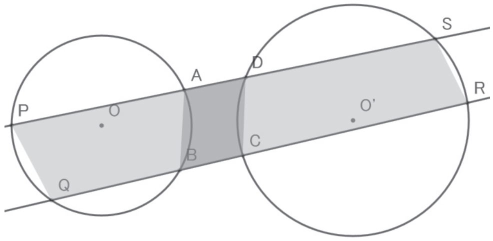
図－13

証明としては，∠BAD＝90°より∠PAB＝90°となるので，四角形PQBAの対角線PBは円Oの直径になるため，∠PQB＝90°，同様に∠ABQ＝∠APQ＝90°が示せ，長方形がいえる。

あるいは，四角形PQBAが円に内接する四角形の性質を使うこともできる。

２．４　ABCD→PQRS：平行四辺形→平行四辺形

ABCDが平行四辺形のときには，次図のようにPQRSが平行四辺形になる。

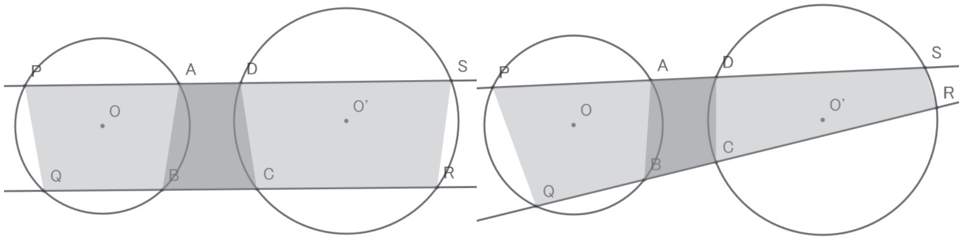


図－14

証明としては，四角形PQBA，DCRSが円に内接する四角形なので，∠APQ＝∠DAB，∠CRS＝∠CDA，AB//DCなので，∠DAB＋∠CDA＝180°より，∠APQ＋∠CRS＝180°となり，PQ//SR。AD//BCよりPS//QRなので，PQRSは平行四辺形になる。

２．５　ABCD→PQRS：台形→台形

台形となるのは，AD//BCの場合とAB//DCの場合の２種類がある。



図－15

⑴　AD//BCの場合

AD//BCであれば，共通しているので，PS//QRになるのは明らか。なお，この場合，四角形PQBA，DCRSはそれぞれ等脚台形になる。そのためABCDが等脚台形の場合には，PQRSも等脚台形になる。

⑵　AB//DCの場合

∠APQ＋∠DSR＝∠ABC＋DCB＝180°となり，PQ//SRとなって，PQRSは台形になる。

２．６　ABCD→PQRS　における角の対応関係

上記のさまざまな関係を考察する上で，次の関係は常に成り立っている。

∠DAB＝∠PQR，∠ABC＝∠APQ，∠BCD＝∠DSR，∠CDA＝∠CRS

つまり，四角形ABCDと四角形PQRSは，４組の角が等しいという関係がある。しかし，辺の長さに関しては関係はないので，相似ではない。そのため，ABCDがひし形や正方形という，長さ

に特別な関係がある四角形になっていても，それが理由でPQRSに特別な関係が成立することはなく，それぞれ平行四辺形，長方形としての性質のみがPQRSに対応することになる。

２．７　角の関係性からの整理

そのため，角に関するABCDの関係性は，そのままPQRSに関しても成り立つことになる。上記で確認済の関係としては，次のものがある。

⑴　４つの角が等しい→長方形

⑵　２組の対辺が等しい→平行四辺形

⑶　１組の隣り合う角の和が180°→台形

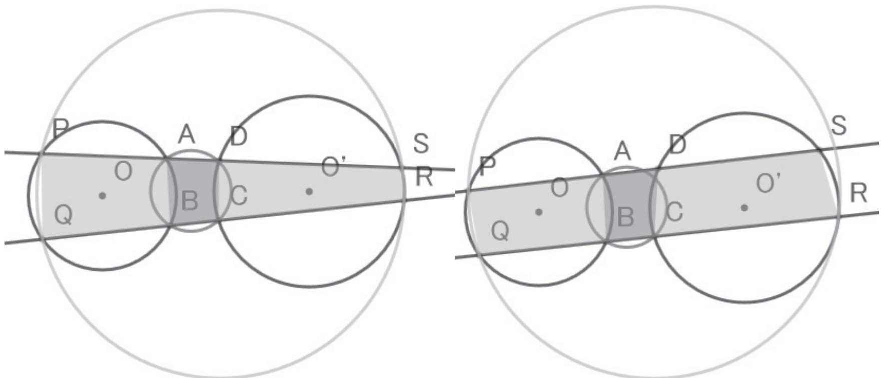
また，部分的に確認済の関係としては，次のものがある。

⑷　２組の隣り合う角が等しい→等脚台形

さらに，まだ確認していない関係として，次のものがある。

⑸　対辺の角の和が180°

これは，ABCDが円に内接する四角形であれば，PQRSも円に内接する四角形であることを意味する。実際に，このことを確認するために，３点A，B，Cを通る円とP，Q，Rを通る円を作図し，前者がDを通ることと後者がSを通ることが同値であることを確認すると，次の図のようになる。



