イプシロン　2011.Vol.53, 25 - 38

数学的問題解決過程のモデルについて
－問題解決的な授業のデザインに向けた予備的考察－

愛知教育大学　山　田　篤　史

1．はじめに

問題解決研究は数学教育における重要な研究分野であるが，問題解決における認知プロセスを研究の射程に入れた場合，それを直接観察することはできないため，何らかの解釈的・記述的枠組みが必要となる。本稿では，そうした記述的枠組みや方法論をも含めて「数学的問題解決過程のモデル」と捉えるが，そもそも問題解決過程をどのように捉え記述しようとするかは研究により千差万別であり，今日までに多様なモデルが提案されているのが実情である。そうした多様なモデルの多様性は我々の問題解決過程の捉え方を豊かにしてくれるものの，問題解決的な授業のデザインを視野に入れる場合には，個々のモデルを授業デザインの観点（より一般的には，モデルの規範的適用の可能性の観点）からも，整理・検討しておく必要があろう。

本稿では，問題解決過程のモデルを授業デザインの観点から反省・検討するための予備作業として，多様な問題解決過程のモデルをレビューし，いくつかの要因に注目しつつ，それらの整理を試みることを目標にする。尚，これらの中には，コーディング・スキーマのように，純粋に記述的な枠組みとして考えられるものもある。それらを「モデル」と呼ぶことに違和感はあるが，それらも「問題解決をどのように捉えるか」という観点は提供しているため，本稿ではそれらも含めて考えることにする。

2．問題解決過程のモデルに関する先行研究

(1) Polya (1957) 4段階

数学的な問題解決のプロセスで最もよく参照されるものは，『いかにして問題をとくか』(ポリア,1954)に見られる「Polyaの4段階」であろう。Polyaの4段階とは，「問題を理解すること(Understanding the problem)」「計画を立てること(Devising a plan)」「計画を実行すること(Carrying out the plan)」「ふり返ってみること(Looking back)」のことを指す。

このPolyaの『いかにして問題をとくか』の初版は1945年の出版であり，その先見性故，数学的問題解決の研究では，このPolyaの4段階が盛んに引用されるのだが，特に，認知心理学・認知科学の勃興と共に問題解決研究が盛んになり始めた1970年代以降には，その傾向が顕著になったようである。更に，それが授業などのより広い文脈に適用され始めたのは，National Council of Teachers of Mathematicsが，問題解決の特集号であった1980年のYearbookの裏表紙にPolyaの4段階を原著そのままの形で引用し，その第1章をPolya自身に託したことによる影響が大きかっ

たと思われる(Krulik, 1980)。このように，Polyaの４段階は，数学的問題解決過程の研究に様々な形で影響を与えてきており，この研究をベースとして，様々な先行研究を概観していくことが可能になると思われる。

まず，Polyaのこの著作における功績の１つは，渾沌として見える問題解決過程に，上記のような性質の異なる４つの段階・相(phase)を見出したことにある。ただし，その４段階がどのような理論的背景の基に導出されたかは（「経験則的なもの」という自明なものを除いては）明らかではない。むしろ，この４段階は，この著作の主要な意図，すなわち問題解決に有用と思われる「発見法(heurisitc)」を効果的に指摘するために導入されたものと見ることができよう。実際，Polyaの４段階のそれぞれには，幾つかの発見法が列挙されており，４段階それ自身は，そういった発見法を理想的な問題解決過程に沿って具体的に指摘するためのカテゴリーと見ることもできるのである。

このような特徴に加えて，Polyaの４段階は，問題解決指導，特に授業プロセスを検討するときに，その基本的な枠組みとして頻繁に利用されるものでもある。実際，『いかにして問題をとくか』の中では，この４段階に沿って具体的な発見法を説明するために「授業」の文脈が使われており，その意味では，この４つの段階を，問題解決の授業を考えるときの規範的モデルと見ることは差し支えないであろう。さらに，1980年代当初は，この４段階に沿って授業過程を構想する実践研究が多数あり，それなりの成果を収めている(例えば，東京都中央区坂本小学校,1983)。

