

# 「線形に定義される」多角形と線形代数の応用

愛知教育大学数学教育講座 石戸谷 公 直

## 0. はじめに

線形代数の平面幾何への応用は、数学の教員を志望する学生にとってどのようにとらえられているであろうか。平面の1次変換を表す行列として2次の正方行列、2次曲線の係数行列を考える場合でもせいぜい3次の正方行列で十分、と思われがちであろう。また、ベクトル空間に関しても4次元以上は敬遠されがちで、拒否反応さえ示される。このような反応は、これまで十分な例を提示して来なかった我々授業を担当する側の姿勢の所産であろう。しかし平面幾何にとってでさえ、一般のサイズの行列式や一般の次元のベクトル空間の概念が非常に有用である。

表題にある「線形に定義」される性質は、いわゆる「アフィンの」性質とは異なる。例えば、「正多角形」はアフィンの概念ではないが、「線形に定義」できる。第2節参照。

「線形」の観点により、図形の見方をより豊かにすることができる。このことを例示するものとして、多角形の自由度、中点多角形の特徴、ナポレオンの定理とその一般化を考えてみたい。

## 1. 多角形の自由度

### (1) 連立1次方程式の解の自由度

「自由度」という言葉は「解の自由度」として線形代数の教科書にも見られる（例、参考文献[1]）。連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

の解は、存在するなら、適当な1次独立な数ベクトルの組  $\begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_{1\ell} \\ \vdots \\ d_{n\ell} \end{pmatrix}$  を用いて、

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + d_{11}t_1 + \cdots + d_{1\ell}t_\ell \\ \vdots \\ x_n = c_n + d_{n1}t_1 + \cdots + d_{n\ell}t_\ell \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + t_\ell \begin{pmatrix} d_{1\ell} \\ \vdots \\ d_{n\ell} \end{pmatrix}$$

という形に表される。ここで、 $t_1, \dots, t_\ell$  は任意の値をとり得るパラメータである。このときの  $\ell$ 、すなわち、一般解を表現する際に必要な独立なパラメータの個数、を**解の自由度**という。**解空間の次元**とも呼ばれる。

### (2) 三角形の自由度、四角形の自由度、...

ここでは、簡単のため「三角形」とは「3個の点の組」（順序も考慮に入れたもの、すなわち点列）を意味するものとする。したがって「つぶれた三角形」や「(1点に)縮んだ三角形」も容認することになる。それらを容認できない場合には、全体を考察した後にそれらを除けばよい、という立場である。すると、座標平面上に一つの三角形を指定することは、3個の頂点の座標すなわち6個の実数を指定することに他ならない。このことは、座標平面上の一般の三角形を表現するには6個の独立なパラメータが必要であるということの意味する。このことを、座標平面上の**三角形の自由度**は6である、と表現する。

同様にして、四角形の自由度は 8、五角形の自由度は 10、… となる。

### (3) 特定の多角形（正三角形、正方形、平行四辺形、等）の自由度

正三角形 ABC を指定するには、2 頂点 A, B を指定すればあとは頂点 C が直線 AB のどちら側にあるか（二つに一つ）を指定するだけでよい。このように、「自由に」値をとり得るパラメータの個数は 4 である。したがって、正三角形の自由度は 4 である。同様にして、一般に正  $n$  角形の自由度は 4 である。2 頂点を指定するごとに 2 通りの正  $n$  角形が考えられるが、これは「正  $n$  角形全体の成す空間」が 2 つの部分（連結成分）に分かれていると解釈される。各々の連結成分は 4 次元であり、自由度 4 ということには何の問題もない。

平行四辺形 ABCD を指定するには、3 頂点 A, B, C を指定すればよい。したがって、平行四辺形の自由度は 6 である。

## 2. 多角形に関する「線形」な性質

座標平面  $\mathbb{R}^2$  上の  $n$  点  $a_1, a_2, \dots, a_n$  のなす  $n$  角形  $a_1 a_2 \dots a_n$  を、点列  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{R}^{2n}$  と見なし、 $\mathbb{R}^{2n}$  における 線形な操作 で記述できる概念を、 $n$  角形に関する線形な概念と呼ぶことにする。

