イプシロン　2012.Vol.54，47 − 51

数学的問題解決授業における自力解決と練り上げについての一考察
−メタ認知と規範の観点から−

愛知教育大学　髙　井　吾　朗

１．はじめに

数学教育における数学的問題解決についての研究は数多く行われてきているが，まず挙げなければならないのはPolya（1945）の研究であろう。Polya（1945）の研究では問題解決の過程を「問題の理解」，「解決するための計画」，「解決の実行」，「解決過程の振り返り」（p.5）の４つに分け，それぞれの段階における解決者の内面や必要とされるストラテジーを細かく述べている。このような解決者の解決時における活動や思考を明らかにしようとする流れは，問題解決の研究における大きな流れであるといえよう（例えば，「信念システム」（Schoenfeld，1985）；「推進力としてのメタ認知」（Silver，1985）など）。

さて，解決者の内面に対する解明が進んでいくと，次は問題解決の指導方法や問題解決能力の育成に目が向けられることになる。その時に注目されたものが，解決者の内面を分析するための概念として用いられた「メタ認知」（Brown，1978；Flavell，1979）であり，基礎的な知識や技能を適用する力，または活動をコントロールするための力として注目されている。しかし，現在の数学的問題解決能力を育成するための環境は，授業という場であることに注目したい。言い換えれば，集団という教室によって構成される場ということである。メタ認知という概念は個人を対象としたものであり，個人の活動の変化を分析したり，個人対個人の相互作用における変化に焦点があてられたりするものである。故に，授業という集団によって構成される学習場をメタ認知のみで述べることは危うさを残すことになるであろう。

以上のような問題意識を元に本稿では，数学的問題解決授業における自力解決，練り上げという遂行段階の過程に焦点をあて考察を進めていく。そしてその目的は，自力解決と練り上げいう場をメタ認知と「規範」（Cobb & Yackel，1996）というメタ概念から見たとき，２つの過程がどのような意味をもつのかを明らかにすることである。

２．問題解決研究における集団的観点

これまでの問題解決研究では個人を対象とした概念が多いが，集団的観点を研究に取り入れる動きがあるのも確かである。まずはそのような研究を見ていこう。まず問題解決の成否に関係する行為や知識として，Schoenfeld（1985）は，「資源」，「発見」，「コントロール」，「信念システム」（p.15）という４つの個人の知識や行為を挙げている。しかし後に氏は，この４つに「実践」（Schoenfeld，1992，p.360）という項目を加えている。５つ目の項目は，個人を取り巻く環境や文化と関係しており，４つの個人的観点に対して，集団を意識した観点として挙げられ

るものである。また氏と同じように，数学の授業における活動を，共同による成果という社会学的観点と個人による成果という心理学的観点でみる方法がある（Cobb & Bauersfeld，1995）。

このように数学的問題解決に関する研究では，個人的観点だけでなく，集団的観点も取り入れられてきている。そしてその理由は，「生徒の数学的な目的は，その生徒が属する共同体の活動と密接に絡みあってつくられているため」（日野，2010，p.91）であり，教室という集団から生徒個人へと与える影響，及びその逆を無視することができないことが挙げられる。

３．数学的問題解決における規範と信念

この２つの観点に対して，Cobb & Yackel（1996）は，社会学的観点として「規範」，心理学的観点として「信念」を挙げている。そして信念と規範は互いに不可欠な存在であり，信念は個人，規範は集団によって構成される。

信念は，Schoenfeld（1985）の問題解決に関する４観点に見られるように，問題解決において重要な役割を果たすものであり，その役割は「資源，発見，及び，コントロールの中でその文脈を定める」（p.45）ことであり，「数学的世界観の１つ」（p.15）である。規範は数学実践において，「規範的目的」「議論の規範的基準」「ツールや記述されたものを伴う推論の規範的方法」（Cobb，2002，p.189）という役割がある。

これらをまとめると信念とは個人の活動を決定するものであり，規範とは授業の目的，議論の方法や内容を決めるという授業の方向性を決定するものであり，認知的活動の推進力であるメタ認知に近い概念であると捉えることができよう。