このように，Polyaの４段階のラベルは，記述的というより，規範的な性質が強いモデルとして解釈できると思われる。

(2) Wilson *et al.* (1993)のモデル

Polyaの４段階に見られるような段階論が，授業プロセスを検討する際の枠組みとして援用されるとき，それはしばしば線形的な段階論として扱われる。例えば，片桐(1988)が「算数・数学の学習は，ほとんどが問題解決の過程をふんでいるといえるし，またそのようにされることが望ましい」(p.12)と指摘したように，問題解決能力育成のために授業過程を理想的な問題解決過程に沿って構想することが推奨され，そのモデルとして「ポリアの４段階」が参考にされることも多かったのである。例えば，東京都中央区坂本小学校(1983)の初期の実践は，その典型であろう。

しかし，Polyaの４段階を線形的な段階論として捉えるような考え方を，Wilson, Fernandez, & Hadaway(1993) は，以下のような欠点を持つものとして批判する(p.60)。

1. それらは，問題解決を，線形的なプロセスとして記述する。
2. それらは，問題解決を，一連のステップとして提示する。
3. それらは，数学的な問題を解くことは，記憶され，実践され，慣れるプロセスである，と含意する。
4. それらは，答えを出すことを強調することに繋がる。

この種の考え方を導きがちな線形的段階論は，「考えることを指導する」というPolyaの精神に沿うものではないため，授業を構想する際には避けられるべきものでもあるし，個人的な問題解決の実態に沿うものでもない。

そこで，Wilson *et al.*(1993)は，線形的段階論の代わりに，図１に示されるような力動的で巡回的なPolyaの４段階の解釈を提示するのである。

これは，Georgia大学の数学的問題解決コースで長年使われてきた図であり，純粋に理論的なモデルとして扱われてもいないようである。しかし，Polyaの４段階を理論的基盤とし，その循環的な拡張版という位置づけを持っているし，「様々な，教授学，カリキュラム，指導，学習上の問題について議論するための枠組み」(Wilson *et al.*, 1993,p.61)，すなわち規範的な問題について議論するためのモデルとしては機能し得るものであろう。

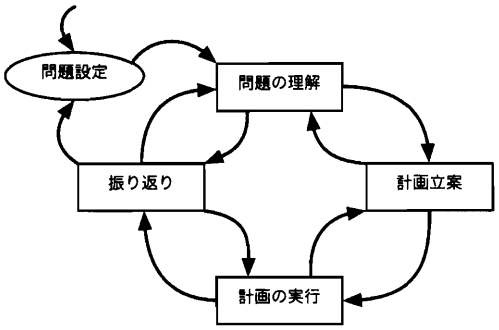

図１．Wilson *et al.*の枠組み

(3) Schroeder & Lester (1989)のモデル

図２は，現実世界と数学的世界との間の関係を議論する際に頻繁に用いられる図である。一方，図３は，Lesterが「問題解決を通じた指導(teaching via problem solving)」を強調する際に(Schroeder & Lester,1989)，また問題解決を「モデル化」の視座から捉える際に(Lester & Kehle, 2003)，図２を修正する形で頻繁に用いるモデルである。

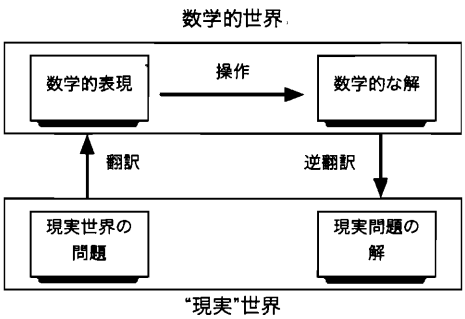

図２．単純な問題解決過程

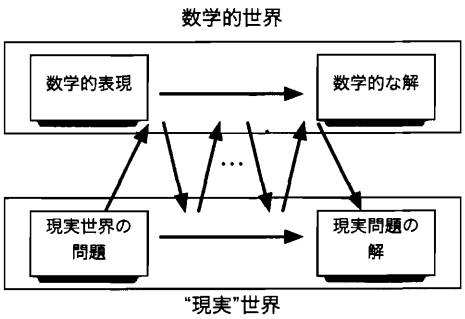

図３　修正された問題解決過程

図３のモデルは，図２のような単純な問題解決観を克服し，「問題解決を通じた指導」や「数学的モデル化」について説明・議論するためのモデルであり，その出発点から規範的な側面が強いものである。また，(1)(2)のモデルのように，特定の数学的活動を特定の段階・相によってラベリングするというよりは，それらを「現実世界」と「数学的世界」との間の移行関係によって示