以下では、 $n$  角形の頂点の番号は  $\text{mod } n$  で解することとする。例.  $a_{n+1} = a_1$ ;  $a_0 = a_n$

**例 1.**  $n$  角形の「正則性」（正  $n$  角形であること）は線形な性質である。

[証]  $\mathbb{R}^2$  を複素数平面  $\mathbb{C}$  と見なすと、ベクトルは差で、角  $\theta = 2\pi/n$  だけの回転は複素数  $\omega = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta$  をかけることで表されるから、

$a_1 a_2 \dots a_n$  が（頂点の番号順に回る向きが）左回りの正  $n$  角形

$$\iff \omega(a_{i+1} - a_i) = a_{i+2} - a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\iff \omega a_i - (1 + \omega)a_{i+1} + a_{i+2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\iff R_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ここに } R_n = \begin{pmatrix} \omega & -1-\omega & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega & -1-\omega & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \omega & -1-\omega \\ -1-\omega & 1 & 0 & \cdots & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$  の元に  $\omega$  をかけることは  $\mathbb{R}^2$  の元に回転の行列をかけることに対応するから、上の条件は  $\mathbb{R}^{2n}$  における線形な操作で記述されている。「右回り」については  $\omega$  を  $\omega^{-1}$  に変えればよい。■

**例 2.** 四角形について、「平行四辺形であること」は線形な性質である。一般に、偶数角形について、「点対称の中心を持つこと」は線形な性質である。

[証]  $2m$  角形  $a_1 a_2 \dots a_{2m}$  が点対称の中心を持つ

$$\iff \overrightarrow{a_i a_{i+1}} = \overrightarrow{a_{m+i+1} a_{m+i}} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\iff -a_i + a_{i+1} + a_{m+i} - a_{m+i+1} = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

これは  $\mathbb{R}^{2m}$  における連立 1 次方程式である。■

### 3. 中点多角形

与えられた  $n$  角形に対し、辺の中点を順に結んで得られる  $n$  角形をもとの  $n$  角形の**中点  $n$  角形**、**中点図形**などと呼ぶことにする。3 角形の中点図形はもとの 3 角形に相似な 3 角形であり、4 角形の中点図形はつねに平行四辺形である。したがって、中点 3 角形の自由度、中点 4 角形の自由度はいずれも 6 である。5 角形、6 角形についてはどうであろう。

以下では、表記上の便宜のため、 $\mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{C}$  と見なす。

**定理.** 任意の 5 角形が何らかの 5 角形の中点図形として得られる。したがって、中点 5 角形の自由度は 10 である。

[証] 5 角形  $a_1 a_2 \cdots a_5$  から得られる中点 5 角形を  $b_1 b_2 \cdots b_5$  とする：

$$(*) \quad b_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

これより

$$a_i = b_i - b_{i+1} + b_{i+2} - b_{i+3} + b_{i+4} \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

したがって、任意に与えられた 5 角形を  $b_1 b_2 \cdots b_5$  に対し、上のように 5 点  $a_1, a_2, \dots, a_5$  を定めると、5 角形  $a_1 a_2 \cdots a_5$  から得られる中点図形が  $b_1 b_2 \cdots b_5$  となる。■

6 角形については事情が異なる。実は中点 6 角形の自由度は一般の 6 角形の自由度より低い。このことは、上の (\*) を行列で表現してみるとよく分かる。すなわち、

$$(**) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad M_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \text{ 次正方行列})$$

したがって、中点  $n$  角形全体の集合は、 $\mathbb{C}^n$  から  $\mathbb{C}^n$  への線形写像  $\mathbf{a} \mapsto M_n \mathbf{a}$  の像である。その  $\mathbb{C}$  上 の次元は行列  $M_n$  の階数そのものであり、 $\mathbb{R}$  上 の次元はそれの 2 倍である。

$$\text{補題.} \quad \text{rank}(M_n) = \begin{cases} n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n-1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

