

表現力の育成に関わる3つの指導について

愛知教育大学 山田 篤 史

1. はじめに

平成20年の学習指導要領改訂以降、「表現力の育成」が算数・数学教育においても叫ばれるようになってきた。こうした動向は中央教育審議会答申における「言語活動の重視」の方針に沿ったものではあるが、本来、数学的な対象は何らかの表現を通じて教授・学習の文脈にのるものであるから、改めて表現に注目が集まることは好ましいことでもある。

こうした動向の中でも、小学校算数科の各学年の内容において、表現力育成に関わると思われる算数的活動が具体的に示されている点には特に注目しておきたい。というのも、そうした具体的な算数的活動が明示されてしまっているが故に、そもそも表現力をどのようなものと捉え、その育成にあたってどのような目標を設定すべきか、指導の類型にはどのようなものがあるか等々、十分な確認がなされないまま実践が先行してしまう懸念があるからである。確かに、形式陶治的な側面が強い「表現力の育成」といった目標が掲げられる場合、そうした傾向が強くなるのは致し方ない。しかし、他国の状況や歴史を教訓にして、それらを確認するような議論はあってもよいだろう。例えば、「表現」を明示的に組み込んだカリキュラムを参照することには意義があるだろう。また、1980年以降の「問題解決力」に関する議論では、問題解決をどのようなものと捉えるかに関する議論から始まり（例えば、Branca, 1980）、その指導の類型化が図られるまで（例えば、石田,1987; Schroeder & Lester, 1989）、それなりの期間を経た議論があったのである。

そこで本稿では、まず「表現」に関する目標上の規準を明示的に組み込んでいるカリキュラムであるNational Council of Teachers of Mathematics (NCTM) の*Principles and Standards for School Mathematics*（通称 *Standards 2000*）を取り上げ、そこでの「表現」の位置付けや規準を確認する。その上で、Standards 2000で「表現」と同種の位置付けにある「問題解決」に注目し、その指導の3類型に関する議論を頼りに、表現に関わる指導の類型とそこから得られる指導上の留意点について議論することを目標とする。

2. NCTMのStandards 2000における「表現」のスタンダードとその位置付け

米国には全国統一のカリキュラムは無いが、1980年代の改革ムーブメントの中、数学カリキュラムや指導改善に対する最小限の規準（スタンダード）[1]を要望する声は高かった。そうした要望に応える形で、米国の数学教育団体National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) は、1989年に『学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード (*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*)』（NCTM, 1989）を発刊した。後にNCTMは、

『数学指導のための専門家のスタンダード (Professional Standards for Teaching Mathematics) 』 (NCTM,1991) と『学校数学のための評価のスタンダード (Assessment Standards for School Mathematics) 』 (NCTM, 1995) を発刊したが、これらが所謂『スタンダード』3部作である。

この最初の『スタンダード』が発刊されたことのインパクトは大きかったが、特に我が国では、指導内容や目標の規準 (スタンダード) が設定される領域構成に注目が集まった。というのも、この『スタンダード』には、「整数の計算」「測定」「分数と小数」等々の数学的内容に基づく領域としてのスタンダード (学習指導要領におけるA～D領域に類するもの) の他に、「問題解決としての数学」「コミュニケーションとしての数学」「推論としての数学」「数学的なつながり」という、数学的内容領域を横断するような領域のスタンダードがあったのである。例えば、第5～8学年の「コミュニケーションとしての数学」のスタンダードの一部は次のようになっている。

第5から第8学年の数学の学習では、生徒が以下のことができるようなコミュニケーションの機会を含むべきである。

- ◆ 口頭、記述、具体的、絵、グラフ (図)、代数といった方法を使って、場面をモデル化する；
- ◆ 数学的なアイデアや場面について、自らの思考を反省し、明確化する；
- ◆ 定義の役割を含め、数学的アイデアについての共通理解を発展させる；

.....