しているのが特徴である。結果的に，このモデルは，「現実世界の問題」「数学的表現」「数学的な解」「現実問題の解」という４点を固定しているだけで（これらを拡張する事も可能だが），その移行関係を柔軟に拡張することができれば，問題解決過程観を柔軟に拡張することができるだろう(ただし，もちろん，その拡張方法自身をこのモデルが本来的に含意している訳ではない)。

(4) Kulm & Bussmann(1980) の段階-能力モデル

Kulm & Bussmann(1980)は，Polyaの４段階や後に述べるLester(1977)の記述的モデル等を参照し，それらが一般的な問題解決行動の記述を目指したものであるにもかかわらず，包括的な記述にはなっておらず，特に，問題解決のための数学的能力（及びその発達）という視座を欠いている，と問題点を指摘している(pp.179-180)。彼らは，そのような立場から， Rohr(1975)が提唱する８段階の一般的な問題解決モデルを基盤とし，下のように，各段階に必要とされる能力（各段階に付記されている項目がそれを示す）を組み合わせたモデルを提案している。

段階１．その問題の理解における確信を生み出す知覚的プロセスへの焦点化
- 形式化された数学的題材を知覚する能力
- 一般的な記述を具体的場面に関連づける能力
- 空間能力
- 複雑な構造を読み解き構成する能力　等々

段階２　その問題の分析：探求及び初期的な処理，古いパターンやアイデアへの専心の打破
- 具体的なイマジネーション
- 問題の要素間の関係についての知覚(perception)
- 空間能力
- 活動に対する肯定的態度　等々

段階３　問題の要素の表現を通じた予想的パターンの構築
- 空間的視覚化
- 機能的複雑さ，想像力と生産性，独創性
- 新たな仮説を形成する能力
- 思考の流暢性　等々

段階４．意味の置き換え，場の転換，問題要素の変換
- 素早く広範に一般化する能力
- 形式的-論理的思考のための能力
- 複雑性
- 場依存-場独立

段階５．省略，反駁，否定を通じた問題の要素に対する表現の構成
- 同時的な意思決定の能力
- 評価
- 全ての可能性をそれらの帰結に関連づける能力
- 思考における柔軟性　等々

段階６　記号的な構造的性質を得るための原理の抽象
- 抽象化能力
- 数学的題材についての定式化された知覚
- 柔軟性
- 記号的能力　等々

段階７．その問題における原理の投影及びその問題の要素の同時的な同定
- 一般的な原理を適用する能力
- 数学的題材についての定式化された知覚と素早い一般化
- 解釈する能力
- 数学的推論　等々

段階８．全体的な場面についての新たな一般化の形成及び敷衍
- 解決方法を洗練しようとする試み
- 転移の能力
- 評価
- 形式的-論理的思考及び判断

図４． Klum & Bussmann (1980)の段階-能力モデル（能力については一部略）

Klum & Bussmann(1980)における試みは，数学学習や数学的問題解決における構造の変容のプロセスを一般的に記述しつつ，具体的な問題解決過程を分析することでRohrの８段階を数学的問題解決に関連づけようとするものであった。しかし，図４を見れば分かるように，８段階を形成するRohrのモデルはかなり一般的なものであるし，各段階に付記される諸能力も，数学的能力としては容認されるものの，かなり抽象的であり羅列的でもある。また，上のモデルを使ったKlum & Bussmann(1980)における事例の分析はかなり細かなものであり，その意味では，このモデルが精緻な記述に堪え得ることは予想されるものの，その事例分析がモデルのより良い理解に繋がっているか疑問な部分もある。

