

# チャートを利用した解法パターンの暗記

## －解法パターンの暗記で大学入試に対応できる－

愛知県立半田東高等学校 池田 健太郎

### 1. はじめに

数学は一般に、「思考力」が必要な科目だと思われている。しかし、教える側がこの考え方にこだわり過ぎると、生徒の側にかかなりの負担が生じるのではないか。「解けるまでしっかり考えなさい」と言っても数学の苦手な生徒にとっては「考えれば出来る」という気はしないのではなからうか。教科書の練習問題のレベルならば、「例題」の解答を真似すれば出来るようだが、入試の標準レベルの問題になると、教科書をやってただけでは「自力で解ける」レベルに達するのは難しいように感じる。「何時間考えても出来ない」というマイナスの体験を積み重ねていくうちに数学が嫌いになり、勉強しなくなる。そして成績が下がっていくという悪循環が多いように感じる。

私はこのような数学が得意ではないが、受験に必要だという生徒にとって、まずはこの悪循環を断つことが必要だと考える。具体的には公式の証明や内容の深い理解に時間をかけるより先に、本質的には理解していなくても、そういうものだと考え（妥協し）解法パターンをひたすら覚えていくことが重要であると考え。本質的な理解はあとからついてくることも多分にある。

この数学に対しての「本質的な理解」よりも「解法パターンの暗記」に重きを置く考え方は、『和田式要領勉強術 数学は暗記だ！（株式会社ブックマン社）』で言及されている。本研究ではこの本の著者である和田秀樹さんの考えを元に「入試で合格点が取る」ための1つの家庭学習の方法を提案する。

「難問を捨て典型問題だけを確実に解く」ことにより、「苦手なりになんとか合格ラインに達する」ことが出来ると考える。

### 2. 解法パターン暗記の必要性

実際の定期テストでは50分の制限時間の中、授業でやった範囲から同じような問題が出る。大問で10題近く出されたとすると、1題5分で解くこととなり、「じっくり考えて解く」ようなテストではない。確かに考えに考えた末に問題が解けたときの喜びは大きく、印象に残る。しかし、数学が苦手な人にとって、5分考えるのも1時間考えるのも内容的にはそれほど大きな差がないと感じる。それは、数学が苦手な人は、考えるためのベースとなる「知識」が少ないからである。例えば、『チャート式基礎からの数学（数研出版）』に次のような問題がある。

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} \text{ のとき、この式の値を求めよ。}$$

上の問題では  $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$  と置くことを知らなければ解けない。分母を払って連立方程式の形にしても、なかなか文字を消去することが出来ない。このことについて、数学が得意で  $= k$  と置くことが出来た生徒も、「苦勞して考え抜いた末に発見した解法」ではなく、以前どこか

で身につけた「知識」を引き出して、試しただけではないか。逆に言うと、上の問題を1時間考えて解けなかったとしても、それは数学的な思考力が足りないからではなく、ただ単に  $=k$  と置いて解く「知識」（解法パターン）を持っていなかっただけであると言える。

### 3. 研究内容

解法パターンの暗記に適している参考書、また具体的な暗記方法について研究する。そして覚えた解法パターンが、実際の入試でどのように適用できるかを検証する。

◇解法パターンの暗記に使う参考書の条件

次の①～④を満たすものだと考える。

- ① 入試問題を解くために必要な解法パターンを網羅している。
- ② 自力で勉強して理解できる程度に解説が充実している。
- ③ 模範解答の記述方法が実際の試験で書けるものである。
- ④ オーソドックスな解答である。

これらを総合的に満たしているものとして『チャート式基礎からの数学』が適していると考えられる。例えば青チャートの「例題」の数は、数Ⅰ・A・Ⅱ・Bの4科目で585題、数Ⅲ・Cを加えた6科目で864題ある。また、ほとんどが入試の典型問題、頻出問題をターゲットにした例題で構成されている。

◇解法パターンの数と扱う問題量

青チャートには「基本例題」「重要例題」「補充例題」「練習」「演習問題A」「演習問題B」「総合演習」の問題が載っているが、基本的には「例題」のみを扱っていく。また、「例題の数」と「解法パターンの数」は必ずしも一致しない。青チャートではコンパスマークの数で例題の難易度が表示されている。コンパスマークが1～2個の例題は「1例題・1解法」の問題が多い。3～5個になると、一つの問題で複数の解法パターンを使う問題が多くなる。したがって、青チャートを使って覚える解法パターンの数は例題数よりも多く、だいたいその2倍になる。そのため、「理型ならば1,500、文型ならば1,000程度の解法パターンの暗記が必要である」と見積もることができる。

