

自ら考える力を育む授業のあり方

- 第3学年「平方根」の実践を通して -

岡崎市立東海中学校 鈴木 崇之

1 研究主題の設定

21世紀は、「知識基盤社会」といわれ、新しい知識や技能が、社会のあらゆる分野における活動の基盤になると言われている。これからの社会では、基礎的な知識・技能の習得やそれらを活用して課題を見出し、解決するための思考力・表現力などがより一層必要となってくる。

さて、今の自分自身の授業を振り返ってみると、目の前の入試や定期考査などに翻弄され、教師による説明が主となり、学習内容の定着を図るために練習問題が中心となりがちである。与えられた課題を形式的に解き、パターン化された解き方で、ただ単に知識を獲得させていくことに傾注しがちになっている。知識の習得は必要なことであるが、これだけでは学ぶ意欲も、数学に対する興味・関心も湧いてこず、思考力や表現力などは一定程度しか育たないと考える。現に生徒たちを見ていても、点数を取ることばかりに目が向き、解答が出さえすればよいと思っている生徒も少なくない。こうしたことから、単なる知識の伝達に終始することなく、自ら法則を発見したり、生活と結びつけたりして、学ぶ楽しさを生徒に味わわしていく必要があると考える。

新学習指導要領において「数学的活動」が改定の中心的事項となっている。(資料①) 数学的活動の3つの側面が挙げられているが、これら数学的活動を充実させることにより、その過程で驚きや感動を味わうことによって、数学を学ぶことの楽しさや達成感を実感でき、学ぶ意欲が高まるものと考えられる。

【資料① 数学的活動の分類】

- ア 既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見だし、発展させる活動
- イ 日常生活や社会で、数学を利用する活動
- ウ 数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動

(資料①): H20 学習指導要領解説数学編p33

そこでこれらの活動を通して、「なぜ」という新たな疑問を持たせ、「なるほど」という新たな発見を味わわせ、自らの力で「わかった」「できた」という成就感や達成感を感じさせ、問題を解決していく過程において、数学的な思考力を身につけさせ自ら考える力を高めさせたい。

2 研究の方向と仮説

(1) 目指す生徒像

- ・課題に対して意欲的に取り組み、自らの考えを持ち、主体的に解決していこうとする生徒
- ・他者の意見や考え方を聞き、考え方のよさを見つけ・認めることを通して、思考を深める生徒

以上のような目指す生徒像に迫るために、次のような研究の仮説を立てた。

(2) 研究の仮説

- ① 単元を通して、生徒たちの問題意識に沿った学習課題を設定し、数学的活動を効果的に設定すれば、自ら主体的に取り組み、意欲を持って課題解決にあたるであろう。
- ② 単元を通して、教え合ったり説明したり伝えあったりする活動を重視した指導を展開し、生徒の考えの一助となる適切な教師支援を行うことで、生徒それぞれが学ぶ楽しさを感じ、自ら新たな考えを追究していこうとするであろう。

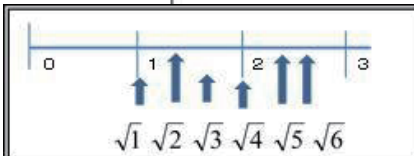
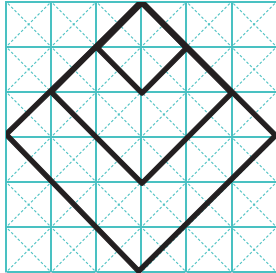
次に、仮説を検証するための具体的な手立てとして4項目を考えた。

(3) 研究の手立て

- ① 生徒にとって身近であり、問題意識に沿った学習課題を設定する。
- ② 具体的な操作活動を通して、多様な見方や考え方ができる学習課題を設定する。
- ③ グループ学習を多く取り入れ、互いの考えを共有し、説明し合ったり、伝え合ったりする場を設定する。
- ④ 気づきを促したり、解決の一助となったりする教師支援の工夫をする。

