イプシロン　2012. Vol.54, 65 − 70

New dissections for $3^3+4^3+5^3=6^3$

扶桑町立柏森小学校　青 木 直 人
愛知教育大学数学教育講座　小 谷 健 司

この論文は, 青木の卒業論文 [1] に小谷が手を加えたものです。非常に面白い内容なので, この雑誌に掲載していただくことにしました。

1　序

この論文では, 整数の等式 $3^3+4^3+5^3=6^3$ を 3 次元の立体で実現する方法を考察します。なぜ, この等式を扱うのかというと, この等式が斉 3 次の整数の等式で最も簡単だからです。斉 3 次の方程式で最も簡単な $x^3+y^3=z^3$ はフェルマーの大定理によって正の整数解をもちません。一方, $x^3+y^3+z^3=w^3$ は正の整数解を無限にもちます。この方程式の最も簡単な解が $3^3+4^3+5^3=6^3$ です。

等式 $3^3+4^3+5^3=6^3$ を 3 次元の立体で実現するとは, 6-立方体 (1 辺が 6 の立方体) をいくつかの部品に切断 (dissect) し, それを組み合わせて 3-, 4-, 5-立方体を作ることです。ただし, 各部品は 1-立方体を組み合わせてできるものに限ります。このとき, 部品の数は 8 個以上でなければなりません。なぜなら, 6-立方体の 8 個の角は異なる部品に切断されるからです。

青木はこの問題を解くために, $6^3=216$ 個の立方体の積木と約 1 か月半格闘しました。そして, 8 個の部品への切断方法を 3 つ発見しました。3-立方体を切断しない方法, 4-立方体を切断しない方法, 5-立方体を切断しない方法の 3 通りの切断方法が 1 つずつです。このうち, 5-立方体を切断しない方法は Emmet J. Duffy が発見したものと同じでした。青木が今回新発見した切断方法は第 3 節で, Duffy の切断方法は第 4 節で紹介します。

2　この問題の歴史

この問題は, イギリスの数学者 Herbert W. Richmond (1863–1948) が考えた問題のようです。1943 年, 彼は数学教育雑誌 Mathematical Gazette にこの問題を掲載し [8], 翌年, 同誌に 1 つの解答を掲載しました [9]。ただし, 彼の解答は 12 個の部品への切断であり, 深く考えられたものとはいえません。

1950 年, ケンブリッジ大学の学生で, 後に数学者となる John Leech が, 10 個の部品への切断方法を同大学の数学・パズル雑誌 Eureka に掲載しました [2]。翌年, 同大学の学生で, 後に数学者となる Roger Wheeler は 8 個の部品への切断方法を発見し, 同雑誌に掲載しました [3]。

彼の切断方法は, 3-立方体をそのままの形で残すものでした。その後, 何人かが Wheeler とは異なる切断方法を発見しています。J. H. Thewlis は, 4-立方体をそのままの形で残した 8 個の部品への切断方法を発見し, Thomas H. O'Beirne はそれを単純化しました。また, Emmet J. Duffy は, 5-立方体をそのままの形で残した 8 個の部品への切断方法を発見しました。

以上の「歴史」は, Martin Gardner の著書 [7] および Greg N. Frederickson [4] の著書から引用しました。実際には, Leech, Wheeler の発見は匿名で発表されているようです。また, Thewlis, O'Beirne, Duffy の発見については, Gardner の著書に記載されていますが, 発見者本人による報告等は見つかりません。特に, Thewlis の発見については, 名前が記載されているだけなので, どのような切断方法であったのか不明です。Wheeler, O'Beirne, Duffy の切断方法については, 第 4 節で紹介します。

3　青木の切断

下の図 1 は, 青木が発見した切断方法です。上から 6-立方体の切断方法と 5-, 3-立方体の組み立て方法を表しています。4-立方体は切断しないので, 省略してあります。6-立方体の Level 1〜6 は, 立方体を整数の高さで切ったときの 1〜6 段目の各部品の形を表しています。5-立方体と 3-立方体についても同様です。同じアルファベットが書かれているものは, 1 つのつながった部品であることを表しています。6-立方体内で灰色に塗られた部分は, 切断されていない 4-立方体を表しています。これ以降の図も同様です。

