鈴木先生の「自ら考える力を育む授業のあり方〜第３学年「平方根」の実践を通して〜」の発表を通して考えたこと

愛知教育大学数学教育講座　岸　康弘

鈴木先生は「自ら考える力を育む授業」の実践例として中学校第３学年で行われる「平方根」の授業を紹介されました。中学生が既に目にしている無理数には円周率πがありますが，無理数の概念に触れるのはこの単元が初めてとなります。新しい数を知ることは数学の世界が広がるということ，数学が好きでない生徒にとってもワクワクすることでしょう。私自身も中学生・高校生だった頃，無理数や虚数を知ったとき，神秘的な数との対面に感動した記憶があります。このような単元は，数への興味・関心をより深く持たせることのできる絶好のチャンスであると考えます。

実数の小数表記，分数表記を考えます。すべての実数は$1/7=0.14285714\cdots$，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$のように無限小数展開が可能です。もちろん，整数も$1=0.999\cdots$ですし有限小数も$0.5=0.4999\cdots$とできます。このように，無限小数展開で表したときに循環節を持たないような実数を無理数と呼びます。（本実践例の報告は，このあたりが曖昧に述べられていました。「計算値と実測地のずれを知」ることからは無理数性は導かれませんし，資料８の生徒Ａの発言からもそう感じます。）中学校において，$\sqrt{2}$の小数展開が無限に続き循環節を持たないことは，証明抜きでその事実のみ述べられています。また実際，そのような証明は不可能です。一方，分数表記を考える場合，無理数は分数表記ができない実数と定義できます。小数表記よりこちらの方が無理数の判定には優れています。（小数表記の場合はそのように表したのち，さらに循環節を持つかどうかの判定を必要とするからです。）$\sqrt{2}$の無理数性はこちらを使って証明されます。

無理数は『無限小数展開で表したときに循環節を持たない実数』や『整数の比（つまり分数の形）に表されない実数』と定義されます。どちらも否定形で述べられており，この否定的な定義が無理数を捉えにくいものとしています。ネイピア数eが無理数であることを証明するには（テイラー展開程度で十分ですが）高等学校の範囲では不可能ですし，πが無理数であることの証明はeのそれより複雑になります。さらに，$e+\pi$ や 2^{e}，π^{e}などは有理数であるか無理数であるか知られておらず，未解決問題となっています。（ちなみに，$2^{\sqrt{2}}$，e^{π}，$e^{\pi}+\pi$は無理数であることが証明されています。）また，無理数は『整数係数をもつ１次多項式の根にならないような実数』とも定義されます。これは，有理数が必ず『整数係数をもつ１次多項式の根になっている』ことの否定命題です。一般に，整数係数をもつ多項式の根になる複素数は代数的数，そうでないものは超越数と呼ばれます。従って，実数の超越数は無理数となります。多項式の次数という尺度で見ると，有理数の平方根は整数係数の２次多項式nx^2-m（n，mは整数）の根ですので，有理数に最も近い無理数となりますし，eやπは超越数となるため，有理数に最も遠い無理数となります。この捉え方は，平方根がのちに広がる実数・複素数の世界の原点となっていることを示しています。

鈴木先生は，図形を用いた操作的な活動を通して無理数を導入し，さらに，根号を含む四則計算の基本法則を視覚を利用して自ら発見させるという授業を展開されました。今後も，「自ら考える力を育む」ために「学ぶ楽しさを生徒に味わわしていく」ような知的好奇心をくすぐる授業を期待しています。