以上のような手立てを単元の中に組み込むことにより、本研究の主題に迫れると考えた。

(4) 単元計画

学 習 計 画	教師支援
<p style="text-align: center;">面積の違う正方形を見つけよう</p> <p>面積が1, 4, 9...cm²の正方形はすぐにかけるよ</p> <p>斜めにしても正方形は描けるぞ</p> <p>斜めの正方形の面積ってどうなるの。</p> <p>・斜めにして描いた正方形の面積は2, 5, 8, 10...ということは分かった。 ・1, 4, 9...cm²の正方形の1辺の長さは、1, 2, 3...だ。 ・斜めの正方形の1辺の長さは何cmだろう</p> <p style="text-align: center;">面積が2になる正方形の1辺の長さを考えよう</p> <p>1cmと2cmの間だから1...cmだ</p> <p>2乗して2になる数はこのままいくとなしぞ</p> <p>電卓を使っても見つけられないんじゃないか</p> <p>2乗してaになる数をaの平方根といい、$\sqrt{\quad}$をつけて表すことができるんだ</p> <p>ルート2は1.4142...で無限に続いていく小数があるんだ。分数で表すことのできない数もあるんだね。他の平方根はどれくらいの大きさになるんだろう。</p> <p style="text-align: center;">平方根ものさしを作ろう</p>  <p>・数が大きくなるにつれて間隔が狭くなっている ・整数間の平方根の数の増え方には規則性がある ・$\sqrt{\quad}$の中の数字が大きい方が大小関係は大きい ・たし算やひき算などの計算もできるかな</p> <p style="text-align: center;">正方形の図から根号をふくむ計算のしくみを考えよう</p> <p style="text-align: center;">乗法・除法の計算</p>  <p>・正方形のから$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$、$\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$だからルートの中が同じ数字だと、その数字が出てくるよ ・長方形を見ると、$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16}$、$\sqrt{18} \times \sqrt{2} = \sqrt{36}$よりルートの中の数をかければいいんだ。 ・1辺の長さだけ見る$2 \times \sqrt{2} = \sqrt{8}$、$3 \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$になったりするけど、$2 \rightarrow \sqrt{4}$に戻したりすれば、ルートの中の数をかければ成り立つな</p> <p style="text-align: center;">加法・減法の計算</p> <p>・$\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$、$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$で$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$だから、$\sqrt{\quad}$の中の数字が同じなら計算ができる ・$\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$、$\sqrt{18} - \sqrt{2} = \sqrt{8}$だから、たし算と同じやり方で計算できるぞ。</p> <p style="text-align: center;">いろいろな平方根の計算問題にチャレンジしよう!</p> <p>自分たちで見つけた法則を使ってるから解けるぞ</p> <p>分母の有理化や乗法の公式は徹底しないと...</p> <p>計算プリントなどで復習しよう</p>	<p>教師支援</p> <ul style="list-style-type: none"> ・自分の考えを持たせるために、個人追究時間を十分に取る。 ・学級で考えを共有するために、個人→グループ→全体という段階で授業をすすめる。 ・次時への課題を明確にさせるために、1辺の長さに着目するように授業展開をする。 ・2乗してaになる数をaの平方根ということを押さえる。 ・次時への課題を明確にさせるために、授業の感想を書かせる。 ・数の大きさの概念を正確にとらえさせるために、電卓を用いて小数で表し、ものさし上に数を打つよう指示する。 ・気づいたことを発言させるなかで、$\sqrt{2}$の2倍が$\sqrt{8}$になるなど、四則演算に目が向くように机間指導などを通して視点を与えていく。 ・面積と辺の長さとの関係など、視点を与え、考えていくように指示をする。 ・分からない生徒には、それぞれの図形を用意し横に並べさせたりする中で、辺の関係に着目するよう助言する。 ・自信を持って発表するとともに学級で考えを共有するために、個人→グループ→全体という段階で授業をすすめる。 ・$\sqrt{\quad}$の中を簡単にする計算方法や分母の有理化など、難易度の高いものについては教師が要点をまとめる。 ・四則演算の解き方の定着を図るために、適用問題を行う。