図－１６

２．８　より一般的な問題に対する多様な探究への埋め込み

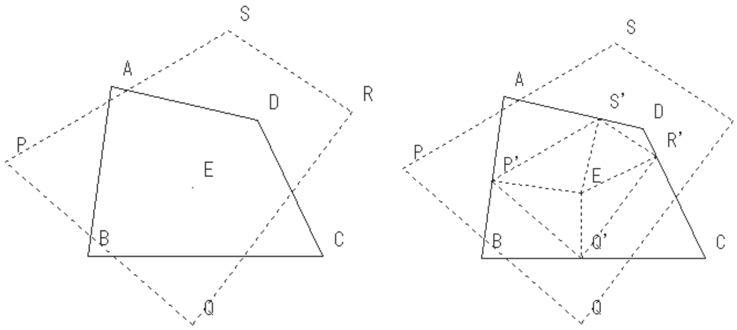
上記の考察を踏まえると，長方形の場合を出発点として，関連するいろいろな事例を調べ，さらにそれを角の関係性で整理するという探究の流れが想定できる。上記では，長方形，平行四辺形，台形，等脚台形，円に内接する四角形が考察の対象となったが，実際の学級の中では，それぞれのグループがどれに注目し，どのような発表を行うかによって，授業の流れは変わりうる。最初から円に内接した四角形が候補になったとしても，あるいは角の関係性を踏まえた上で再検討する中で候補になったとしても，生徒の多様な探究の中の一つとして問題２－１を内包できる問題を見いだすことができたと言えるだろう。

３．四角形の内点を４つの辺に対して線対称移動することでできる四角形の問題

３．１　出発点

以前から教材化してみたい図の一つに，次の図があった。

四角形ABCDの内部に一点Eをとる。EをAB，BC，CD，DAに対してそれぞれ線対称移動した点をP，Q，R，Sとする。（なお，線対称でなく，４つの辺に垂線の足P'，Q'，R'，S'を下ろした図はPQRSを１/２に縮小した図になり，本質的には同じ図になる。また，証明をする上では垂線を下ろした図の方が扱いやすい。）



図－17

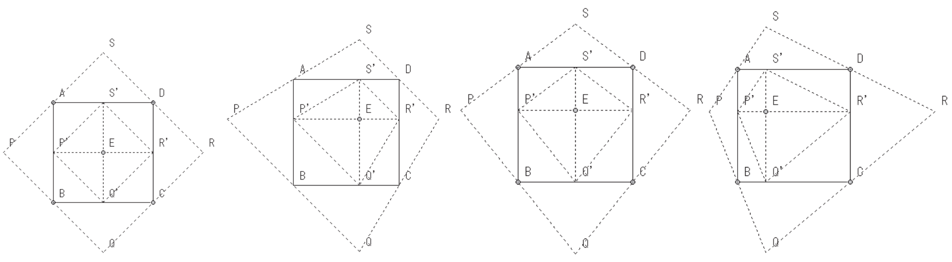
この図では，いわば，ϕ（ABCD，E）＝PQRSという対応関係になっており，ABCDの形を変えても，また点Eの位置を変えてもPQRSは変わる。そのさまざまな変化の中にある規則性を見つけることができるという意味で，多様な探究を可能にする問題の一つになるのではないかと思った。そこで，次の問題に順次取り組んだときに，どういう結果がえられるのかを以下で考察することにしたい。

問題３－１：四角形ABCDの内部に一点Eをとる。EをAB，BC，CD，DAに対してそれぞれ線対称移動した点をP，Q，R，Sとする。ABCDのさまざまな形に対して，点EをどこにとるとPQRSはどのような形になるかを調べよ。そして可能ならば証明せよ。