(NCTM, 1989, p.78)

このように、非常に大まかな記述ではあるが、ある意味では算数的活動・数学的活動のような活動ベースの規準が示されており、数学的内容領域よりむしろこちらの方が強調されているという点で、当時の我が国にとってインパクトは大きかった。

こうした領域構成と記述の仕方は、2000年に発刊された *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM,2000)、通称 *Standards 2000* にも引き継がれている。*Standards 2000* では、スタンダードの構成が10領域に集約され、「数と演算」「代数」「幾何」「測定」「データ解析と確率」という数学的内容を基にしたものと、「問題解決」「推論と証明」「コミュニケーション」「つながり (connections)」「表現」という内容領域を横断するものになっている。そして、前者が「内容スタンダード」、後者が「プロセス・スタンダード」と呼ばれている。

本稿で注目したいのは、最初の『スタンダード』には無かった「表現」のスタンダードである。*Standards 2000* では、幼稚園前 (Pre-K) から第12学年までが、Pre-K～2, 3～5, 6～8, 9～12の4つの学年段階に分けられ、各学年段階でより詳細なスタンダードが示されているが、全ての元となる共通のスタンダードも示されている。全学年を貫くこの共通の「表現」のスタンダードは次の通りである。

教授プログラムは、幼稚園前から第12学年までを通じて、全ての生徒が次のことをできるようにすべきである。

- ・数学的アイデアを、組織化し、記録し、コミュニケーションするために、表現を創作し、使うこと；

- ・問題を解決するために、複数の数学的表現の中から、選択したり、応用したり、翻訳したりすること；
- ・物理的、社会的、数学的現象をモデル化し解釈するために、表現を使うこと。

(NCTM, 2000, p.67)

この「表現」のスタンダードは、ある意味では、表現が使われる文脈とそこでの表現の使われ方を指導に含めるべきこととして大まかに示しているに過ぎない。しかし、こうした規準が示されることで、各学年段階での内容領域を考慮しつつも、この規準に基づいて具体的な活動ベースの「表現」の指導を考案・評価できることには大きな意義がある。例えば、数学科の学習指導要領においても、数学的活動に関しては、数学がどのような文脈でどのような形で構成・使用されるかを大まかに示しているだけであり、そうした活動を通じて内容領域の指導を実施せよという勧告になっているはずである。*Standards 2000*のプロセス・カリキュラムは、ある意味ではそのような位置付けを持つものであろう[2]。

このように、*Standards 2000*のプロセス・カリキュラムは、我が国の算数的活動のように数学的内容と結びついた非常に具体的な活動ではなく、さりとて数学的活動のような1つの大きな活動ベースの規準でもなく、問題解決・推論と証明・コミュニケーション・つながり・表現といった数学が生み出され活用される特徴的な5つの活動領域に区切られて明示されている点の特徴である。もちろん、こうした「表現」だけに注目して指導の規準を指し示すことは、我が国でも中央教育審議会答申レベルではなされている。具体的には、平成20年1月の中央教育審議会・初等中等教育分科会・教育課程部会答申の中で、算数・数学科教育課程の改善の基本方針の3番目として、表現力の育成に関わって次のように述べられている。

数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。このため、数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする。特に、根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。

(中央教育審議会, 2008. 1. 17, pp. 83-84)

こうした記述を少し整理すれば、*Standards 2000*の表現のスタンダードに近いものになるのかもしれない。しかし、学習指導要領における指導内容の領域構成の構造上、この種の数学的内容が特定されない領域については、算数的活動や数学的活動に埋め込まれる他はない。そのため、「表現力の育成」を目指した指導を構成しようとする際にも、この答申の記述が参考にされなければ、具体的な指導の規準が確定されたり広く共有されないまま、あるいは、教科書等の教材が参考にされるのみで、実践が先行していくことになりかねないのだ。

3. 問題解決指導の3類型とその適用による表現指導の類型化

「表現力の育成」という目標は、「問題解決力の育成」と同じく形式陶冶的な目標に近く、多

分に「表現力」の捉え方の恣意性にも起因して、その指導の具体化を難しくする傾向を持つ。例えば、*Standards 2000*のプロセス・カリキュラムの5つ（問題解決・推論と証明・コミュニケーション・つながり・表現）を見てみると、「推論と証明」を「論理的思考」と、「つながり」を「関連付け」とでも読み替え、いずれにも「力」を付けてみれば、これらがいずれも数学的思考に必要な不可欠で転移可能性を持つ某かの心的能力（しかも、我々が指導可能だと考える能力）を仮定しているという点で共通点を持つことが分かるだろう。そして、いずれの指導に関しても、その実現と評価の難しさを直観することができよう。