(5) 生徒の実態と抽出生徒

研究のねらいに合わせて、抽出生徒として次の2名を取り上げることとした。

【抽出生徒A (男子)】授業において、活発に発言し自分の考えを発表することができ、基礎的な力もしっかりと身につけている。生徒Aが、本単元を通して、自ら新たな課題を持ち考えを導き出そうとするとともに、友達の見解を聞いたりする中で、数学的な思考力を深めていきたい。

【抽出生徒B (男子)】与えられた課題に対してまじめに取り組む生徒であるが、数学を苦手としている。少しずつ基礎的な力をつけてきているが、自分の考えに自信を持たず、自分から発表したり、考えをノートに書くことをためらうときが多い。生徒Bが、本単元を通して、数学にさらなる興味を持つとともに、自分の考えを持ち、基礎的な理解を深めていきたい。

3 授業の実際と考察

(1) 第1・2時：面積の違う正方形を見つけよう

本単元を通して、有理数から無理数への数の拡張が行われる。新たな学びであることから、第1時では、たて4cm、横5cmの方眼を用いて、正方形を作図する操作的な数学的活動を取り入れ、作図した正方形の面積と1辺の長さを求める課題を設定した。

本時では、①斜めの正方形を見つけやすくすること、②四則計算時の図の活用につなげることの2点をねらいとして、方眼に斜めの線入れることとした。

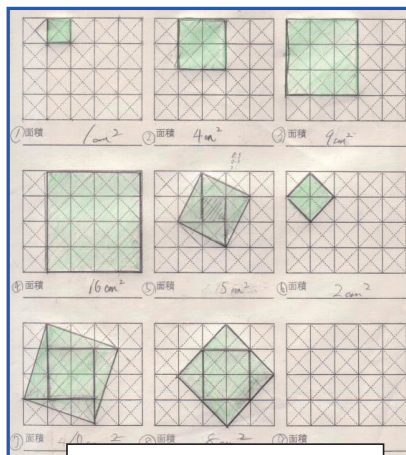
違う面積であれば、形は斜めになってもよいことをあらかじめ告げておいたことも相まって、数学の得意なA男は、この方眼内に書くことのできる正方形をスムーズに見つけることができた。(資料②)

次に、平方根の考えのもととなる面積について視点を当てた。教師側としては、次の2つの解法「①公式や図形の変形から面積を求める方法」と「②実測から面積を求める方法」を挙げさせることにより、計算値と実測値のずれを知り、無理数の存在を知ることにつながれると考えた。

資料②に見られるように、A男は正方形を作図する段階で面積まで目が向いていることから、正方形内に求積の考えのもととなる線を引いており、図形の分解により、求積に至っていた。一方、B男は、図形の見方ができないこともあり、実測で求めようとしていた。ここで、互いに説明しあったり、教え合ったりすることで、

様々な解法を知ることと自分の考えの深まりを感じる場としたと考え、グループでそれぞれの面積と考え方を確認するよう指示をした。【手立て③】このグループ活動を行ったことにより、計算値と実測値での方法で求積しているグループでは、「面積が違うよ」と声を上げている場面が見られた。

資料③は、全体追究の場面での板書である。議論となるのは図形を斜めにした正方形であり同じ形であるが面積が違うことを感じさせるため、計算値での求積と実測値での求積を意図的に対比させて板書した。実際は、面積が2つも存在することなく、実測値が誤差を生じているため誤答であるが、あえて出させることにより、1辺の長さに目が向くことにつながると考えた。



