

統計判断に及ぼすルール命題の 変換操作シミュレーションの効果

茨城大学教育学部 小口 祐一

1. 問題と目的

標本比率には、標本の大きさが大きくなるに従って、ほとんど確実に母比率に近づくという性質（以下、「大数の法則」という。）がある。わが国の学校数学では、中学校第2学年で大数の法則に基づいて確率の意味を学習する。しかし、大数の法則を学習した後の学習者でも、標本比率の変動を比較する問題に対して、このルールを適用した解決が困難であることが、先行研究において示されている（Kahneman & Tversky, 1972；Tversky & Kahneman, 1974；小口, 2010）。

たとえば、産科病院問題（1日に生まれる赤ちゃんの数が約45人の大きい病院と約15人の小さい病院において、1年間を通して男の子が生まれる割合が60%以上の日が多い病院の方を選択する問題）に対して、男の子が生まれる割合が60%以上の日はどちらの病院も同じであるという反応率が56%で最も高い結果がみられた。このように、標本の大きさを考慮せず、大数の法則を適用しない学習者の傾向は、「標本の大きさの無視」といわれている（Kahneman & Tversky, 1972）。それでは、標本比率の変動を比較する問題に対して、大数の法則を適用した解決が困難であることには、どのような要因が影響を与えているのであろうか。

この要因として「代表性ヒューリスティック」があげられる。代表性ヒューリスティックとは、典型的な性質の類似性に基づいて判断する方略のことである（Kahneman & Tversky, 1972）。産科病院問題に関していえば、母比率と標本比率の期待値が等しいという類似性に基づいて、標本比率はいつでも母比率と同じ値であると判断する方略のことである。

一方、標本比率が極端に偏る状況では、大数の法則を適用して解決し得ることを示した研究がある。Bar-Hillel (1982) は、産科病院問題の設定を変え、4つの群を設定して調査した。生まれる赤ちゃんが男の子である割合について、60%以上とした第1群（対照群）、70%以上とした第2群、80%以上とした第3群、100%とした第4群である。各群の正答率は、それぞれ順に20%、43%、42%、54%であった。各群の結果を比較すると、第1群（対照群）の正答率よりも、第4群の正答率の方が有意に高かった。この結果から、学習者は、標本比率が極端に偏る状況で標本の大きさを考慮しやすくなる可能性が高いことが示唆された。しかし、100%のように標本比率が極端に偏る状況で適切判断ができるとしても、60%以上のような状況で誤判断がみられるのはなぜだろうか。そこで考えられることは、学習者のルール命題の操作水準が低いために、大数の法則を適用した判断ができない可能性である（工藤, 2005）。

大数の法則は、「標本の大きさが大きくなるに従って、標本比率はほとんど確実に母比率に近づく。」というルール命題（原命題）として示される。100%のように標本比率が極端に偏る状況

では、大数の法則の原命題を適用した適切判断がなされる。しかし、60%以上のような状況で大数の法則を適用するためには、次のような操作が必要になると想定される。まず、原命題を「標本の大きさが大きいほど、標本比率の変動は小さい。」というルール命題（手がかり化命題）に変換操作する。このような操作は手がかり化操作と呼ばれる（工藤，2010）。この手がかり化命題により、標本の大きさを手がかりにして、標本比率の変動幅を予測することができる。次に、この手がかり化命題を「標本の大きさが小さいほど、標本比率の変動は大きい。」というルール命題（手がかり化命題の裏命題）に変換操作する。このような操作は裏操作と呼ばれる（工藤，2010）。標本比率が極端に偏る状況でなくても、この裏命題を手がかりとして適切判断がなされることが期待される。そこで、本研究では、コンピュータシミュレーションによる実験を行わせ、学習者に大数の法則の手がかり化命題と、その裏命題の正しさを確認させることにより、学習者が大数の法則を適用した判断をするようになるかを調査する。まず、コイン投げをする人数を10人、20人、40人、100人と変化させ、オモテが出る割合をシミュレーションさせる。次に、その割合が60%以上および70%以上になった回数を比較させ、学習者に大数の法則の手がかり化命題と、その裏命題の正しさを確認させる。このように、ルール命題の変換操作について、その正しさを確認させるシミュレーションのことを、本研究では変換操作シミュレーションと呼ぶことにする。