**系.** 中点  $n$  角形の自由度は、 $n$  が奇数ならば  $2n$  であり、 $n$  が偶数ならば  $2n-2$  である。

### 4. 一般化

前節の「中点」を一般化する。 $n$  角形の辺に頂点の番号順で向きを定め、その向きに従って各辺を  $(1-t):t$  の比に内分する点、を結んで得られる  $n$  角形を  $t$  **分点  $n$  角形**と呼ぶことにする。 $t$  分点  $n$  角形の自由度を調べるために、前出の行列  $M_n$  を次のように一般化する：

$$M_n(t) = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-t & t \\ t & 0 & \cdots & 0 & 1-t \end{pmatrix} \quad (n \text{ 次正方行列})$$

**補題** (1)  $\det(M_n(t)) = (1-t)^n - (-1)^n t^n$

(2)  $\det(M_n(t)) = 0 \iff t = \frac{1}{1-\alpha}$ , ここに  $\alpha$  は 1 の  $n$  乗根,  $\alpha \neq 1$

**系.** 実数  $t (\neq 1/2)$  については,  $t$  分点  $n$  角形の自由度は  $n$  の偶奇にかかわらず  $2n$  である。すなわち, 任意の  $n$  角形は何らかの  $n$  角形の  $t$  分点  $n$  角形として得られる。

上で,  $t$  が虚数の場合には  $t$  分点  $n$  角形の自由度は一般の  $n$  角形の自由度より低くなる, すなわち,  $t$  分点  $n$  角形として何らかの特殊な  $n$  角形が得られるはずである。 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  と見なしているから, 任意の  $t \in \mathbb{C}$  について写像  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{a} \mapsto M_n(t)\mathbf{a}$  が意味を持つ。

1 の  $n$  乗根  $\alpha \neq 1$  は  $\theta = 2\pi k/n$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) を用いて  $\alpha = \cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta$  と表されるから,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\cos \theta - \sqrt{-1} \sin \theta} = \frac{1-\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta}{(1-\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{1-\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta}{2-2\cos \theta} \\ &= \frac{1+\sqrt{-1} \cot(\theta/2)}{2} \end{aligned}$$

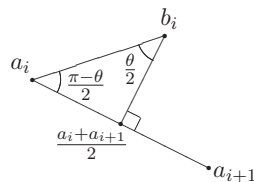
これらについて  $\text{rank}(M_n(t))$  を計算することにより, 次が得られる:

**定理.**  $n \geq 3$  とする。各  $t = \frac{1+\sqrt{-1} \cot(\pi k/n)}{2}$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) について,  $t$  分点  $n$  角形の自由度は  $2n-2$  である。

#### $t$ 分点 $n$ 角形の特徴

$n$  角形  $a_1 a_2 \cdots a_n$  の  $t$  分点  $n$  角形を  $b_1 b_2 \cdots b_n$  とおく, すなわち  $\mathbf{b} = M_n(t)\mathbf{a}$  とおくと,

$$b_i = (1-t)a_i + ta_{i+1} = \frac{a_{i+1} + a_i}{2} + \frac{\sqrt{-1} \cot(\theta/2)}{2}(a_{i+1} - a_i)$$



特に,

$k = 1$  のとき:  $b_i$  は辺  $a_i a_{i+1}$  上の正  $n$  角形 (ただし  $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$  の向きに見て左側) の中心;

$k = n-1$  のとき:  $b_i$  は辺  $a_i a_{i+1}$  上の正  $n$  角形 (ただし 右側) の中心;

$k = n/2$  ( $n$  は偶数) のとき:  $b_i$  は辺  $a_i a_{i+1}$  の中点である。

$n = 3$  および  $n = 4$  の場合に,  $t$  分点  $n$  角形の自由度が  $2n$  より小さい, ということは古くから知られているようである (参考文献 [2])。

**定理 [Napoleon の定理]** 三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB のそれぞれの上に正三角形を ABC の外側に作り, それぞれの重心を P, Q, R とすると, 三角形 PQR は正三角形である。