以上のように，このモデルは，非常に独自性が強く，モデルの利用に際しても能力論等に対する予備知識が必要なものとなってしまっている。しかし，比較的細かな段階論に能力論が組み合わせられることで，記述性と規範性の両者を兼ね備えたモデルとなっている点は前述までのモデルとはかなり異なったものとなっている。また，各段階に必要とされる能力が特定されることで，段階間の移行を示唆するものともなっている点は特筆すべきであろう。このように，このモデル自身は非常に独自性が強いものの，モデル構成のアイデアは十分評価できるものと考えられる。

(5) Schoenfeld(1985)の５段階

Polyaの４段階に影響を受け，問題解決過程における発見的ストラテジーの役割を強調しつつも，線形的な段階論を若干修正したモデルはSchoenfeldの５段階モデル(1985,p.110)であろう。図５は，その図式的表現にあたる。このモデルは，頻繁に使われ重要と目される問題解決ストラテジーをリストアップし，「理想的な」問題解決者がとると想定されるシステマティックな解決行動にのせて，それらを図式化したものである。こうしたアイデアは，Polyaの４段階に対する筆者の解釈と同一のものだが，問題の困難度による解決過程の幾つかの分岐，段階間の移行の様相などについての言及がある点で，Polyaの４段階とは異なるものとなっている。

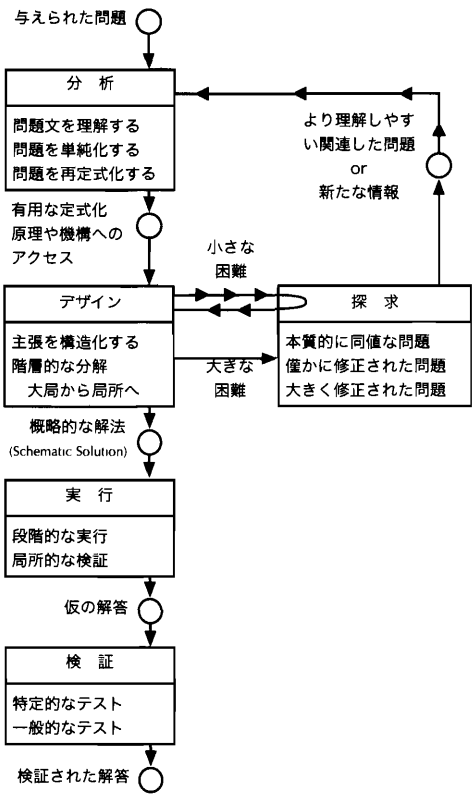

図５． Schoenfeldの５段階

また，Schoenfeld自身は，このモデルを「発見的ストラテジーの指導」に用いるために提示したものであり(e.g., Schoenfeld,1979)，その意味では規範的な側面は強いモデルである。しかし，他方では「問題を解く“エキスパート”の数学者によって使われるストラテジーを精確に記述できるか？」(Schoenfeld,1980,p.794)というSchoenfeldの問題意識に代表されるように，「発

見的ストラテジーに焦点化して」問題解決過程を記述することが，目標の一部になっていたようにも目される。実際，図５モデルは，ストラテジー指導に際しては，各段階に使われる個々のストラテジーを記述していくための枠組みとしても機能しており，「発見的ストラテジーに焦点化した」記述的枠組みという側面は強いものであろう。

(6) Lester (1977) の記述モデル

Lester(1977)の問題解決過程のモデルは，Polyaの４段階等を踏まえつつも，Newell & Simon(1972)やWickelgren(1974)の研究などの情報処理心理学的な研究に影響を受けたものであった。そのため，「６つの，しかし必ずしもばらばらではない段階(stages)」(Lester,1977,p.39)を設けつつも，それらに線形的な順序を与えず，問題解決過程を下のような流れ図的に捉えている。