本研究の目的は、「変換操作シミュレーションは、標本比率の変動を比較する問題に対して、学習者の判断にどのような効果を及ぼすか。」について、大学生を対象に検討することである。変換操作シミュレーションの効果を検討するために、本研究では、次の仮説を設定した。

仮説 変換操作シミュレーションによって、学習者は大数の法則の手がかり化命題と、その裏命題の正しさを確認できる。その結果、標本比率の変動を比較する問題に対して、学習者は大数の法則を適用した判断をするようになるだろう。

2. 方法

2. 1 対象者

国立大学教育学部の「コンピュータ概論」を受講した学生51名が対象者となった。

2. 2 手続き

2011年10月17日に事前調査、2011年12月12日に変換操作シミュレーションによる学習セッション（約60分）と直後調査（25分）を実施した。その約1か月後の2012年1月23日に事後調査を実施した。

2. 3 問題構成

2. 3. 1 事前調査

出席者は47名であり、回答時間65分で実施した。問題冊子はA4判の用紙6枚を用いて、表紙と13問の問題で構成されていた。問1、問2、問6、問7と問12の計5問が、標本比率の変動を比較する問題であった。問1、問2と問12をFIGURE 1に、問6と問7をFIGURE 2に示す。これら5問の概要は以下の通りである。

問1. あるキャンディー工場では、茶色のキャンディーを50%、他の色のキャンディーを50%生産している。サムは、キャンディーがたくさん入っている大きなサイズのバッグを買おうと計画している。ケリーは、キャンディーが少しだけ入っている小さなサイズのバッグを買おうと計画している。茶色のキャンディーが70%以上入っている可能性は、どちらのバッグの方が高いでしょうか。そう判断した理由も述べなさい。

- ①サム。なぜなら、大きなサイズのバッグには、より多くの茶色のキャンディーを入れることができるから。
- ②サム。なぜなら、大きなサイズのバッグに入っている茶色のキャンディーの割合は散らばりが大きいから。
- ③ケリー。なぜなら、小さなサイズのバッグに入っている茶色のキャンディーの割合は散らばりが大きいから。
- ④ケリー。なぜなら、小さなサイズのバッグには、大抵50%以上の茶色のキャンディーが入るだろうから。
- ⑤どちらも同じ可能性。なぜなら、それらはどちらも無作為抽出された標本だから。

問2. A市には2つの病院がある。大きい病院には毎日約45人の赤ちゃんが生まれ、小さい病院には毎日約15人の赤ちゃんが生まれる。もちろん、1年間を通してみれば約50%の赤ちゃんが男の子であるが、日によっては男の子の割合が60%以上の日もある。さて、1年間を通してそのような日が多いのは、どちらの病院の方だろうか。そう判断した理由も述べなさい。

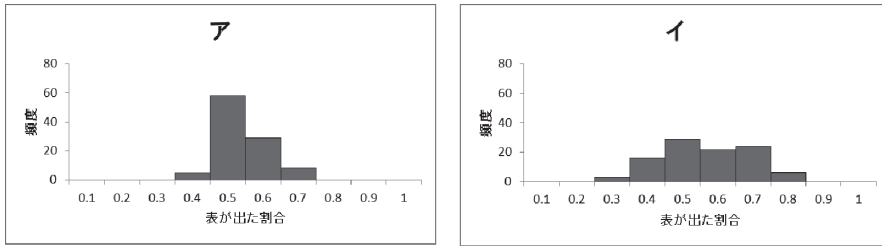
- ①大きい方の病院。
- ②小さい方の病院。
- ③どちらも同じ。

問12. AグループとBグループという2つのグループがあります。Aグループは5人と少ない人数ですが、Bグループは100人と多い人数です。AグループとBグループの全員が1回ずつコインを投げた結果を記録し、オモテが出た割合を求める実験をします。コインを繰り返し何回も投げたとき、全体を通してみると、オモテが出る割合は約50%になりますが、実験によってはオモテが出る割合が80%以上になる場合もあります。さて、オモテが出る割合が80%以上になる実験が多いのは、グループAとグループBのうち、どちらのグループでしょうか。そう判断した理由も述べなさい。

- ①Aグループ。なぜなら、5人中4人以上にオモテが出ればよいから。
- ②Bグループ。なぜなら、100人中80人以上にオモテが出ればよいから。
- ③どちらも同じ。