まず，観察結果についてまとめておく。

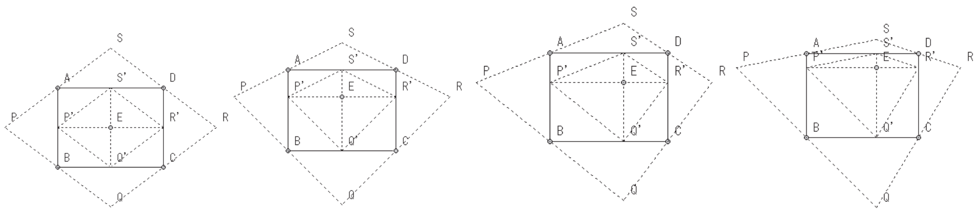
３．２　観察結果

⑴　ABCDが正方形の場合



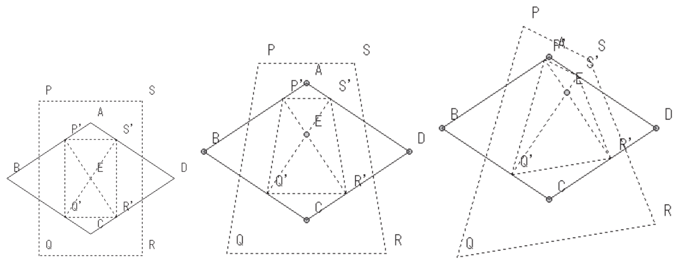
図－18

⑵ ABCDが長方形の場合



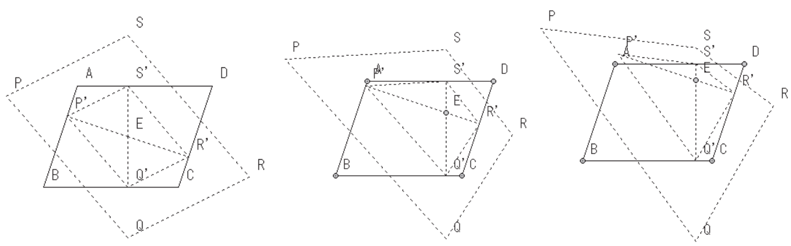
図－19

⑶ ABCDがひし形の場合



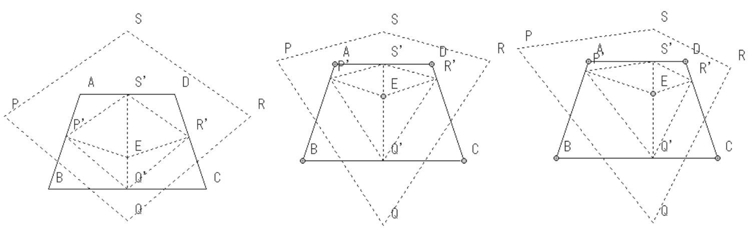
図－20

⑶ ABCDが平行四辺形の場合



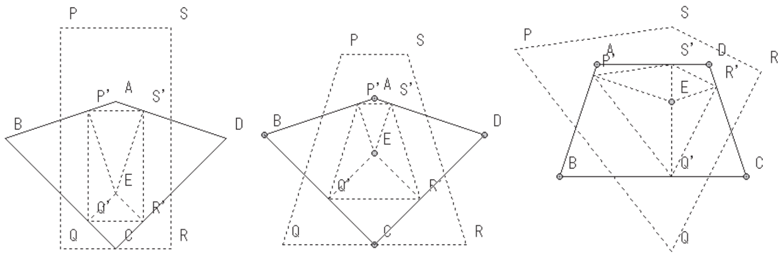
図－21

⑷ ABCDが等脚台形の場合



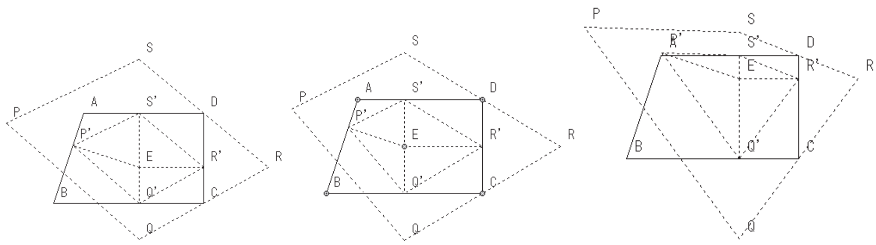
図－22

⑸　ABCDがたこ形の場合



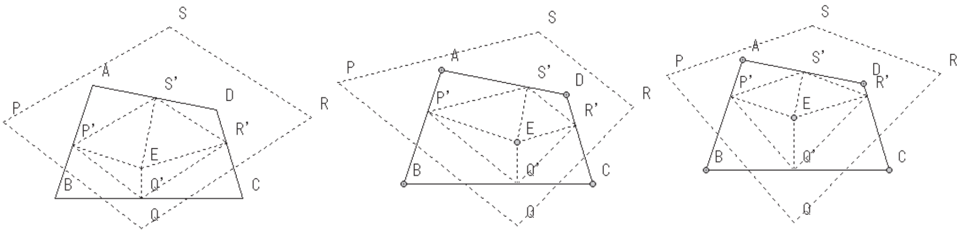
図－23

⑹　ABCDが台形の場合



図－24

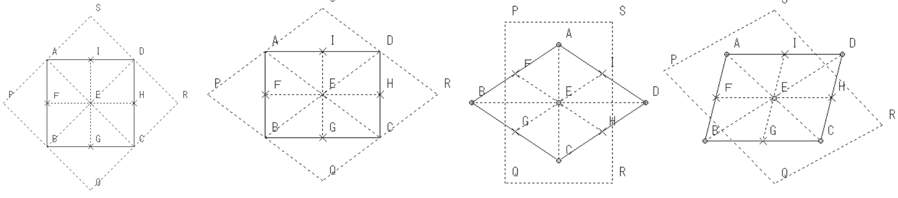
⑺　ABCDが凸四角形の場合



図－25

３．３　Eの位置の結果に関する整理（１）

ABCDが正方形，長方形，ひし形，平行四辺形の場合について点Eの位置とPQRSの関係をまとめると，次のようになる。



図－26

ABCDの形	正方形	長方形	ひし形	平行四辺形
対角線上	等脚台形	台形	等脚台形	台形
IG，FH上	たこ形	たこ形	−　−　−	−　−　−
対角線の交点	正方形	ひし形	長方形	平行四辺形

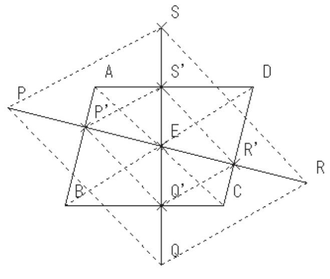
3．4　証明に値する命題（1）

線対称で構成した図の場合，図－18，19にみられるようにABCDが正方形・長方形の場合にPQRSはABCDの頂点を必ず通る。これは，△EPRなどがすべて直角三角形になり，斜辺の中点が三角形の外心になることから導かれることだが，証明に関しては，直角三角形の中にうまれる4つの小さな直角三角形がすべて合同になることからも行える。

また，上記の結果の中で，たこ形と等脚台形は対称性から導かれる。

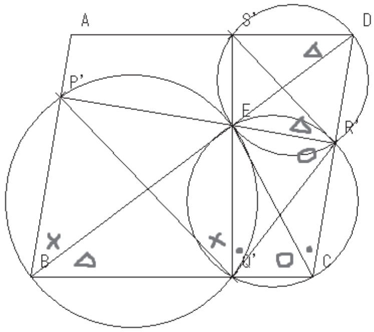