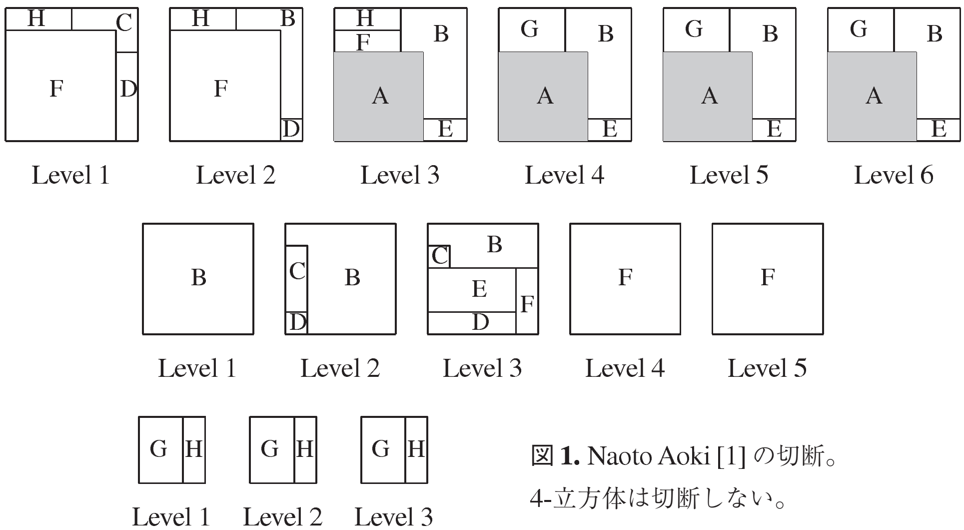
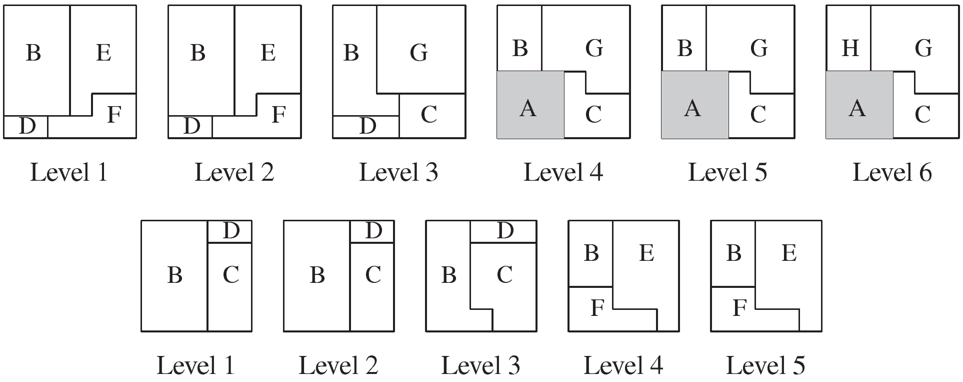


図 1. Naoto Aoki [1] の切断。
4-立方体は切断しない。

下の図 2 も, 青木が発見した切断方法です。上から 6-立方体の切断方法と 5-, 4-立方体の組み立て方法を表しています。3-立方体は切断しないので, 省略してあります。



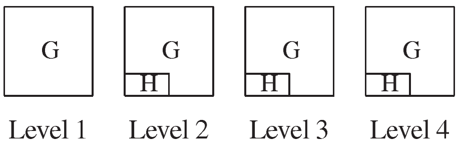


図 2. Naoto Aoki [1] の切断。
3-立方体は切断しない。

上の 2 つの切断方法がいかに複雑であるかを読者に理解していただくために, それぞれの部品の 1 つずつを図で示します。

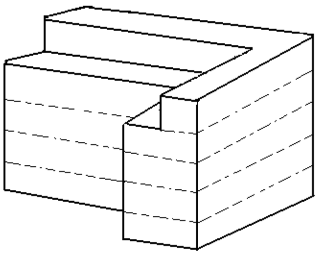


図 3. 図 1 の部品 B.

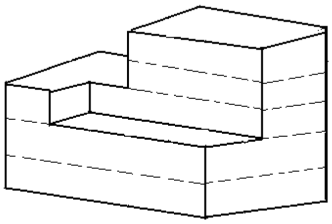


図 4. 図 2 の部品 C.