FIGURE 1 事前調査問1, 問2, 問12

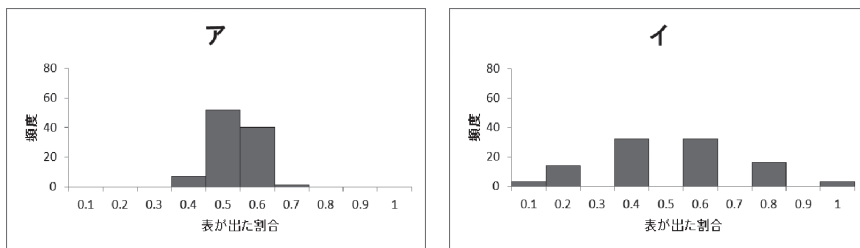
問6. A組には18人, B組には42人の生徒がいます。全員が1回ずつコインを投げた結果を記録し, A組とB組でそれぞれオモテが出た割合を求める実験をします。次のアとイのグラフは, この実験を100回繰り返したとき, A組でオモテが出た割合の分布とB組でオモテが出た割合の分布を表しています。アとイのグラフのうち, A組でオモテが出た割合の分布を表しているのは, どちらのグラフでしょうか。そう判断した理由も述べなさい。



(たとえば0.5の階級は, 0.5以上0.6未満である。)

- ①アのグラフ。
- ②イのグラフ。
- ③どちらともいえない。

問7. A組には5人, B組には100人の生徒がいます。全員が1回ずつコインを投げた結果を記録し, A組とB組でそれぞれオモテが出た割合を求める実験をします。次のアとイのグラフは, この実験を100回繰り返したとき, A組でオモテが出た割合の分布とB組でオモテが出た割合の分布を表しています。アとイのグラフのうち, A組でオモテが出た割合の分布を表しているのは, どちらのグラフでしょうか。そう判断した理由も述べなさい。



(たとえば0.5の階級は, 0.5以上0.6未満である。)

- ①アのグラフ。
- ②イのグラフ。
- ③どちらともいえない。

FIGURE 2 事前調査問6, 問7

問1 (キャンディー問題・大小・70%以上) : 茶色のキャンディーを50%生産している工場があり、大きなサイズのバッグと小さなサイズのバッグのどちらかを買うという状況において、茶色のキャンディーが70%以上入っている可能性はどちらのバッグの方が高いかを5択で問う問題であった。

問2 (産科病院問題・15対45・60%以上) : 毎日45人の赤ちゃんが生まれる大きい病院と毎日15人の赤ちゃんが生まれる小さい病院があるという状況において、男の子が生まれる割合が60%以上の日はどちらの病院の方が多いかを3択で問う問題であった。

問12 (コイン投げ問題・5対100・80%以上) : Aグループ5人とBグループ100人に分かれ、全員が1回ずつコイン投げをしてグループごとにオモテが出た割合を求める試行を何回も繰り返すという状況において、オモテが出る割合が80%以上になる試行はどちらのグループの方が多いかを3択で問う問題であった(岡田, 2011)。

問6 (コイン投げ問題・18対42・グラフ表示) : A組18人とB組42人に分かれ、全員が1回ずつコイン投げをしてグループごとにオモテが出た割合を求める試行を100回繰り返すという状況において、分布が異なる2つのグラフを提示し、A組18人でオモテが出た割合の分布を表わしているのはどちらのグラフかを3択で問う問題であった。問7 (コイン投げ問題・5対100・グラフ表示) : A組5人とB組100人に分かれ、全員が1回ずつコイン投げをしてグループごとにオモテが出た割合を求める試行を100回繰り返すという状況において、分布が異なる2つのグラフを提示し、A組5人でオモテが出た割合の分布を表わしているのはどちらのグラフかを3択で問う問題であった。

2. 3. 2 学習セクション

出席者は46名であり、約60分で実施した。変換操作シミュレーションで利用した画面をFIGURE 3に示す。コイン投げをする人数を10人、20人、40人、100人と変化させ、オモテが出た割合を求める試行を20回繰り返すというコンピュータシミュレーションを行った。そして、シミュレーションの結果をヒストグラムで表示させ、コイン投げをする人数が少ないほど、オモテが出た割合が60%以上になった試行、および70%以上になった試行は多かったことを確認させた。その後、「標本の大きさが大きいほど、標本比率の散らばりは(小さい)」という命題と、「標本の大きさが小さいほど、標本比率の散らばりは(大きい)」という命題について、カッコ内にあてはまる言葉を記入させた。