伊藤(1993)は，Lesterのモデルを，問題解決過程を記述するモデルとして位置づけ，次のような評価をしている。

> i) 問題解決の指導を組織するときのガイドとしてのモデルでなく，成功的な問題解決に含まれる思考や活動を明確に記述するためのモデルが必要であること，そして
>
> ii) Lesterのモデルは，このモデルを用いた彼自身の調査研究の成果から，その有用性が実証できていること。(p.124)

このような伊藤の評価に見られるように，このモデルの導出に関しては文献のレビューに頼るものであったのにもかかわらず，「成功的な」問題解決過程の解決行動に関して流れ図表現をしているため，結果的に記述的な側面がかなり強いモデルとなっている点は否めないであろう。しかも，流れ図表現に加えて，各段階が細かくなってしまっているために，記述的なモデルとしてはやや柔軟性に欠けるものとなってしまっている点も否めないだろう。

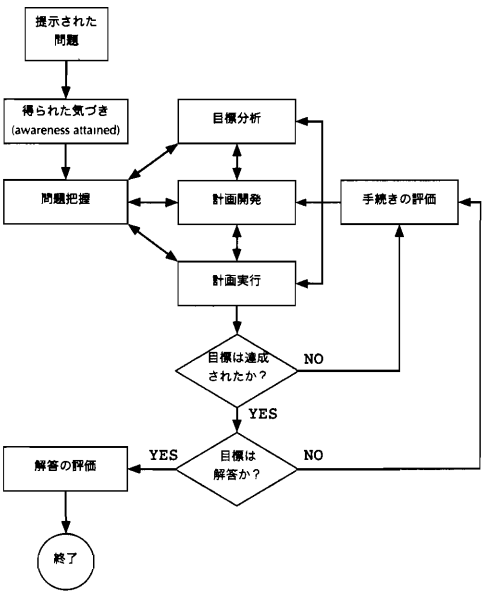

図６．Lesterの数学的問題解決モデルの図的表現

(7) Lucas *et al.* (1984)のコーディング・スキーマ

コーディング・スキーマとは，問題解決過程中の解決行動をシステマティックに記録し評価するために開発されたものであり，本来の意味は，解決行動とその行動に対応する記号（コード）との対応表のことである。また，今日，数学教育で使われるものの多くは，60年代にKilpatirckによって開発されたものを基本にしていると言われている(Schoenfeld,1985,p.286)。実際の問題解決過程の分析に当たっては，予め用意されたコーディング・スキーマに基づき，問題解決プロトコルを小さなアイテムに分割し，それら個々のアイテムを記号（コード）に置き換え，最終的に，問題解決過程の全体を記号の系列に翻訳していくことになる（図７を参照のこと）。長く複雑な問題解決過程も，いったん記号の系列に翻訳されてしまえば，厳密な統計的な処理を施すことも可能になり，70年代以降，頻繁に使用されることになったものである。

【解決過程の一部】

問題解決者は問題を読み，躊躇して，その問題の一部を再読し，その問題が別の問題に似ていると言って，それと同じ方法を使おうと試みようとし，その後，与えられたデータの１つからある情報を正しく演繹する。

【コーディングの結果】

$R,\ R,\ L_8\ P_i\ D_{a5}\ 4,$

【辞書の一部】

R	：問題文の全てあるいは一部を読む
L_8	：関連する問題の方法を想起する，あるいは関連する問題を述べてその方法を用いる
P_i	：中間的な目標に対する計画を示唆する
D_a	：与えられたあるいは導出された情報の一部から演繹的推論を引き出す
D_{a5}	：順方向でのD_a
$4'$	：正しい中間的な結論を生み出す

図７．コーディングの例 (Lucas *et al.*, 1984, p.361)

コーディング・スキーマによる分析の特徴は，その分析の焦点によって，そのコーディング・スキーマ（辞書）を変えることができる点にある。例えば，Lucas *et al.*(1984)による，包括的な問題解決行動の分析の場合，そのコーディング・スキーマは２ページにも渡る長大なものになり，彼ら自身はそれを「辞書」(pp.362-363)と呼んでいる。一方，Kantowski(1977)の研究で使われた「興味のある発見的プロセスに対するコーディング・スキーマ」は，プランニングに関連した５つ，似た問題に対する記憶に関連した４つ，振り返りに関連した７つ，合計16個のコードから成り，発見的プロセスに焦点化されている。しかし，いずれにしても，これらのコーディング・スキーマによる分析は，非常に微視的なものである点は明らかだろう。