しかし、1節で述べた通り、*Standards 2000*における「表現」と同じプロセス・カリキュラムに属する「問題解決」に関して言えば、我々は1980年以降の（あるいはそれより以前からの）指導の歴史を持っており、しかも、その指導の類型化についても参照可能な研究を持っているのであるから、積極的に参考にすべきだと思われる。例えば、その類型化の1つとして参照されるのが、石田（1987）の次の問題解決指導の3類型である。

(a) 方法型

特定の知識・技能・考え方の学習を指導目標の第一義としながらも、指導においては問題解決を学習の文脈・方法として利用して、正に問題を解決することを通して教授・学習を進行させようという指導。わが国の問題解決指導としては最も普及しており、一般的な教科書単位では、紙面自体が、例えば「問題理解・自力解決・練り上げ・まとめとふり返り」のような形で問題解決の過程を踏むような構成にもなっている。所謂、「問題解決による指導」や「問題解決を通じての指導（Teaching via Problem Solving）」（Schroeder & Lester, 1989）とも呼ばれる指導。

(b) 特設型 [3]

方法型が、所謂「問題解決力」の育成を二義的な目的としているのに対して、問題解決力の育成を第一義の目的として、それに相応しい教材や方法論をもって指導に当たろうという指導。典型的には、Schroeder & Lester（1989）の「問題解決についての指導（Teaching about Problem Solving）」であり、例えば、ポリアの4段階に触れることで問題解決がどのようなものであるかを指導したり、問題はどのようにして解決されるのかをストラテジー指導を通じて指導したりすることになるだろうが、複雑な問題やモデル化が伴うような問題を用いて様々な知識・技能を総動員して解決や意志決定に当たらせる指導など、様々な形態が考えられる。

(c) 設定型

問題設定（問題づくり）を通じて、すなわち、問題設定能力の育成を通じて問題解決力の育成を図ろうという指導。

問題解決の指導については様々な類型化がなされてきたが、こうした3類型は比較的理解しやすいものだろう。そして、この類型化は、そのままでは難しいにしても、例えば、次のようにして「表現の指導」の類型化にも利用できると思われる。以下では、各々の類型における指導上の

留意点にも触れながら、(a)～(c)との類比で表現力の育成に関わる指導を考えていくことにする。

(A) 表現による指導

(a)との類比で言えば、特定の数学的な知識・技能などの指導を第一義としながらも、何らかの表現を利用することを積極的に推奨しながら行う指導になろう。例えば、1年生の加減の指導では、おはじきのような具体物の表現が積極的に利用され、そうした特定の表現活動を通して演算の意味や計算の仕方などが指導されるのは、この典型であろう。

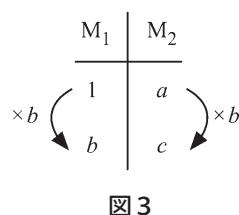
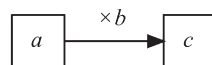
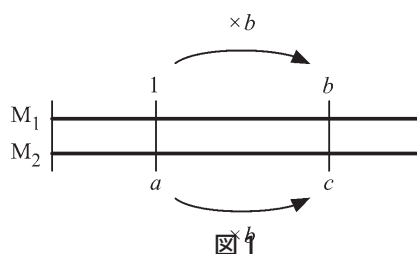
ただし、1節でも述べたように、数学的な対象は常に何らかの表現を通じて指導されるものであるから、単純な意味での表現による指導は、ある意味では自明のことである。むしろ、「方法型」の問題解決指導の在り方に照らしてこの指導を考える場合、その第一義的な目的は何か、という点が問われなければならない。つまり、特定の表現を用いる目的についての反省である。上記のように、加減の意味のような特定の数学的内容の理解を目的とし、特定の表現を手段・方法として用いて指導することについては、その目的が比較的明確であり、指導上の留意点は、その目的に適った表現の選択という問題に落ち着くところであろう。ところが、その目的が、例えば「問題解決力」のように（典型的にはプロセス・カリキュラムの項目にあるスタンダードのように）その捉え方が多義的で多くの文脈を伴うものである場合、ともすると指導が「動く標的」を狙うことになりかねないため、注意が必要になる。