2. 3. 3 直後調査

出席者は46名であり、学習セクション終了後、回答時間25分で実施した。問4をFIGURE 4に示す。問4は、母比率10%の状況で標本比率の変動を比較する問題であった。大数の法則は、母比率が50%以外の状況においても標本比率が母比率に近づくことを示すルールである。そのため、学習者が、大数の法則について、分布の中心を表す指標である母比率を正しく認識しているかどうかを問う問題として提示した。直後調査で用いた問題の概要は以下の通りである。

問1 (コイン投げ問題・5対100・80%以上) : 事前調査問12と同一である。問2 (産科病院問題・15対45・60%以上) : 事前調査問2と同一である。問3 (キャンディー問題・大小・70%以上) : 事前調査問1と同一である。

[コイン投げシミュレーション]

コインを1回ずつ投げて、オモテが出る割合を求める実験をします。たとえば、10人のグループで6人にオモテが出れば、その割合は60%になります。この実験を20回実施して、オモテが出る割合が60%以上、および70%以上になる回数を比較してみましょう。

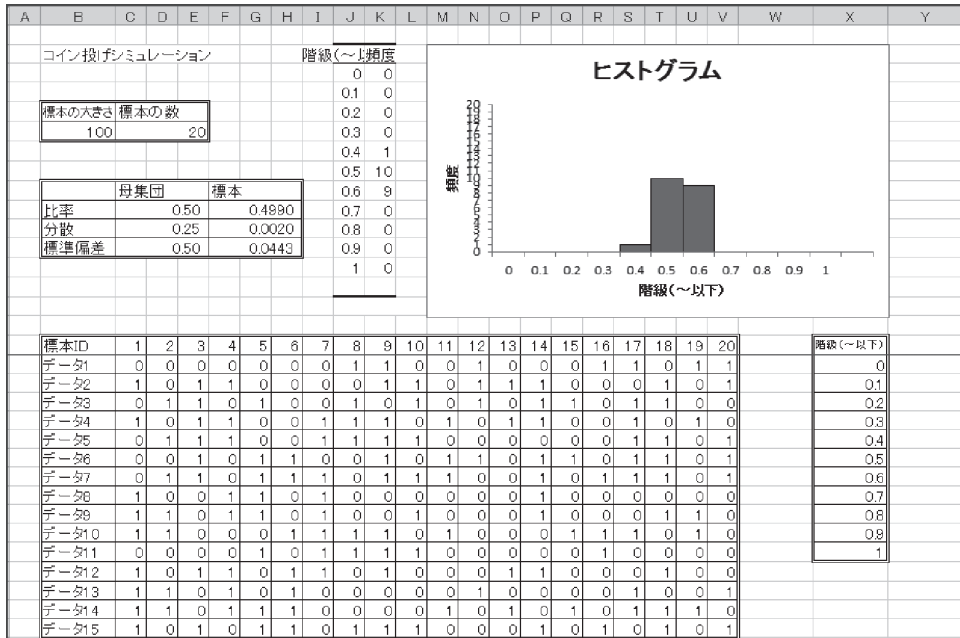


FIGURE 3 変換操作シミュレーション

問4：ある国の人の血液型は10%の割合でAB型である。A病院では、その国の10人を無作為抽出して血液型を調べた。一方、B病院では、その国の40人を無作為抽出して血液型を調べた。AB型の人が30%以上含まれている可能性は、どちらの病院の方が高いでしょうか。そう判断した理由も述べなさい。

- ①A病院。
- ②B病院。
- ③どちらも同じ。

FIGURE 4 直後調査問4

問4（血液型問題・10対40・母比率10%で30%以上）：A病院では10人，B病院では40人を無作為抽出して血液型を調べるといふ状況において，AB型の人の割合が30%以上になる可能性はどちらの病院の方が高いかを3択で問う問題であった。前提条件として，A病院とB病院がある国の人の血液型は10%の割合でAB型であることを提示してあった。問5（コイン投げ問題・18対42・グラフ表示）：事前調査問6と同一である。