４．自力解決と練り上げという過程について

まず数学的問題解決授業は，「問題把握」，「自力解決」，「練り上げ」，「まとめ，及び応用問題の解決」に分けられ，これらの過程は一連の流れであり，特に解決する過程である「自力解決」から「練り上げ」への繋がりが重要である。

次に練り上げとは自力解決において用いられた解法を教室内で効率性，一般性などの観点から議論し，精練する場面である。そしてそれは自力解決の時点では，まだ個人にしか認められていなかった解法が集団によって認められるという解法に対する客観性が与えられるということであり，数学の本質と合致するものである。故に自力解決の過程は，個人が試行錯誤し自分なりの解法を導く場面であり，練り上げに向けて，様々な観点から自分の解法を分析する場面でもあると言えよう。そして，練り上げもまた様々な解法から教室における解法を創り上げる段階であるということから，遂行段階であると言えよう。

そして，自力解決と練り上げの関係については，自力解決があるからこそ練り上げにおいて多様な議論が生まれるという関係と，練り上げがあるからこそ自力解決では問題を解くというところで終わるのではなく，さらにその解法の意味を考え，他の方法を模索することへと繋がるという関係があることから，相互作用の関係にあると考えられる。

5．自力解決についての考察

では，メタ認知と規範から自力解決という過程を見ていこう。まずメタ認知は問題解決の「事前段階」，「遂行段階」，「事後段階」（三宮，2008，ｐ.10）において作用する。自力解決はその中では「遂行段階」にあてはまるが，「遂行段階では，遂行そのものに処理資源の多くが用いられるため，メタ認知的活動を同時に行なうことはそれほど容易ではない」（ｐ.10-11）という問題もある。これに対して，数学的問題解決の失敗のいくつかは解決中に振り返ることを怠ることに起因する（Polya，1945）ということから，自力解決中のメタ認知的活動を放棄することはできない。故に，メタ認知を働かせ難い状況でありながら，働かせなければ上手く解決することができない場面が自力解決であると言えよう。

これについては，メタ認知的活動のキーは自分の活動をモニターすることであり，例えば自分の行なっている認知的活動に対して「あれ？」と疑問が生じることでモニターが始まる（Flavell，1979）という特性を生かすべきであろう。つまり，自力解決中に自分の活動に疑念や疑問が浮ぶ状況を作ることが，メタ認知をはたらかせ，自力解決において問題解決を失敗させないために必要となってくるのである。

その方法としては，自分自身が解決中に常に自分の行動を監視するという，常時モニタリングすることが挙げられるが，三宮（2008）の指摘はその難しさを物語っている。それ故に，他者という存在が重要となると考えられる。例えば，隣の子どもが「ここが分からないから教えてよ」と聞いてきたとき，相手に説明するために自分の解法をじっくり見直すであろう。他にも，教師が「あれ，どうしてこの方法を使ったのかな？」という緩やかな否定が入ることでモニターすることもある。このようなメタ認知を支援するようなはたらきは「メタ認知的支援」（加藤，1999）と呼ばれ，様々な方法がこれまでにも考えられてきている（例えば，「ペアによる問題解決」（清水，2007））。

このような他者からの刺激は自力解決中に自然と発生すると考えられ，自力解決とは，問題解決という認知的活動を個人で行ないながら，モニターを行なうための様々な刺激を受け，遂行と反省をその都度繰り返し行なう場面であると言えよう。

また，他者からの刺激を受けると先に述べたが，例えば「自力解決においては，他の子と喋らずに自分だけで考える」という決まり，もしくは約束というものがあればそういう状況は生まれないであろう。このような学習における教室の決まり，約束というものは，「社会的規範」（Cobb & Yackel，1996）のひとつであり，授業の方向性を決定するものである。

それ故に社会的規範が教室においてどう形成されているかによって，自力解決という過程もその方向が決まっていくと考えられる。そして，規範の形成はその集団の参加者全ての議論によって起こることから，自力解決という場面では，それまでに形成された規範を変化することは難しいであろう。つまり自力解決において規範は，個人に対する活動に一方的に影響を与え続けるものであると捉えるべきであろう。