**定理 [Van Aubel の定理]** 四角形 ABCD の 4 辺 AB, BC, CD, DA のそれぞれの上に正方形を ABCD の外側に作り, それぞれの重心を P, Q, R, S とすると, PQRS の 2 つの対角線は等長で互いに直交する。

実際, 正三角形の自由度は 4 ( $= 6 - 2$ ) であり, また「対角線が等長かつ直交する四角形」の自由度は 6 ( $= 8 - 2$ ) である。

$1 \leq k \leq n-1$  について,  $\theta, \alpha, t$  を上のようにとり,  $\mathbf{b} = M_n(t)\mathbf{a}$  とおくと,

**補題.**  $\alpha^{n-1}b_1 + \alpha^{n-2}b_2 + \cdots + \alpha b_{n-1} + b_n = 0$

$$\begin{aligned}
 [\text{証}] \text{ 左辺} &= \alpha^{n-1}((1-t)a_1 + ta_2) + \alpha^{n-2}((1-t)a_2 + ta_3) + \cdots \\
 &\quad + \alpha((1-t)a_{n-1} + ta_n) + ((1-t)a_n + ta_1) \\
 &= \frac{1}{1-\alpha} \{ \alpha^{n-1}(-\alpha a_1 + a_2) + \alpha^{n-2}(-\alpha a_2 + a_3) + \cdots \\
 &\quad + \alpha(-\alpha a_{n-1} + a_n) + (-\alpha a_n + a_1) \} \quad \left( \because t = \frac{1}{1-\alpha} \right) \\
 &= \frac{1}{1-\alpha} (-\alpha^n a_1 + 0 + \cdots + 0 + a_1) = 0 \quad (\because \alpha^n = 1) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$n = 6 \text{ のとき} \quad c_{ij} = \frac{b_i + b_j}{2}; \quad c_{ijl} = \frac{b_i + b_j + b_l}{3} \text{ とおく。}$$

**定理.**  $n = 6$  のとき,

- (1)  $b_1 b_2 \cdots b_6$  が  $t_1$  分点 6 角形である  $\iff c_{16} - c_{34} = \alpha_1(c_{12} - c_{45})$
- (2)  $b_1 b_2 \cdots b_6$  が  $t_2$  分点 6 角形である  $\iff c_{36} - c_{14} = -\alpha_2(c_{25} - c_{14})$
- (3)  $b_1 b_2 \cdots b_6$  が  $t_3$  分点 6 角形である  $\iff c_{135} = c_{246}$
- (4)  $b_1 b_2 \cdots b_6$  が  $t_4$  分点 6 角形である  $\iff c_{36} - c_{14} = -\alpha_4(c_{25} - c_{14})$
- (5)  $b_1 b_2 \cdots b_6$  が  $t_5$  分点 6 角形である  $\iff c_{16} - c_{34} = \alpha_5(c_{12} - c_{45})$

[証]  $k = 1, 5$  のとき  $\alpha^2 = -1 + \alpha$ ,  $\alpha^3 = -1$ ,  $\alpha^4 = -\alpha$ ,  $\alpha^5 = 1 - \alpha$

$$(1 - \alpha)b_1 - \alpha b_2 - b_3 + (-1 + \alpha)b_4 + \alpha b_5 + b_6 = 0$$

$$(b_1 - b_3 - b_4 + b_6) + \alpha(-b_1 - b_2 + b_4 + b_5) = 0$$

$$(2c_{16} - 2c_{34}) + \alpha(-2c_{12} + 2c_{45}) = 0$$

$k = 2, 4$  のとき  $\alpha^2 = -1 - \alpha$ ,  $\alpha^3 = 1$ ,  $\alpha^4 = \alpha$ ,  $\alpha^5 = -1 - \alpha$