2. 3. 4 事後調査

出席者は51名であり，回答時間40分で実施した。問1から問5までと問7の計6問が，標本比率の変動を比較する問題であった。事後調査で用いた問題の概要は以下の通りである。

問1（コイン投げ問題・5対100・80%以上）：事前調査問12，直後調査問1と同一である。問2（キャンディー問題・大小・70%以上）：事前調査問1，直後調査問3と同一である。問3（産科病院問題・15対45・60%以上）：事前調査問2，直後調査問2と同一である。問4（コイン投げ問題・18対42・グラフ表示）：事前調査問6，直後調査問5と同一である。問5（コイン投げ問題・5対100・グラフ表示）：事前調査問7と同一である。問7（血液型問題・10対40・母比率10%で30%以上）：直後調査問4と同一である。

3. 結果と考察

事前調査，学習セクションと直後調査，および事後調査のすべてに出席した41名を分析の対象者とした。

3. 1 事前調査の結果

各問題に対する判断理由について，対象者の記述を分類してコード化し，反応類型を作成した（TABLE1）。コード1～4は誤判断の理由とみなせる反応であり，コード5～8は適切判断の理由とみなせる反応である。問1（キャンディー問題・大小・70%以上）の正答者数は17名（41.5%），そのうち大数の法則（コード5）またはその裏命題（コード6）を判断理由とした対象者は10名（24.4%），問2（産科病院問題・15対45・60%以上）の正答者数は29名（70.7%），そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由とした対象者は9名（22.0%），問12（コイン投げ問題・5対100・80%以上）の正答者数は33名（80.5%），そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由とした対象者は9名（22.0%）であった。また，問6（コイン投げ問題・18対42・グラフ表示）の正答者数は21名（51.2%），そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由とした対象者は16名（39.0%），問7（コイン投げ問題・5対100・グラフ表示）の正答者数は25名（61.0%），そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由とした対象者は16名（39.0%）であった。

3. 2 事前調査からの変容

まず，同一問題に対する事前調査から直後調査への対象者の変容について考察する（FIGURE 5）。

事前調査問1（キャンディー問題・大小・70%以上）から直後調査問3への変容について，正答者数は17名（41.5%）から39名（95.1%）へ増加した。また，大数の法則（コード5）ま

たはその裏命題（コード6）を判断理由として正答した対象者は、10名（24.4%）から23名（56.1%）へ増加した。

TABLE 1 反応類型

反応類型	反 応 例	コード
無作為抽出の過大評価	どちらも無作為に選ばれているから。	1
代表性ヒューリスティック	茶色：他色のキャンディーが入る量は1：1になるから。	2
反復試行の過大評価	合計100回もやっているのだから条件は同じだから。	3
大数の法則の誤概念	調べる人数が多いほど散らばりは大きいから。	4
大数の法則	人数が多いほど真ん中に集まるから。	5
大数の法則の裏命題	人数が少ないほど割合の散らばりは大きいから。	6
大数の法則の頻度形式への操作	15人の60%は9で、45人の60%は27だから。	7
大数の法則の基準量への操作	1人あたりが占める割合は大きいから。	8
その他	偏りが出る。運である。確率が高いからである。	9
無答		0

事前調査問2（産科病院問題・15対45・60%以上）から直後調査問2への変容について、正答者数は29名（70.7%）から32名（78.0%）へ増加した。また、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は、9名（22.0%）から20名（48.8%）へ増加した。事前調査問12（コイン投げ問題・5対100・80%以上）から直後調査問1への変容について、正答者数は33名（80.5%）から39名（95.1%）へ増加した。また、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は、9名（22.0%）から28名（68.3%）へ増加した。事前調査問6（コイン投げ問題・18対42・グラフ表示）から直後調査問5への変容について、正答者数は21名（51.2%）から38名（92.7%）へ増加した。また、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は、16名（39.0%）から34名（82.9%）へ増加した。母比率を10%に変更した直後調査問4（血液型問題・10対40・母比率10%で30%以上）の正答者数は33名（80.5%）であった。また、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は20名（48.8%）であり、直後調査問2（産科病院問題・15対45・60%以上）と同程度であった。