4　さまざまな切断

4.1　Richmond の切断

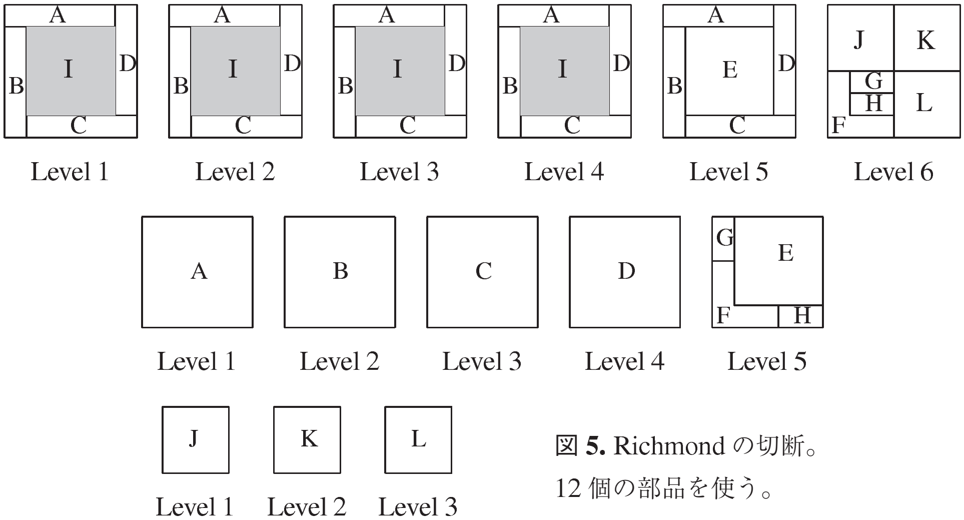


図 **5.** Richmond の切断。
12 個の部品を使う。

4.2　Wheeler の切断

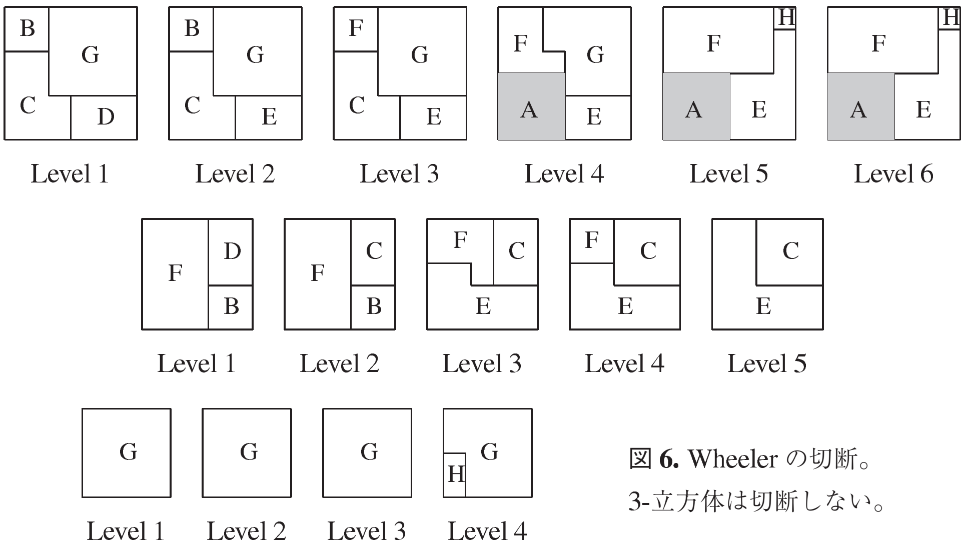
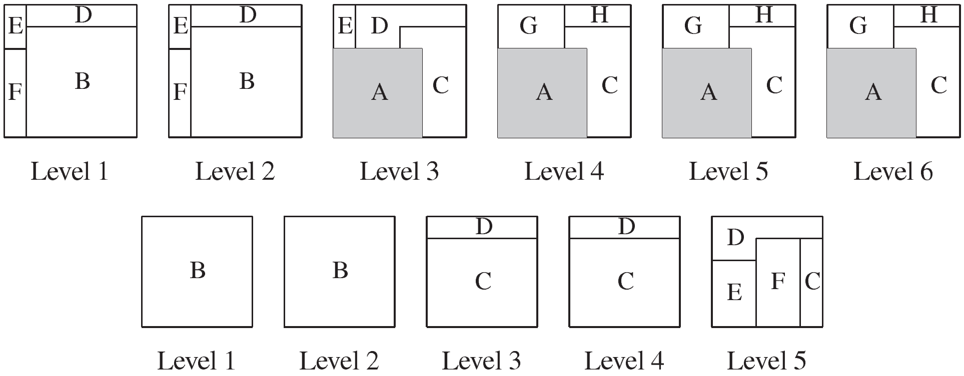