Eが対角線の交点のときに，正方形，ひし形，長方形，平行四辺形になることは，三角形の合同などを使って証明することができ，それぞれは中学生向きの証明問題になる。たとえば，ABCDが平行四辺形のとき，PQRSが平行四辺形になるのは，次のように証明できる。（なお，正方形，長方形ひし形などでは辺の相等性や角度の相等性を使えるので，中学生にとってより簡単な証明も可能になる。）

△EAP'と△ECR'において，作図の仕方から，∠AP'E＝∠CR'E＝∠R。ABCDが平行四辺形であることから，AE＝CE，∠P'AE＝∠R'CE。よって△EAP'≡△ECR'。対応する辺なので，P'E＝R'E。同様に，S'E＝Q'E。四角形P'Q'R'S'において対角線が互いに他を二等分するので，P'Q'R'S'は平行四辺形。よって，PQRSも平行四辺形。



図－27

また，ABCDが平行四辺形で点Eが対角線上にあるとき，P'Q'S'R'が台形になること（あるいはP'Q'//S'R'になること）は，次のように円に内接する四角形の性質を使って証明できる。



図－28

まず，点Eから垂線を下ろしているので，EP'BQ'，EQ'CR'，ER'DS'はすべて円に内接する四角形になる。円周角の定理と平行線の錯角の性質（∠EBQ'＝∠EDS'）を使うことによって，次のような変形をすることができる。

$\angle P'Q'R' + \angle Q'R'S'$

$= \angle P'Q'E + \angle EQ'R' + \angle Q'R'E + \angle ER'S'$

$= \angle P'BE + \angle ECR' + \angle Q'CE + \angle EDS'$

$= \angle P'BE + \angle ECR' + \angle Q'CE + \angle EBQ'$

$= \angle P'BE + \angle EBQ' + \angle Q'CE + \angle ECR'$

$= 2\angle R$（AB//DCより）

よって，P'Q'//S'R'

このような意味において，平行四辺形およびその特殊な場合に関して証明に値する命題は次のようになると言えよう。

A．点EをABCDの対角線の交点に置くとき，ABCDが正方形，長方形，ひし形，平行四辺形のそれぞれの場合に対して，PQRSは，正方形，ひし形，長方形，平行四辺形になる。