次に、事後調査の各問題に対する正答者数と、その判断理由についてFIGURE6に示す。事後調査問2（キャンディー問題・大小・70%以上）の正答者数は38名（92.7%）であった。そのうち大数の法則（コード5）またはその裏命題（コード6）を判断理由として正答した対象者は29名（70.7%）であった。事後調査問3（産科病院問題・15対45・60%以上）の正答者数は36名（87.8%）であった。そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は32名（78.0%）であった。

(人)

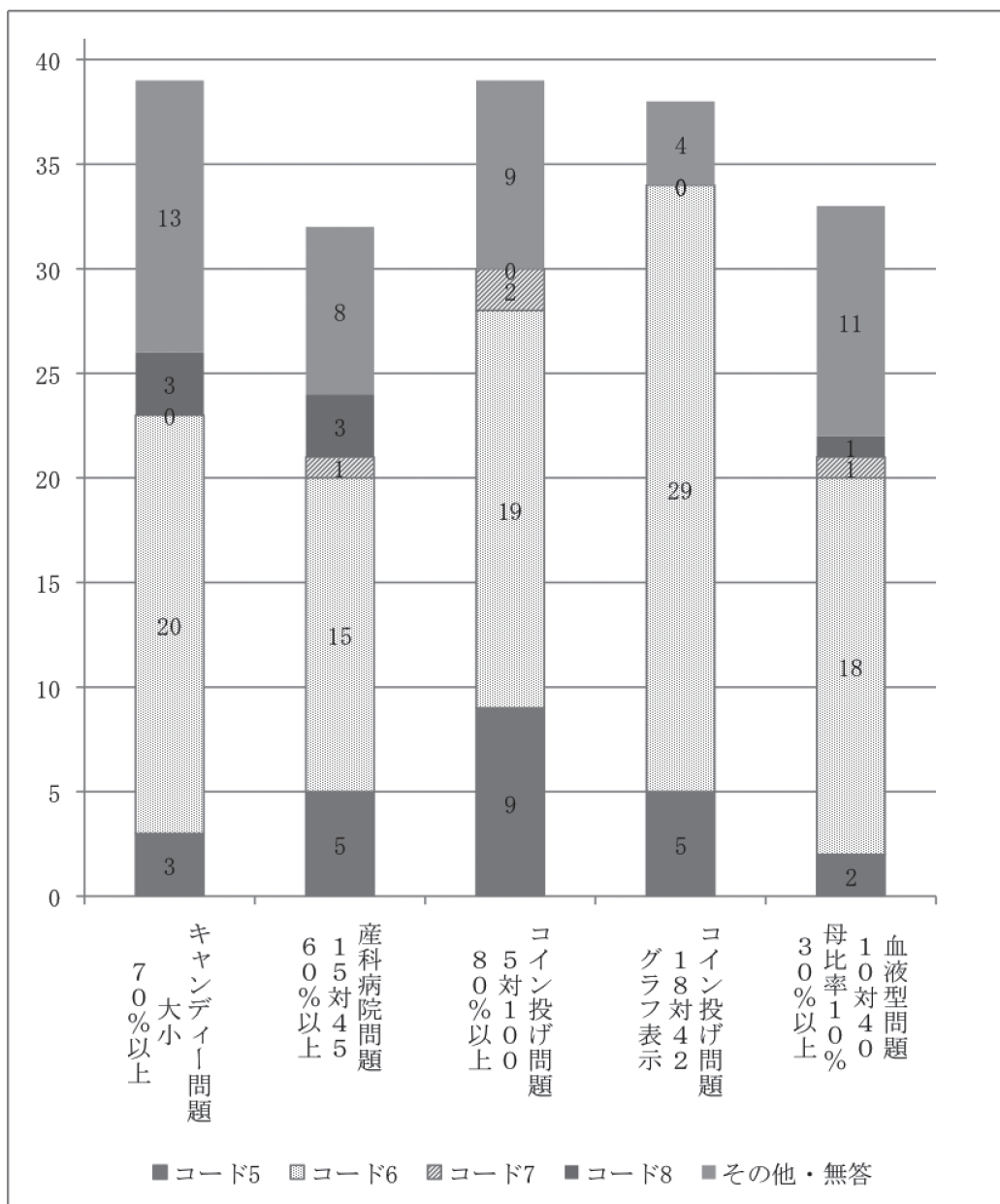


FIGURE 5 正答者の判断理由 (直後調査)

(人)