1日に扱う問題量と時間の目安としては 1コマ（90分）4±1題で週20題である。

◇具体的な解法パターンの暗記方法

「90分1コマ4例題」を基本とすると、1例題にかかる時間は平均して20分程度である。具体的な方法としては次の①～⑤を推奨する。

- ① 解答部分を隠し、自力で解く努力をする。5分を目安とする。  
これは、「考えずにすぐ解答を見てしまうと、解答を見たときの“理解度”が落ちる」（『認知カウンセリングから見た学習方法の相談と指導』（ブレーン出版））という実験結果からきている。どのようにして解けばいいか見当もつかない場合は、問題の意味を自分なりに理解し、印象づけておく。
- ② 解答理解は書き込みをしながら行う。

まずは例題のすぐ下にある「指針」の部分を読む。ここの説明が理解できたら、その下にある「解答」を見る。その際、線を引くだけでなく、感想や疑問、補足など“日本語”をしつかり書き込む。

③ 全体の“流れ”を把握する。

いくつかの解法パターンを組み合わせる場合、いくつかの問題の場合に有効である。

④ 理解できない部分については「何が理解できないのか」を明確にする。

これも日本語で書き込む。ただし、厳密な理解にこだわらない。公式や定理を証明できなくても、それを使って問題が解ければよしとする。

⑤ 解答を理解したあとは模範解答を見ずに、「解答を再現する」という作業を行う。

ここまですべてを20分前後で行う。

◇暗記すべきポイント

例えば以下の問題で考えたい。

$x^4 + 4x^2 + 16$  を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} \text{(解答)} \quad x^4 + 4x^2 + 16 &= (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \\ &= \{(x^2 + 4) + 2x\}\{(x^2 + 4) - 2x\} \\ &= (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

上のような解法パターンを暗記する際、すべての計算過程を丸暗記する必要はない。「なぜ、このような式変形をするのか」という理解をともなった部分的な暗記が必要である。 $x^4$  と定数項 16 に着目して、

$$\text{(与式)} = \{(x^2 + 4)^2 - 8x^2\} + 4x^2 = (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \quad \leftarrow \text{因数分解できる}$$

$$\text{(与式)} = \{(x^2 - 4)^2 + 8x^2\} + 4x^2 = (x^2 - 4)^2 + 12x^2 \quad \leftarrow \text{因数分解できない}$$

というように、式変形の目的は  $(A + B)(A - B)$  のような「和と差の積」の形にすることである。この「操作」を暗記する。

受験数学ではこれらの問題に対して、初見でひらめき解くことのできる「数学的センス」よりも、解法を知り、それらを知識として使いこなせるようにすることが必要であると考えられる。

◇復習方法

「90分1コマ4例題(週5日間)」のペースで進めていくと、1ヶ月で約80例題を扱うこととなる。このペースだと青チャートを1冊、1.5~2.5ヶ月で終わらせることができる。短期間で多くの問題を扱うため、復習が重要になってくる。

具体的には、①その日の復習→②翌日の復習→③1週間後の復習→④1ヶ月後の復習というよ

うに、決められたサイクルで行う。その際、“大きな流れ”を言えるかどうか、“ポイント”は何か、「解かずに復習」することも取り入れたい。

#### 4. 大学入試問題への対応

次に覚えた解法パターンが実際の大学入試でどのように適用できるかを検証したい。

##### (例1)

放物線  $y = x^2$  上の2点  $P(\alpha, \alpha^2)$ ,  $Q(\beta, \beta^2)$  ( $\alpha < \beta$ ) における放物線の接線をそれぞれ  $\ell, m$  とおくと、次の間に答えよ。

- (1) 2つの接線  $\ell, m$  の交点  $R$  の座標を、 $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (2) 直線と放物線によって囲まれる図形の面積  $S$  を、 $\alpha, \beta$  を用いて表せ。
- (3) 線分  $PR, QR$  および放物線で囲まれる図形の面積を  $T$  とするとき、 $\frac{T}{S}$  の値を求めよ。

(同志社大学入試問題より)

上の問題は、数学Ⅱ「微分法・積分法」の範囲で、放物線と接線に囲まれた面積を求めさせているが、

青チャートには以下のような例題がある。

放物線  $y = x^2 - 4x + 3$  を  $C$  とする。 $C$  上の点  $(0, 3), (6, 15)$  における接線をそれぞれ  $\ell_1, \ell_2$  とするとき、次のものを求めよ。