B．ABCDが平行四辺形で点Eを対角線上にとると，PQRSは台形になる。

３．５　観察結果を比較しながら気づいたこと

ABCDの形に応じて，PQRSは平行四辺形の特別な場合が得られているが，たとえば，正方形のときには，PQRSは正方形になる場合があるだけであって，いわゆる平行四辺形になる場合は見つからない。それは長方形やひし形の場合も同様である。なぜ，一つしかないのだろうか。その答えはすぐに見つかった。つまり，平行四辺形の場合，対角線上に点Eがあると一組の対辺の平行性が成り立つ。PQRSが平行四辺形になるのは，二組の対辺が平行になる場合であり，それぞれを実現するのは対角線上にある場合なので，二つの対角線の交点でしか，平行四辺形にはなりえない。そのたった一つの平行四辺形が，ときには正方形，あるいは長方形など，特別な場合になっているということなのである。

そこで，問いの観点を変えてみた。

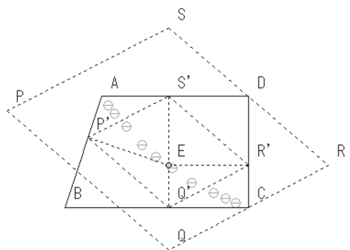
⑴　ABCDがどのような四角形でもPQRSが平行四辺形になる場合は一つだけあるのだろうか。

⑵　PQRSが台形になるのは，どういう場合なのだろうか。

実際，観察結果を元に検討してみると，台形，凸四角形などの場合でも，台形や平行四辺形になる場合は存在している。台形になる場合は多そうだが，平行四辺形になるのは一カ所しかないように思える。つまり，探究の焦点の当て方として，台形や平行四辺形のできる場合に注目することが意味がありそうなことが分かった。

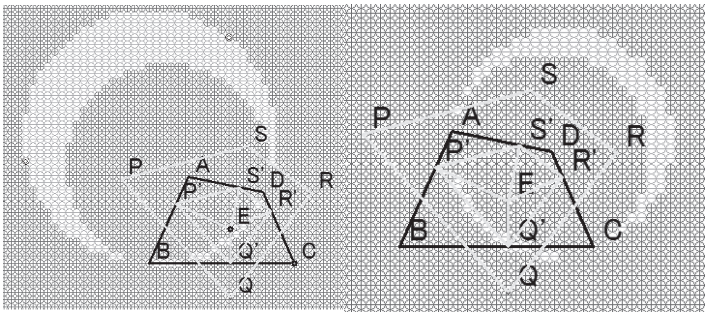
３．６　証明に値する命題（２）

いろいろなABCDの形に対してPQRSが平行四辺形になる場合を探してみると，特定の１ケ所に点Eをとった場合にのみ平行四辺形になりそうなことが分かった。しかし，そのEの位置を確定する上で，手がかりとなりそうなことが見つからない。一方，台形になる場合は数多く見つけることができる。しかし，そこで，P'Q'//S'R'となるような点Eの集合とP'S'//Q'R'となるような点Eの場所を調べることで，それらの共通部分としてP'Q'R'S'が平行四辺形になる位置を確定することにした。しかし，台形の場合であっても，PS//QRとなるような点Eの位置をプロットしてみると，次のようになり，直線になるとは思えない。



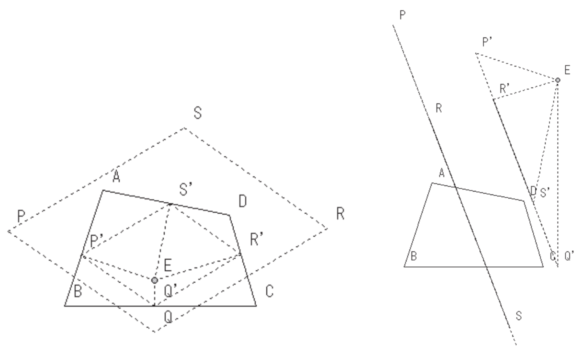
図－29

そこで，GC/Winでの条件を満たす点の集合の概要を知るための機能を使って一般のABCDの場合に関して，P'Q'//S'R'となるような点Eの場所を調べてみると，次のような図を得ることができた。この画面は，P'Q'とS'R'のなす角が５°未満となる領域を表示しているので，平行になるのは，領域の中央あたりを描く円になっていると推測される。



図－30

この図だけからは，どのような円になるのかはわかりにくいけれども，もしそれぞれの平行性を成り立たせる点Eの位置がそれぞれ円になるならば，その交点となる２ケ所において，２組の直線が平行になるはずだ。実際に確かめてみると，一方では平行四辺形，もう一方では一直線になっていた。



図－31

このことから，次のことが推測された。

⑴　平行四辺形でないABCDに関して，PS//QRとなるようなEの位置の集合は円になる。

上記の命題が証明されれば，さらに次の命題が成り立つ。

⑵　平行四辺形でないABCDに関して，PS//QRとなるEの位置の集合の円とPQ//SRとなるEの位置の集合の円の交点は二つあるが，その片方においてPQRSは平行四辺形になり，もう片方において，PQRSは一直線になる。