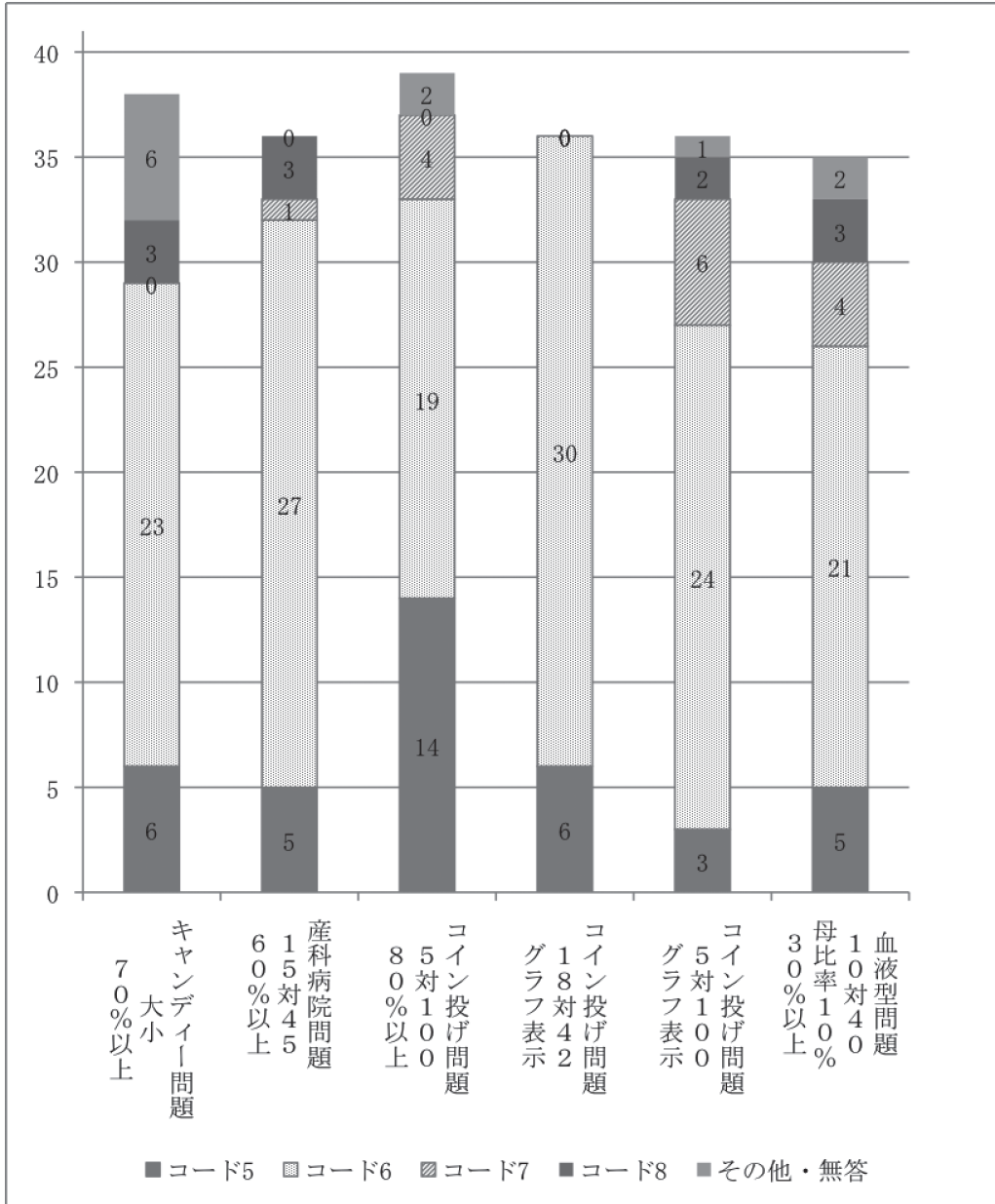


FIGURE 6 正答者の判断理由 (事後調査)

事後調査問1 (コイン投げ問題・5対100・80%以上)の正答者数は39名(95.1%)であった。そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は33名(80.5%)であった。事後調査問4 (コイン投げ問題・18対42・グラフ表示)の正答者数は36名(87.8%)であった。そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は36名(87.8%)であった。事後調査問5 (コイン投げ問題・5対100・グラフ表示)の正答者数は36名(87.8%)であった。そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は27名(65.9%)であった。事後調査問7 (血液型問題・10対40・母比率10%で30%以上)の正答者数は35名(85.4%)であった。そのうち大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は26名(63.4%)であった。