(B) 表現についての指導

「表現についての指導」という用語を最も狭く字義通り解釈する場合、例えば、円グラフなどのような特定の表現を知り、その書き方を指導することなどがこの範疇の指導に入るかもしれない。しかし、より広い意味での表現力の育成を第一義の目的にして指導を組み立てようとする場合、(b)との類比で言えば、例えば、表現にはどのようなものがあり、特定の文脈でどのような役割を果たしうるか等々、表現そのものについて指導することがこれにあたるかもしれない。また、*Standards 2000*の表現のスタンダードを参考にすれば、「特定の表現が数学的アイデアの組織化・記録・伝達という役割をどのように担っているかを理解させること」や「問題解決や数学的モデル化に有用な表現選択や表現翻訳の方法を経験させること」などを第一義の目的として特設単元を組み立てるような指導があってもよいだろう。いずれにしても、表現そのものについて理解し使えるようになることを第一義の目的とした指導であれば、その方法は比較的ゆるやかに考えてもよいのだろう。

しかし、(A)と(B)とを対比させた場合、直ぐに思いつく疑問は、例えば、何らかの数学的概念を特定の表現によって指導しようとする場合、その特定の表現自体の意味や解釈・使用の仕方など、所謂表現そのものについての指導が伴うのではないか、というものである。これは真つ当な疑問であり、多分、特定の表現を使って行われる指導における表現を巡っての混乱の多くは、この疑問の周辺、例えば、どこかでその表現そのものについての指導を、単純なそのかき方の指導を超えた範囲で行わなければならないにもかかわらず、そうした指導を暗黙的なものにしたたり、特定の表現だけに固執したりすることで起こっているのではないかと予想される。

例えば、小数による乗除や割合の学習の場面を考えてみよう。割合や乗除が関わるような比例構造に基づく2量間の関係の表現としては、図1のような二重数直線に類するものが頻繁に使われる。しかし、そもそもこの図をどのように解釈し、どのように使ったらよいのか、児童は理解しているのだろうか。もちろん、そのかき方を明示的に指導しようとする教科書もあるが（例えば、清水・船越他（2011））、そうした指導を超えて、他の問題場面でもこの図は使えること、図2のような関係図やVergnaud（1983）が用いるような図（図3）でも構わないこと（あるいは翻訳可能であること）、加減で使われる部分-全体関係を表す図との比較等々、当該の図を巡っての指導が（もしかすると小数による乗除や割合に関する学習を一旦中断させてさえ）行われる必要があるかもしれないのだ。



(C) 表現を生み出す指導

(c)は、問題解決力育成のために、そもそも問題を作るところから指導を始めようというものだった。これとの類比で言えば、3番目の類型は「表現を生み出す指導」と言えるものになるかもしれない。

我が国の表現力の育成に関わる指導では、そこで取り上げられる表現にやや偏りがあると思われる。もちろん、自然言語としての言葉はそれに含まれるとして、他のものでは、式やグラフ等の規約的表現や比較的そのかき方の規約が緩やかな線分図など、かなり型にはまった表現に実践上の興味が集中しているように思われるのだ。

もちろん、例えば、問題解決という特定の文脈であれば、児童が素朴に描いた図の解決過程での変化（花形, 1990）やそうした図の利用に際する支援の在り方（廣井, 2002）に関する研究は存在するし、大きな関心を集めている領域でもある。しかし、児童・生徒にインフォーマルな表現を積極的に生成させることを通じて学習を進めようという指導は、実践研究レベルにおいても少ないはずであり、基本的には、そうした姿勢を持つ教師の実践の中に未だ埋め込まれている状態なのであろう。

一方、*Standards 2000*は、表現のスタンダードの第1項目に「数学的アイデアを、組織化し、記録し、コミュニケーションするために、表現を創作し...」とあるように、「表現を創作する」ということを、特に、幼稚園前から第2学年（Pre-K~2）の段階では強調している。また、先述の中教審答申にもあるように、問題解決・思考・コミュニケーションの道具としての役割を強調するので