図 **6.** Wheeler の切断。
3-立方体は切断しない。

4.3　O’Beirne の切断



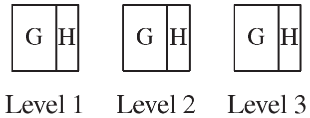
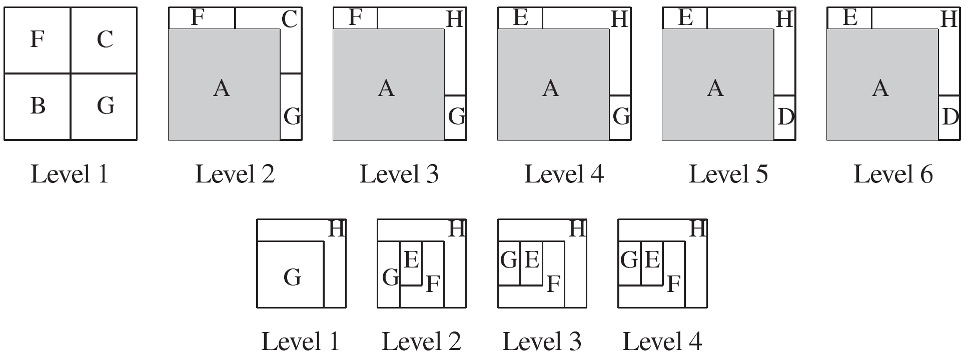


図 **7.** O’Beirne の切断。
4-立方体は切断しない。

4.4　Duffy の切断

青木が発見した切断方法のうち, 5-立方体を切断しない方法は Duffy が発見した切断方法と同じでした。6-立方体から 5-立方体を取り除くと, 残りの部分は厚さが 1 になってしまい, 切断の自由度がとても低くなります。これが, 青木の考えた方法が Duffy のものと同じになった理由だと思います。



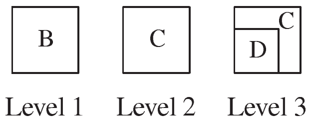


図 **8.** Duffy の切断。
5-立方体は切断しない。

5 おわりに

この論文では, 8 個の部品への切断を 5 つ掲載しました。しかし, このような切断は多数あるはずです。Frederickson の報告 [5] によると, オランダ・デルフト工科大学の学生であった Edo Timmermans は, コンピュータで 8 個の部品への切断方法を求めるプログラムを作り, 多数の切断方法を求めることに成功したとのことです。しかし, 何個あったか等の報告はされていないので, 詳細は不明です。

参考文献

[1] 青木 直人, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ を立体で表す, 愛知教育大学卒業論文, 2012 年 1 月 31 日.

[2] Anonymous, Two dissection problems, Eureka **12** (1950), 6.

[3] Anonymous, Solutions to problems, Eureka **13** (1951), 23.

[4] G. N. Frederickson, Dissections: Plane & Fancy, Cambridge University Press, 1997.

[5] ——, Updates to Chapter 21 of [4], updated November 14, 2009, available at `http://www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/Booknews/ch21.html`

[6] ——, Casting light on cube dissections, Math. Magazine **82** (2009), 323–331.

[7] M. Gardner, Knotted Donuts and Other Mathematical Entertainments, W. H. Freeman and Company, 1986.

[8] H. W. Richmond, Note 1672: A geometrical problem, Math. Gazette **27** (1943), 142.

[9] ——, Note 1704: Solution of a geometrical problem, Math. Gazette **28** (1944), 31–32.