- (1)  $\ell_1, \ell_2$  の方程式
- (2)  $C, \ell_1, \ell_2$  で囲まれる図形の面積

これらは同型問題になっている。その他にも、

##### (例2)

2変数  $x, y$  があって、 $2x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0$  を満たしている。このとき、 $x^2 + y^2$  の値は、

$x = \boxed{\text{ア}}$ ,  $y = \boxed{\text{イ}}$  で最大となり、最大値は  $\boxed{\text{ウエ}}$  である。また、

$x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ ,  $y = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$  で最小となり、最小値は  $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$  である。

(東京薬科大薬学部入試問題より)

この問題の同型問題として青チャートの

- (1)  $x + 2y = 3$  のとき,  $2x^2 + y^2$  の最小値を求めよ。  
 (2)  $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y = 8$  のとき,  $xy$  の最大値と最小値を求めよ。

がある。

また, いくつかの解法パターンを組み合わせで解く問題もある。

(例 3)

$k$  を実数として  $f(x) = x^2 - 2kx + \frac{1}{5}(2k - 1)(4k - 3)$  とおく。

方程式  $f(x) = 0$  が実数解  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ ) をもつとき, 次の間に答えよ。

- (1)  $\alpha, \beta$  が  $\alpha \leq 1 \leq \beta$  を満たすように  $k$  の値の範囲を定めよ。  
 (2) (1) の場合に  $f(x)$  の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。

(九州大学入試問題より)

【(1) の解答】  $f(x) \leq 0$  であれば  $\alpha \leq 1 \leq \beta$  を満たす。よって

$$f(1) = 1 - 2k + \frac{1}{5}(2k - 1)(4k - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5}k^2 - \frac{20}{5}k + \frac{8}{5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2k - 1)(k - 2) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq k \leq 2$$

青チャートの数学 I には, この問題を解くのに必要な例題 (解法パターン) がいくつかある。

2 次関数  $y = x^2 - mx + m^2 - 3m$  のグラフが次の条件を満たすとき, 定数  $m$  の値の範囲を定めよ。

- (1)  $x$  軸の正の部分と, 異なる 2 点で交わる。  
 (2)  $x$  軸の正と負の部分で交わる。

上の問題の (2) では  $f(0) = m^2 - 3m < 0$  を満たせばよく, 考え方は同じである。また, 青チャートの数学 II には, ほとんど同型の例題が載っている。

2次方程式  $x^2 - 2px + p + 2 = 0$  が次の条件を満たす解をもつように、定数  $p$  の値の範囲を定めよ。

- (1) 2つの解がともに1より大きい。  
 (2) 1つの解は3より大きく、他の解は3より小さい。

ここでは、「解と係数の関係」を利用した解き方が載っており、それを利用して九州大学の入試問題を解くならば、

$\alpha \leq 1 \leq \beta$  より、 $\alpha - 1 \leq 0$ ,  $\beta - 1 \geq 0$  となり、 $(\alpha - 1)(\beta - 1) \leq 0 \cdots \textcircled{1}$  が成り立つ。

また、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 2k$ ,  $\alpha\beta = \frac{1}{5}(2k - 1)(4k - 3)$

$\textcircled{1} \Leftrightarrow \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \leq 0$  に代入すると、 $\frac{1}{5}(2k - 1)(4k - 3) - 2k + 1 \leq 0$  より

$(2k - 1)(k - 2) \leq 0$  が得られる。

このように、解法パターンのストックの数を増やしていくと同じ問題を違う解法で解けるようになり、知識が体系化する。

## 5. おわりに

本研究は、「数学嫌い」をつくらないために、厳密で本質的な理解はしていなくても、「テストで点数が取れる」→「勉強を続けることができる」→「あとからの理解」をねらった、家庭学習の指導の際の1つの提案である。

また、大学入試を検討する中央教育審議会が、センター試験や各大学の個別試験で「過去の入試で使われた問題を出題することを認める」という方針を明確に打ち出している。センター試験では、過去20年間の問題から良問をピックアップして再活用する措置が2003年度からとられている。このことにより、同型問題を出来るようにするメリットはますます高くなっている。

勉強の成果は家庭学習に因るところが大きいと感じるため、数学の内容だけでなく、その勉強方法についても指導していきたい。

## 参考文献

- 和田秀樹 「和田式要領勉強術 数学は暗記だ！」(株式会社ブックマン社)  
 「新・受験勉強入門」(株式会社ブックマン社)  
 「絶対基礎力をつける勉強法」(瀬谷出版)  
 「大人のための勉強法」(PHP 研究所)