あれば、ある意味では型にはまった表現が使えるばかりでなく、自らが表現を創り出し、クラスの中でそれらを洗練させていくような指導も必要であろう。そうした指導は、例えば、特設型の問題解決指導では積極的に行えそうでもあるが、実際には手薄になっているのが現状であろう。とすれば、まずは日常的な指導において、児童・生徒が素朴にどのような文脈でどのような表現を生み出すかを観察することが肝要だろうし、できれば積極的にそれらをクラスで共有・鑑賞し、よりよい表現を生み出していくためにどのような支援が考えられるかを検討することが重要であろう。

4. おわりに

本稿では、表現力の育成を目指した指導について検討すべく、まずは、NCTMの*Standards 2000*における「表現」のスタンダードを確認し、次に、同じくプロセス・スタンダードに位置付く「問題解決」の指導の3類型を利用して、表現に関わる指導の類型を考えつつ、そこでの指導上の留意点について議論した。本稿で検討した表現指導の3類型のうち「表現による指導」と「表現についての指導」は、表現の特性上、我が国の一般的な指導ではその区別が曖昧になりがちであろうが、その指導の目的上の差異を意識することの重要性は示唆された。また、「表現を生み出す指導」に関しては、言葉や規約的表現に注目が集まりがちな我が国の実践研究において、児童・生徒の幅広い文脈におけるインフォーマルな表現の実態やそうした表現を生み出すための支援に関する研究の必要性が示唆された。そうした分野での研究、特に、実際の指導の文脈で、児童・生徒が生み出したインフォーマルな表現を洗練させていくための支援までを射程に置いた研究が、今後の研究課題である。

注

[1] ここでの *Standards* は、「基準」と訳される方が一般的であるし、我が国で「目標に準拠した評価」についての議論が無かった初期3部作の『スタンダード』を指すときには「基準」を使う方が適切であろう。しかし、今日では、「目標に準拠した評価」に関する議論の中で「規準」という用語も使われるようになり、「規準」と「基準」の使い分けもなされるようになってきた。本稿では、「評定のための数値的基準」としての「基準」のような意味との混同を避け、また、NCTMのスタンダードの記述内容の実態をよりよく伝えるという目的のため、NCTMのスタンダードの記述内容や指導の目標規準を指すときには「規準」や「スタンダード」という用語を使うことにする。

[2] もちろん、*Standards 2000*においては、算数的活動のように、各学年段階でこの3つのスタンダードを基にしたより詳しい表現のスタンダードが示されているため、より指導を組み立てやすい形にはなっている。

[3] 我が国の学習指導要領は、数学的内容によって領域構成されているため、例えば「問題解決とはどのようなものであるか」などを指導しようとするれば、必然的に投げ入れ教材などを用

いて特設的に指導せざるを得ないため、こうした名称が用いられていると思われる。

引用・参考文献

- Branca, N.A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. In S.Krulik & R.R.Reys (eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp.3-8). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schroeder, T.L. & Lester, F.K., Jr. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R.Trafton & A.P.Shulte (eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp.31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R.Lesh & M.Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). NY: Academic Press.
- 石田忠男 (1987). 「問題解決指導のための教材開発」. 石田忠男, 川寄昭三 (編著), 『算数科問題解決指導の教材開発』 (pp.11-28). 東京: 明治図書.
- 清水静海・船越俊介他 (2011). 『わくわく算数5上』. 新興出版社啓林館.
- 中央教育審議会 (2008.1.17). 「幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について (答申)」. 文部科学省.
(http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/news/20080117.pdf)
- 花形恵美子 (1990). 「文章題の解決過程における絵の役割」. 『日本数学教育学会誌: 算数教育』, 72 (12), 28-36.
- 廣井弘敏 (2002). 「算数の問題解決における図による問題把握を促す教師の支援について」. 『上越数学教育研究』, 第17号, 113-124.

謝辞: 本研究は科学研究費補助金 (課題番号: 22530963) の助成を受けたものである。