事前調査で大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は、最も多い問6 (コイン投げ問題・18対42・グラフ表示)でも4割弱であった。事前調査問6と同一問題である直後調査問5では、そのような対象者が8割強に増加した。それ以外の同一問題に対しても、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した対象者は大幅に増加した。各問題に対して、直後調査で対象者の正答率は上がっており、事後調査でも直後調査の正答率がほぼ維持されていた。以上から、変換操作シミュレーションによって、多くの学習者は、大数の法則を適用した判断をするようになると考えられる。

4. 討論

本研究で用いた変換操作シミュレーションは、学習者に大数の法則の手がかり化命題と、その裏命題の正しさを確認させるものであった。その結果、直後調査5問に対して、最も少ない問4 (血液型問題・10対40・母比率10%で30%以上)で約半数、最も多い問5 (コイン投げ問題・18対42・グラフ表示)で8割強の対象者は、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した。また、事後調査6問に対して、最も少ない問7 (血液型問題・10対40・母比率10%で30%以上)で6割強、最も多い問4 (コイン投げ問題・18対42・グラフ表示)で8割強の対象者は、大数の法則またはその裏命題を判断理由として正答した。この結果は、大数の法則の手がかり化命題と、その裏命題を直接教示した小口(2012)の研究の事後調査において、大数の法則またはその裏命題を判断理由とした正答率(キャンディー問題で17.1%、産科病院問題で32.9%)より、キャンディー問題で53.6ポイント、産科病院問題で45.1ポイント高いものであった。以上から、変換操作シミュレーションによって、大数の法則の手がかり化命題と、その裏命題の正しさを確認できれば、多くの学習者は、大数の法則を適用した判断をするようになると考えられ、本研究の仮説は支持されたといえる。

ただし、再検討を必要とすることとして、すべての同一問題に対して、直後調査よりも事後調査の方が、大数の法則またはその裏命題を判断理由とした正答率が高かったことが挙げられる。たとえば、産科病院問題に対して、大数の法則(コード5)またはその裏命題(コード6)を判断理由として正答した対象者は、直後調査で20名(48.8%)であったが、事後調査では32名

(78.0%)に増加した。その理由として、直後調査から事後調査までの期間に、大数の法則に関連した授業があったことが考えられる。しかし、「コンピュータ概論」では、学習セッション以外で大数の法則に関連した内容を扱うことはなかった。また、本研究の対象者は大学2年次の学生であり、統計学に関する科目は大学3年次の学生が対象であるため、大数の法則に関連した内容を学習した影響とは考えにくい。この点については、新たな実験を計画して検証していきたい。

付記

本研究は、科研費【22530990】の支援を受けている。

引用文献

- Bar-Hillel, M. (1982) Studies of representativeness. In Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Eds.), *Judgment under uncertainty : Heuristics and biases*, Cambridge University Press, 69-83.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (1972) Subjective probability : A judgment of representativeness, *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.
- 工藤与志文 (2005) 概念的知識の適用可能性に及ぼす知識操作水準の影響—平行四辺形求積公式の場合—, *教育心理学研究*, 53, 405-413. (Kudo, Y. (2005) Applicability of conceptual knowledge and operational levels of knowledge representation, *Japanese Journal of Educational Psychology*, 53, 405-413.)
- 工藤与志文 (2010) ルール学習と操作的思考—概観と展望—, *教授学習心理学研究*, 6, 29-41. (Kudo, Y. (2010) The Role of Operational Thinking in Rule Learning : Review and Perspective, *Japanese Journal of Psychology in Teaching and Learning*, 6, 29-41.)
- 小口祐一 (2010) 学習者の標本抽出についての誤った認識に先行課題の提示が及ぼす影響, *日本教授学習心理学会第6回年会予稿集*, 30-31.
- 小口祐一 (2012) 標本比率の分布の認識に及ぼす標本抽出の回数の影響, *統計教育実践研究*, 4, 12-17.
- 岡田いずみ (2011) 統計的確率の誤認識を修正するための試み, *日本教授学習心理学会第7回年会予稿集*, 40-41.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1974) Judgment under uncertainty : Heuristics and biases, *Science*, 185,