$$(-1 - \alpha)(b_1 + b_4) + \alpha(b_2 + b_5) + (b_3 + b_6) = 0$$

$$(-b_1 - b_4 + b_3 + b_6) + \alpha(-b_1 - b_4 + b_2 + b_5) = 0$$

$$(2c_{36} - 2c_{14}) + \alpha(-2c_{14} + 2c_{25}) = 0$$

$k = 3$  のとき  $\alpha = \alpha^3 = \alpha^5 = -1$ ,  $\alpha^2 = \alpha^4 = 1$

$$-(b_1 + b_3 + b_5) + (b_2 + b_4 + b_6) = 0$$

$$-3c_{135} + 3c_{246} = 0 \quad \blacksquare$$

$$n = 5 \text{ のとき} \quad \omega = \cos \frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{5}, \quad C = \omega + \frac{1}{\omega} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} (\in \mathbb{R}) \text{ とおくと,}$$

$$C^2 + C - 1 = 0, \quad \omega^2 = C\omega - 1$$

$$d_{ij} = \frac{C b_i + b_j}{C + 1}, \quad e_{ij} = \frac{(C + 1)b_i + b_j}{C + 2} \text{ とおく。}$$

**定理.**  $n = 5$  のとき,

- (1)  $k = 1, 4$  について:  $b_1 b_2 \cdots b_5$  が  $t_k$  分点 5 角形である  $\iff d_{15} - d_{23} = \alpha_k(d_{21} - d_{34})$

(2)  $k = 2, 3$  について:  $b_1 b_2 \cdots b_5$  が  $t_k$  分点 5 角形である  $\iff e_{25} - e_{13} = \alpha_k(e_{31} - e_{24})$

[証]  $k = 1, 4$  のとき  $\alpha = \omega^{\pm 1}$ ;  $\alpha^2 = -1 + C\alpha$ ,  $\alpha^3 = -C - C\alpha$ ,  $\alpha^4 = C - \alpha$

$$(C - \alpha)b_1 + (-C - C\alpha)b_2 + (-1 + C\alpha)b_3 + \alpha b_4 + b_5 = 0$$

$$(Cb_1 - Cb_2 - b_3 + b_5) + \alpha(-b_1 - Cb_2 + Cb_3 + b_4) = 0$$

$$((1 + C)h_{15} - (1 + C)h_{23}) + \alpha((1 + C)h_{34} - (1 + C)h_{21}) = 0$$

$k = 2, 3$  のとき  $\alpha = \omega^{\pm 2}$ ;  $\alpha^2 = -1 - (C + 1)\alpha$ ,  $\alpha^3 = (C + 1) + (C + 1)\alpha$ ,  $\alpha^4 = -(C + 1) - \alpha$

$$(-(C + 1) - \alpha)b_1 + ((C + 1) + (C + 1)\alpha)b_2 + (-1 - (C + 1)\alpha)b_3 + \alpha b_4 + b_5 = 0$$

$$(-(C + 1)b_1 + (C + 1)b_2 - b_3 + b_5) + \alpha(-b_1 + (C + 1)b_2 - (C + 1)b_3 + b_4) = 0$$

$$((C + 2)h_{25} - (C + 2)h_{13}) + \alpha((C + 2)h_{24} - (C + 2)h_{31}) = 0$$

## 5. 線形代数の応用 — Napoleon の定理の拡張

Napoleon の定理に遭遇した人は、四角形や五角形でも同様のことを期待したくなるのではないだろうか。しかし、それが期待できないということが自由度の考察:

四角形の自由度は 8, 正方形の自由度は 4,  $t$  分点四角形の自由度は最小でも  $8 - 2 = 6$

あるいは, 第 2 節の  $R_n$  を用いて説明することも可能である。

$\mathbf{a} \in \mathbb{C}^4$  について,  $M_4(t)\mathbf{a}$  が正方形  $\iff R_4 M_4(t)\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\text{巡回行列 } C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ を利用しよう。}$$

**補題 1** (1)  $M_n(t) = (1 - t)E_n + tC_n = t(C_n - \alpha E_n)$   $\left(\alpha = \frac{t-1}{t}, t = \frac{1}{1-\alpha}\right)$

(2)  $R_n = \omega E_n - (1 + \omega)C_n + \omega C_n^2 = (C_n - E_n)(C_n - \omega E_n)$