資料② 生徒Aのプリント



資料③ 取り上げた生徒の考え

資料⑤は全体追究の記録である。面積のずれをどのようにとらえるか考えることにより、生徒たちが自分の考え・他者の考えを理解したうえで発言しようとしていることが、会話のかかわりから判断できる。資料⑤の生徒Aの感想にあるように計算で求めるなどすることができた正方形の1辺の長さが何であるのかに、興味を持つことにつながった。次への課題と追究意欲につながっていると読み取ることができる。また、生徒Bの感想から、説明し合ったりする活動を確保することで、自分の考えに自信を持ち、授業への参加意識が高まっていることがわかる。しかし、グループ活動において、疑問が生じなかったり、伝え合う活動が停滞していたグループもあり、有用性が得られなかったのは課題である。

T: 同じ正方形なのに面積が違うの?
 A: 方眼の1マスが1cmだから、黒板の右側の計算があつてと思います。
 C: 今の意見と同じなんだけど、区切って公式とか使ってやっているからあつてと思います。
 T: そうか…。定規を使って求めた子は思うの?
 C: そう言われると困るけど、正方形って1辺×1辺だからいいかなあつて思うけど…。
 C: 定規の誤差なんじゃない?
 T: なるほど。皆で確かめてみる。
 (いろいろな長さを言う声が発せられる)
 T: 定規の誤差もありそうなんだ…。じゃあ、計算で求めた2cmが正しいのかな。Dくんどう?
 C: まあ、誤差があるから違うかもしれないとは思うけど…。だけど、正方形は1辺×1辺で求められるのに違うのは…。
 T: なるほどね。面積2になるこの正方形の1辺の長さって、じゃあ何なの?

資料⑤ 全体追究での授業記録

【資料⑤ 授業後の生徒の感想】

生徒A: みんなの前で説明ができてよかったけど、誤差があつても実際に測ってみたのと違うのはうまく説明できなかった。実際に、面積2になるときの1辺の長さを少し探したけど、見つかりそうもない。家で少し考えてきます。
 生徒B: 自分の意見を言えたとし、いろいろな意見が聞けて、今日の授業は楽しかった。いろいろな人の意見を聞いて、面積が2になるのはなんとなくわかったけど、難しい。

(2) 第3時: 面積が2になる正方形の1辺の長さを考えよう

主体的に課題解決にあたらせるため、前時の疑問を学習課題とし、実際に面積が2cmとなる1辺の長さを考えた。

【手立て①】右の資料⑥は、生徒Bのノートである。少しでも2という値に近づく1辺の長さを探そうと意欲的に取り組んでいることがわかる。与えられた課題ではなく、生徒の疑問を活かした単元の流れを構成した成果であると考ええる。なお、生徒たちは、区間縮小法を用いて1辺の長さを探し、近似値を求めていった。活動中に、面積が2になるものが見つからないことに気づく生徒もいた。そこで、全体でこのことについて確認をした。

1辺の長さ	面積
1.4cm	1.96cm ²
1.41cm	1.9881cm ²
1.42cm	2.0164cm ²
1.43cm	2.0449cm ²

Handwritten calculations for 1.42cm:
 1.42 × 1.42 = 2.0164
 1.42 × 1.42 = 1.42 × (1.4 + 0.02) = 1.42 × 1.4 + 1.42 × 0.02 = 1.988 + 0.0284 = 2.0164

資料⑥ 生徒Bのノート

そこで、全体でこのことについて確認をした。

資料⑦において、生徒Dの発言で、2乗して2になる数が表現できないことが全体でわかった。今までに習った数では表現できない新たな数の学びであることを示すために、面積2となる1辺の長さを書き記したB紙を紹介し、生徒たちの驚嘆を誘った。さらに、円周率をπで表したように、√という記号で表わすこと、分数にならないことを押さえた。

T: 面積が2になる1辺の長さってあった?
 C: 先生。ないよ…。
 T: 探したことを発表してよ。(やったことを発表していく)
 T: こんだけだしてないか…。もっと細かくすればみつきそう?
 D: 先生無理だと思います。小数の計算して、小数点以下が0にならなきゃならない。かけて0になるなんてないから、数学で出すのは無理だと思います。