⑶　任意の四角形ABCDに対して，PQRSが平行四辺形になる点Eの位置は一つだけ存在する。

⑷　平行四辺形でないABCDに関して，４つの辺に下ろした垂線の足が一直線になるような点Eの位置は一つだけ存在する。

なお，⑵における二つの円は，ABCDが平行四辺形の場合には，その円の特別な場合（半径が無限大）として，二つの対角線が現れていると考えることができる。そのため，PQRSが平行四辺形になる場合はABCDが平行四辺形の場合についてもただ一つ存在するのに対して，⑷はABCDが平行四辺形の場合には成り立たない。

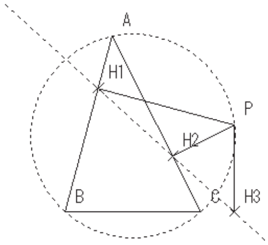
３．７　PQ//SRとなるような点Eの位置が円をなすことの証明

実測の値から，結果をほぼ予想することは可能だったが，論理的な証明がなかなか見つからなかった。しかし，同僚の石戸谷氏に相談してみたところ，翌日には末尾に掲載した証明を教えていただいた。これによって，これらの問題は一通りの解決を得るに至った。

３．８　PQRSが平行四辺形となる点Eの作図方法の発見

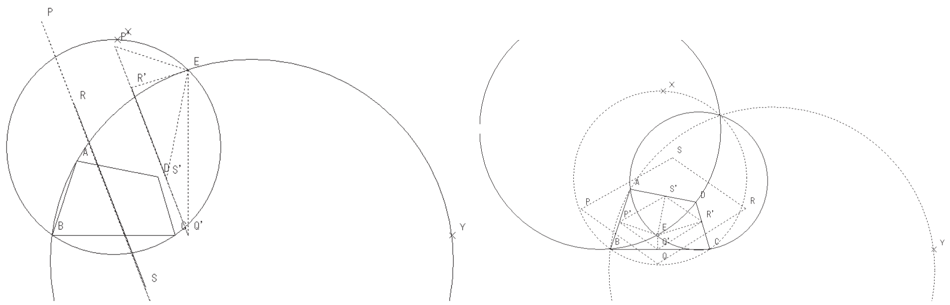
図－31右の図の意味を考えてみると，P'Q'R'S'が一直線に並んでいる。つまり，四角形ABCDの４つの辺に対して垂線の足を下ろしたとき，その４つの垂線の足が一直線に並ぶような点Eのとり方は一通りであり，それはこれら２つの円の交点として実現されることを意味している。シムソ

ンの定理「△ABCの外接円上の点Pから３辺にそれぞれ垂線の足を下ろすとその３点は一直線（シムソン線）にある」ことを四角形に拡張した命題になっていると考えることもできる。



図－32

一方，このことは，シムソンの定理を応用することによって，点Eの位置を構成することができることを意味している。つまり，AB，CDの交点をXとすれば，XBCの外接円上からAB，BC，CDに垂線の足を下ろすと１直線上に並び，AD，BCの交点をYとすれば，ABYの外接円上からAB，BC，DAに垂線の足を下ろすと１直線に並ぶのだから，この二つの外接円の交点の中のBでない点にEをおけば，４直線への垂線の足が１直線に並ぶ。図－30で示唆される２つの円はこの点Eを通るだけでなく，それぞれA，CとB，Dを通ることを考えると，△EACと△EBDの外接円の交点として，PQRSを平行四辺形とするような点Eの位置を構成することができる。



図－33

４．考察

４．１　多様性の源泉

数学の問題は，問題１－１や問題２－１のように，閉じた形にまとめられているのが普通である。そのような問題ではたとえGCを使っても，「どんな場合でも成り立つ」ことを確認するくらいしか意味がない。そのため，多様な探究のための出発点としては，「さまざまな場合」がありうるように，問題の条件を緩和し，問題１－２や問題２－３のように，オープンな問題に変えることが考えられる。

今回の事例では，点の位置や四角形の形の多様性によって，さまざまな場合が生まれ，そして

分類等が行える事例になった。

また，作図ツールは発見の場面で使われることが多いが，今回の事例の中でもその使い方には多様性がある。たとえば，特定の形をつくり，それを観察する，条件を満たす場合をプロットする，GC/Winの機能を使って自動化し，条件を満たす点の集合を調べる，が挙げてあるが，それ以外にも，候補となる図形を作図し，その上に点の動きを制約したときの変化の様子を調べる，などの方法もあるし，GCを使わずにフリーハンドで図を作図して観察する方法もある。

もちろん，証明に関しても，多様な証明がありうる場合もある。

さらに，今回の事例の中では，３．４，３．５などで扱ったような，観察結果からなにを見いだし，なにを証明する価値があると思うのか等に対する判断や，次にどういう考えたい問題の多様性などもある。それらに関しては，本来，さまざまな生徒の反応を蓄積していく中から，教材研究がより深くなっていくといえる。