**補題 2.** 任意の 2 つの  $t, u \in \mathbb{C}$  について,  $M_n(t)M_n(u) = M_n(u)M_n(t)$

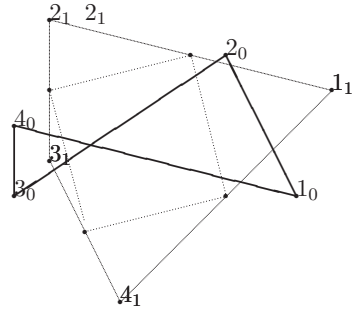
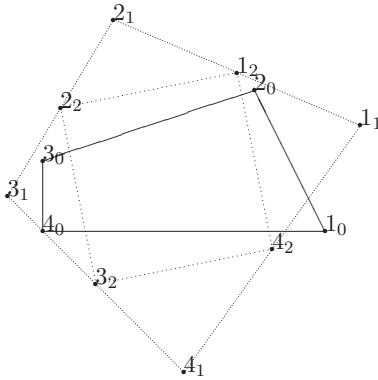
**補題 3.**  $t_k = \frac{1}{1 - \omega^k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) ととると,  $R_n M_n(t_2)M_n(t_3) \cdots M_n(t_{n-1}) = O$

[証]  $M_n(t_k)$  の部分に  $(C_n - \omega^k E_n)$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ) が表れ,  $R_n$  に  $(C_n - \omega^k E_n)$  ( $k = 0, 1$ ) が表れるから, 左辺は  $\prod_{k=0}^{n-1} (C_n - \omega^k E_n)$  の定数倍となる。ところが,

$$\prod_{k=0}^{n-1} (C_n - \omega^k E_n) = C_n^n - E_n = O \quad \blacksquare$$

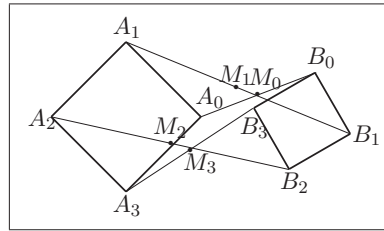
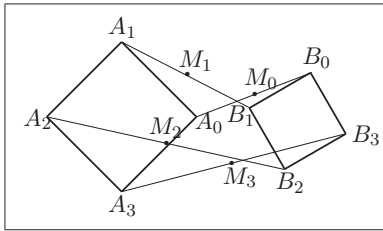
**定理 [Petr-Douglas-Neumann の定理]** 任意の  $n$  角形について,  $t_k$  分点図形を作る ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ), という操作を次々に前の捜査の結果に施すと, 最終的に正  $n$  角形が得られる。結果は  $t_k$  の順序に依らない。

例.  $n = 4$ :  $t_3, t_2$  の順で分点図形をつくる。もとの四角形は凸四角形でなくてもよい。



## 6. 2つの相似図形から

相似な2つの図形の、対応する2点の中点の軌跡を考えてみよう。



**定理 [Douglas-Neumann の定理]** 図形  $X$  と図形  $Y$  が同じ向きで相似なら、対応する2点を結ぶ線分を一定の比で内分する点の軌跡は  $X$  や  $Y$  と同じ向きに相似な図形となる。

[証]  $S$  を向きを保つ相似変換とすると、 $S(z) = \alpha z + \beta$  と表される。 $t$  を定数とし点  $z \in X$  と点  $S(z) \in Y$  を  $(1-t):t$  の比に内分する点を  $T(z)$  とおくと、

$$T(z) = (1-t)z + tS(z) = (1-t)z + t(\alpha z + \beta) = (1-t+t\alpha)z + t\beta$$

これより、 $1-t+t\alpha \neq 0$  である限り  $T$  が相似変換であることがわかる。 ■

**注意.** 上の条件  $1-t+t\alpha \neq 0$  を満たす限り、 $t$  は実数でなくてもよいことがわかる。

## 参考文献

- [1] 中岡稔, 服部晶夫他「線型代数学」紀伊國屋書店 (1986)
- [2] E. W. Weisstein : *CRC Encyclopedia of Mathematics — Third Edition*, CRC Press (2009)