資料⑦ 全体追究の授業記録

本時を通して、資料⑧の生徒Aの感想から、新しい数に出会えた喜びを少なからず読み取れるとともに、自分で新たな学びを追究していこうとする意欲を感じることができる。また、生徒Bにおいては、感じる事がなかった数学の面白さを実感として感じる事ができる場となった。

【資料⑧ 授業後の生徒の感想】

生徒A：存在しそうで、表現が難しい数に出会って不思議としか言いようがない。ルート2のように小数が限りなく続く数はたくさんありそうだから、また調べてみたい。
 生徒B：電卓でどうやっても“2”にたどりつけなかったけど、地球上でも出ていないって知って、数学ってすごいなと思った。

(4) 第5～7時：四則計算の法則を考えよう (乗法・除法の計算)

前時の平方根ものさしの授業において、「√の中の数が大きくなっていくと間隔がどんどん狭くなっていく。」「√の中の数字が大きければ値は大きい。」「今までに習ってきた整数などとは少し違う。」などの感想を持ち、数の不思議さ感じ取り始めていた。今まで習ってきた有理数での概念と一致しない部分がある不思議さにつながっていると捉える。そこを取り上げ、有理数で習ってきたことが活かせるのかどうか、今までに数の授業で習ってきたことを考えてみると、四則演算があげられ取り上げることにつながった。

本時では、根号を含む四則計算の基本法則を、図から見つけることをねらいとした。資料②の正方形の面積図とかかわりを持たせながら学習を行っていくことで、無理数での計算であるが、図形とかかわり (長さとの関連) をもたせながら視覚的に捉えることができ、意欲的かつ自ら考えようとする力を養っていくことができると考えた。導入時に生徒たちが考えた面積図を重ね、面積や1辺の長さに着目し等式を考えていくことで、根号を含む四則計算の基本法則につながる。

例えば、 $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$
 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$

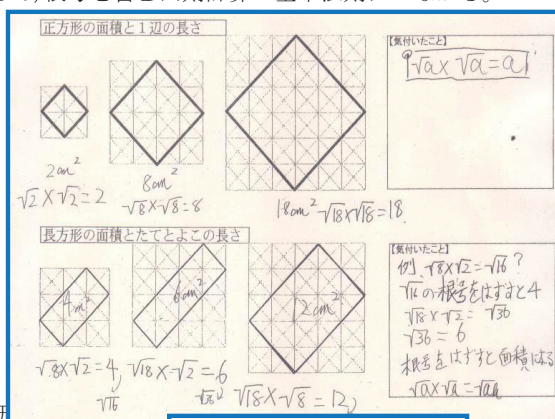
といった等式が考えられる。

本来であれば、図形から様々な等式を見つけさせ、加法・乗法を考えていく流れで、見方を広げることが重要だと考えるが、生徒の実態を考え、図形を見る視点を与え、加法・乗法を区別して考えることとした。

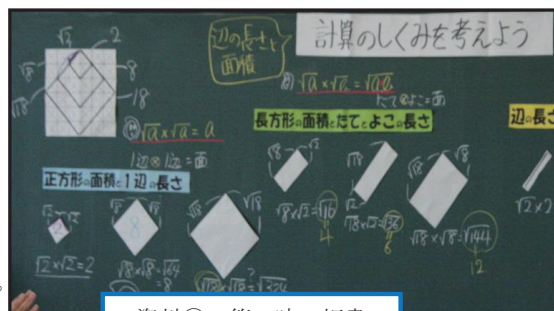
資料⑨は生徒Aの考えであるが、面積2の一辺の長さ $\sqrt{2}$ と面積8の一辺の長さ $\sqrt{8}$ から長方形4cm²になること。同様に考えて、 $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ すれば面積6cm²、 $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$ すれば面積12cm²になることから、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ を導き出すことができた。資料⑩の感想からも自ら考えて導き出したことが、学ぶ喜びになっていることも読み取れる。これも図形と関わらせ、視覚的に展開していった成果であると考えられる。視点を与えたことで、生徒Aのような導き出せた生徒が多くいた。