４．２　図形の種類に対応した証明で使われる性質の多様性

今回扱った事例の中で特徴的なのは，たとえば，注目する形が正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，台形などに応じて，たとえば証明の中で三角形の合同を示す上で使う形が直角二等辺三角形，直角三角形，二等辺三角形などに変わっても証明の大筋は変わらないというような単純なことではなく，証明の中で使える性質が異なってくることがあることだ。

長谷川実践の問題の場合，AEDFが長方形になるときは∠EDF＝∠Rつまり∠BDC＝150°になるので，円周角がかかわってくるのは自然に感じたが，３．４で示した結果に関してはとても意外だった。PQRSが平行四辺形になるのを証明する上で，正方形・長方形の場合はABCDの対角線が直接関わるので，合同な直角（二等辺）三角形の組み合わせでPQRS（あるいはP'Q'R'S'）が構成されることに注目すればよいのに対して，ひし形や平行四辺形の場合にはそれが使えず，平行四辺形の対角線の性質を使う必要が出てくる。さらにEの位置を対角線の交点からずらして１組の平行性を示す上では円周角が必要になってくる。

普段の授業で問題を扱うときには，単元に合わせて使う性質を焦点化した形で問題を提示することが多いが，問題を少し特殊化したり一般化したりすることによって，異なる単元・学年で学ぶ図形の性質が必要になることも十分にありうることの配慮が必要である。

４．３　多様な探究の全体像を統合する見方の必要性とそこからの発見の可能性

多様な探究をしつつも，それぞれが単にばらばらのままというのは適切ではない。多様な探究のそれぞれが位置づけられ，全体像を見渡す上で，統合する見方が必要だ。今回の事例の場合には，長谷川実践の問題では，点Dの位置の分布とAEDFの包摂関係が図－６に統合されている。最初に図を動かしている中では一つしかないように思えた正方形が画面を拡大すると登場するのは，この見方をしない限り難しいだろう。

第二の事例，つまり２つの円と２つの直線の場合は，角の対応関係として統合することで，角のみの関係で記述される性質はABCDからPQRSに遺伝することがわかり，そのような性質を探すことによって，たとえば円に内接するという性質を発見できる可能性がある。また，個人的な

感想でいえば，２円と２直線に関しては，図－９のように，「交点を通る直線」であることが本質的であって，２点で交わる場合や１点で接する場合は定理化ができるものの，今回のように離れている場合に関係性が見いだせるとはまったく予想もしていなかった。そして，今回の結果から２円が２点で交わっている場合を見直すと，交点を直線が通る場合というのは，中央の四角形ABCDが線分になってしまっている特殊な場合に相等するとともに，２点で交わっていない場合にもその関係を一般化することができることがわかった。（この経験は先入観の存在は，適切な思考の対象の存在を隠してしまうことを改めて実感させてくれた。）

第三の事例は，当初３．４までを明らかにし，証明の違いを整理することで教材化を図ろうと思っていた事例である。（垂線の足でなく）線対称を使うことで，ABCDが長方形のときに注目すべき現象が生まれたり，PQRSの形に関する証明問題が複数生まれてくるところに焦点を当てようと思っていた。この範囲までにとどめようと思うと，ABCDが平行四辺形になる場合の証明を一つの統合として扱い，長方形等の場合を特殊な場合として扱う方法もあるだろう。しかし，今回の検討で明らかになったのは，違う展開も存在することだった。つまり，PQ//SRなどの平行性を生み出す点Eの位置の集合は円になることに注目すると，関連するさまざまなことがすっきりと整理できる。また，そのときに生じる２つの交点の一つがPQRSが平行四辺形になることを示すと同時に，もう一つの点は，（平行四辺形でない）四角形PQRSの４辺に下ろした垂線の足が一直線に並ぶような点Eの位置は１点のみであることを示している。これは，三角形の３辺に対して下ろした垂線の足が１直線に並ぶような点Pの位置は三角形の外接円になるという，シムソンの定理（図－32）を四角形に一般化した結果として理解することもできる。そして，そのことを手がかりにすると，当初とらえどころがないように思えた，PQ//SRになるためのEの軌跡としての円が構成でき，PQRSを平行四辺形とするための点Eの位置を作図することができた。このような思いがけない結果が次々と登場してくるのは，私にとってとても刺激的な経験であった。