６．メタ認知的成分から見た練り上げの考察

では，次に練り上げについてメタ認知と規範の観点から見ていこう。まず信念とは，数学的世界観の１つであるが，その形成は個人の数学に関する経験の蓄積によって成されるものであり，主観的な概念となっている可能性が高いものである。言い換えれば，自分一人が認めた数学であり，外的な批判に対して脆弱な概念である。逆に強靭な信念とは，自分だけでなく他者にも認められ，外的な肯定を受けたものであろう。そして，そのためには自分の信念を他者へと伝え，様々な批判を受け，修正していく必要がある。故に，この過程が練り上げというものであり，練り上げとは互いの信念が衝突し合いながら，自らの信念を精練させていく場であると考えられる。

また，其々の信念の比較において，その判断基準が違っていては議論にならない。例えば，ある生徒が自分の解法の適応性を述べ，それに対して違う生徒が解法の効率性を述べたとしても，判断基準が違うために，解法の優劣を決めることはできないということである。

そのような判断基準を誤らないために必要になってくるものが，規範である。規範とはその議論の参加者によって認められたものであり，練り上げにおけるルールのひとつとなるものである。故に，信念の衝突は規範という枠の中で議論され，其々の信念に対する判断基準は規範に則るものとなるであろう。勿論，規範とはその集団の中ではじめからあるものではない。規範は集団が有するものであり，集団の経験の蓄積によって構成されていくものである。

７．結論

自力解決とは，単に練り上げに向けてそれぞれの解法を考え，解決するだけでなく，他者からメタ認知を作用するための刺激を受け，自らの認知的活動をコントロールしていく場面である。また，上記の活動は社会的規範によってその活動が制限されたり，逆に促進されたりするものである。それ故に自力解決において作用する社会的規範は自力解決における認知的活動，メタ認知的活動の両方において非常に影響が強いものであると言えよう。

そして練り上げとは，個人が有する信念（数学的世界観）との衝突が規範という枠の中で行われるものであり，その議論の蓄積が新たな規範を構成していくものである。そして，練り上げにおいて形成，もしくは修正された信念や規範は次への問題解決へと繋げる推進力として機能することから，練り上げは能動的に問題解決に取り組み続けるための過程として，非常に重要な過程であると言えよう。

このように自力解決，練り上げ共にメタ認知と規範の構成に非常に大きな影響を与えるものであり，逆にメタ認知と規範が構成されるからこそ，認知的目標を達成することができるものであると考えられる。そして，自力解決があるからこそ練り上げが成り立ち，練り上げがあるからこそ自力解決が成り立つとも考えることができよう。そしてこの見解は数学的問題解決授業における指導方法の構築を考える上で重要な点であると考え，今後の本研究における指導方法の構築に対して重要な意味を持つと考えている。

引用・参考文献

Brown, A. L. (1978). Knowing When, Where, and How to Remember: A Problem of Metacognition. In Glaser, R. (ed.), *Advances in instructional psychology vol.1* (pp.77-165), Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (2002). Reasoning with Tools and Inscriptions. *The Journal of the Learning Sciences, 11(2&3)*, 187-215.

Cobb, P., Bauersfeld, H. (1995). Introduction: The Coordination of Psychological and Sociological Perspective in Mathematics Education. In Cobb, P., Bauersfeld, H. (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Culture* (pp.1-16), Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31(3&4)*, 175-190.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring: A New Area of Cognitive-Developmental Inquiry. *American Psychologist*, 34, 906-911.

Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Math- ematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In Grouws. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-370), New York, NY. : Macmillan Publishing Company.

Silver, E. A. (1985). Research on Teaching Mathema- tical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Directions. In Silver (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, pp.247-266.

加藤久恵 (1999). 『数学的問題解決におけるメタ認知の機能とその育成に関する研究』，広島大学学位論文（教育学）.

三宮真智子 (2008). 「メタ認知研究の背景と意義」，三宮真智子編著『メタ認知　学習力を支える高次認知機能』，北大路書房，pp.1-17.

清水美憲(2007)『算数・数学教育における思考指導の方法』，東洋館出版社.

日野圭子 (2010). 「第５章　学習者の立場から見た数学の授業 －生徒の数学的意味構成における自力解決場面の役割－」，清水美憲編著『授業を科学する 数学の授業への新しいアプローチ』，学文社，pp.90-113.