・ $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ ・ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$,
 ・ $a \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

しかし、生徒Bのように数学の苦手な生徒にとっては、等式はある程度わかっても、一般化までは考えることができなかった。何を考えていくのか明確でなかったことが問題であったと言える。有理数の概念に一度振り返らせることにより、乗



資料⑨ 生徒Aのノート



資料⑩ 第5時の板書

法であれば、どのような計算になるのか予想をさせて課題追究させるなどの手立てを講じる必要性があった。授業の最後には、乗法は $\sqrt{\quad}$ がついているものの計算法則としては有理数と同じように計算できることなどを確認するとともに、加法や減法についても $\sqrt{\quad}$ がつくだけで有理数と同じ計算方法で可能なかどうか問うた。生徒の中にはできるだろうと同じようにやり始めた生徒もいたのが、「今までの計算とは違う！」という声があがり、加法・減法の計算の法則を見つけようという意識が高まっていった。

【資料⑩ 乗法の授業後の生徒の感想】

生徒A：最初、少しつまづいて等式が立てられなかったけど、じっくり考えて等式をすべて作ったら法則が見えてきた。自分で見つけたのはうれしかった。ただかけるならあまり難しそうには見えないけど、まだ何かあるのかなと気になる。
 生徒B：図形の問題で楽しかったけど、今日は難しかった。Eくんに教えてもらったので理解はできてきた。 $\sqrt{\quad}$ の世界でもかけ算があるなんて…。(対話では、ひき算などに目が向いている)

4 研究のまとめ

(1) 研究の成果

①生徒にとって身近であり、問題意識が連続する学習課題を設定する。

正方形という慣れ親しんでいる題材を1つの柱として考えていくことで、新しい数概念ではあったものの、資料②の導入時の生徒の活動の様子や資料④での全体追究の場での息の長い発言などから、十分に効果があったといえる。また、資料⑥の生徒Bのように、疑問から生まれた必然性のある課題(問題意識のある課題)が連続することで、授業での自ら考えようとする追究心が生まれてきた。

②図形とかかわらせながら考え、多様な見方や考え方ができる学習課題を設定する。

資料⑩において、生徒Aが図形から新たな考えを導くことになったことに喜びを感じたり、生徒Bが楽しく学ぼうとしている思いが持てたのも、図形という1つの柱を軸に学習課題を設定したからだと考える。また、資料⑤において、生徒Bが「いろいろな意見が聞けて楽しかった」と感じたのも、答えがたった一つという課題ではなく、多様な考え方・見方ができる学習課題であったからこそだと考える。

③学習形態を工夫し、互いの考えを共有し、説明し合ったり、伝え合ったりする場を設定する。

計算値と実測値での面積の違いに目が向くようになったり、資料④における全体追究での新たな疑問が生まれてきたように、学習形態を工夫することで得られる効果はあったと言える。しかし、教えられてばかりで一方向的に聞いてばかりの生徒もおり、表現する力を育てるためのグループ活動などの在り方を、本単元でも考えていく必要があった。

④生徒のつまづきや気づき、思いをつかむ教師支援

導入時に、生徒のつまづくであろう場面を想定し、斜線を入れた方眼のプリントを作成するなどの教師支援や、計算法則を考える上で、視点を与える中で追究させていったことは、効果があったと考える。また、資料⑩の感想からわかるように、対話を通して生徒Bの新たな追究意欲を掻き立てることにつながったことは今後の指導にもつながる成果であると考えられる。

(2) 今後の課題

- ① 単元を通して、1人ひとりの興味関心に即した学習課題のあり方
- ② 表現する力(説明する力、伝え合う力)を養う授業展開、指導のあり方
- ③ グループ追究や全体追究の展開のあり方
- ④ 基礎基本のさらなる定着