４．４　通常の授業以外の学習のための教材化の可能性

このような多様な探究を整理することで，１時間あるいは２時間構成の授業のための教材化を行うことも可能である。たとえば，最初の事例は2012年２月に附属名古屋中学校で長谷川氏が，また附属岡崎中学校で小笠原氏が２時間構成の授業として実践した。しかし，授業の中ですべてを扱うことができるわけではないし，すべてを扱うことが適切というわけでもない。むしろ，豊富な素材の中からどう生かして授業化をするかというところに，多様な授業化の可能性があるというべきだろう。また，たとえば附属名古屋中学校でいえば，単元レポートというものがある。授業の中で共通の学びの対象とすべきことの他に，単元レポートなどで生徒が取り組みうるさまざまな課題を内包するものとして，これらの課題は位置づけることができる。さらに，授業という形態から離れて，たとえばネット上でいろいろな生徒が集まって一つの問題に関連していろいろな議論を行うような場で扱うための素材の開発等に生かす可能性もあるだろう。そのような場合には，特定の学年・単元に限定するよりも，さまざまな広がりを持つことの方が意味を持つともいえるだろう。

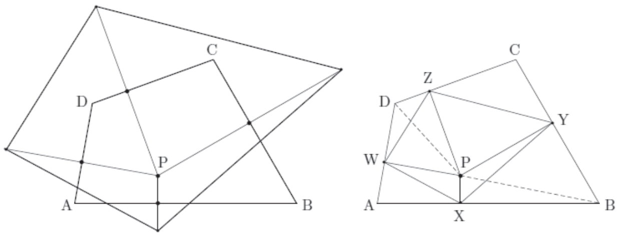
５．おわりに

本稿では３つの事例についての検討を行った。教材開発という意味では，このレベルにとどまるのではなく，具体的な生徒を想定した授業設計等のプロセスも含めるべきかもしれないが，それはまた別の機会にまとめていくことにしたい。

引用・参考文献

飯島康之（2011）iPadとGC/html５を使った授業による二つの提案－附属名古屋中学校での鈴木実践に関連して－，イプシロン，53，13-24

付記：石戸谷公直による証明（2012/10/13）



$$\alpha = \angle\mathrm{BAD},\ \beta = \angle\mathrm{CBA},\ \gamma = \angle\mathrm{DCB},\ \delta = \angle\mathrm{ADC};\qquad \theta = \angle\mathrm{PBX},\ \varphi = \angle\mathrm{WDP}$$

$$\angle\mathrm{BXY} = \angle\mathrm{BPY} = \angle R - \angle\mathrm{YBP} = \angle R - (\beta - \theta)$$
$$\angle\mathrm{ZWD} = \angle\mathrm{ZPD} = \angle R - \angle\mathrm{PDZ} = \angle R - (\delta - \varphi)$$
$$\angle\mathrm{BXY} + \angle(\overrightarrow{\mathrm{XY}}, \overrightarrow{\mathrm{WZ}}) + \angle\mathrm{ZWD} = \alpha$$

$$\begin{aligned}\angle(\overrightarrow{\mathrm{XY}}, \overrightarrow{\mathrm{WZ}}) &= \alpha - (\angle\mathrm{BXY} + \angle\mathrm{ZWD})\\ &= \alpha - (2\angle R + \theta + \varphi - \beta - \delta)\\ &= \alpha + \beta + \delta - 2\angle R - (\theta + \varphi)\\ &= 2\angle R - \gamma - (\theta + \varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BPD} &= \angle\mathrm{BPX} + \angle\mathrm{XPZ} + \angle\mathrm{ZPD}\\ &= \big(\angle R - (\beta - \theta)\big) + \big(2\angle R - \gamma\big) + \big(\angle R - (\delta - \varphi)\big)\\ &= 4\angle\mathrm{R} - \beta - \gamma - \delta + (\theta + \varphi)\\ &= \alpha + \Big(2\angle R - \gamma - \angle(\overrightarrow{\mathrm{XY}}, \overrightarrow{\mathrm{WZ}})\Big)\\ &= \alpha - \gamma - \angle(\overrightarrow{\mathrm{XY}}, \overrightarrow{\mathrm{WZ}}) + 2\angle R\end{aligned}$$

$$\angle(\overrightarrow{\mathrm{XY}}, \overrightarrow{\mathrm{WZ}}) = \lambda\ \ (\text{constant}) \iff \angle\mathrm{BPD} = \alpha - \gamma - \lambda + 2\angle R$$

△ BDP の外心を O とすると

$$\angle\mathrm{BOD} = 2(\alpha - \gamma - \lambda) + 4\angle R \quad \text{i.e.,}\ \angle\mathrm{DBO} = -\angle R - \alpha + \gamma + \lambda$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XY}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{WZ}} \iff \angle\mathrm{BPD} = \alpha - \gamma + 2\angle R$$

△ BDP の外心を O とすると

$$\angle\mathrm{BOD} = 2(\alpha - \gamma) + 4\angle R \quad \text{i.e.,}\ \angle\mathrm{DBO} = -\angle R - \alpha + \gamma$$