さらに，Lucas *et al.*(1984)が「全ての行動は、明示的(explicit)であることが要求される；さもなければ、コード化されないのだ」(p.359)と述べている通り，コーディング・スキーマによる分析

は，問題解決過程における明示的な行動に焦点が当てられることになる。明示的な行動だけが分析の対象となるため客観的な分析にはなるかもしれないが，その代償として，例えば，当ての無い追及のような「意思決定が起こっていない」行動は明示的な分析の対象にはならないし，解決者が抱いていると想定されるイメージの解釈なども許容されないのである。

コーディング・スキーマは，焦点化された問題解決行動を系列的に記述する方法論を提供したという意味では，問題解決過程の研究に非常に大きな影響を与えた。実際，後述するSchoenfeldのエピソード分析という方法論は，その分析の焦点や緻密さをコーディング・スキーマの対局に置くことで開発された方法論でもあった。しかし，これは純粋に記述的枠組みであるし，しかも「明示的な行動」しか分析の対象にしない方法論でもあるため，その適用範囲も狭いものになってしまっているのも確かであろう。

(8) Schoenfeld(1985)のエピソード分析の枠組み

エピソード分析とは，Schoenfeldが問題解決におけるコントロールの問題を扱うために開発した問題解決プロトコルの分析方法のことである。分析に当たり，プロトコルは，まず「エピソード」と呼ばれる一貫した行動の巨視的チャンクに解剖される。「エピソード」とは，「個人あるいは問題解決グループが，同じ目標に携わりつつ，１つの大きな課題あるいは密接に関連づけられるまとまった課題に従事している期間」(Schoenfeld,1985,p.292)のことである。この方法論の目的は，意思決定のポイントやコントロールが問題になるポイントを探すことであり，実際の分析では，エピソード間の接合点(juncture)周辺の解決者の解決行動や認知過程が焦点になる（図８を参照のこと）。

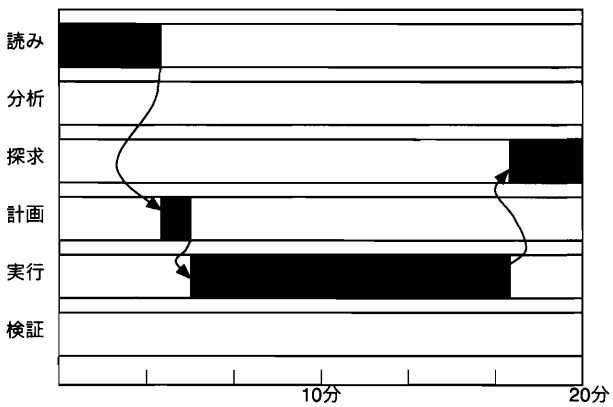

図８．エピソード分析によるプロトコル解剖図の例 (Schoenfeld,1985,p.296)

このように，エピソード分析の方法論自体は，問題解決における「意思決定やコントロール」に焦点を当てて問題解決過程を分析するための記述的枠組みである。Schoenfeldは，エピソード自体を「巨視的なチャンク」と位置づけているため，解決過程のまとまりも当然大きく粗いまとまりの系列として捉えられることになるが，そのラベルはPolyaの４段階や彼自身の５段階モデルに影響を受けた固定的なもの（読み，分析，計画，実行，探求，検証，移行）であるため，その点では記述的な枠組みとして柔軟性にやや欠けるところであろう。

(9) 布川(1991)の問題場面の構造

布川の「問題場面の構造」とは，漸進的な問題解決過程を記述・分析するために提唱された記述的な枠組みのことである(布川,1993; Nunokawa, 1994)。この「問題場面の構造」とは，「解決過程のある時点で,解決者が問題場面に対して構成した構造を指し,解決者により見出された要素,関係，および解決者により要素や関係に与えられた意味からなる」(布川,1991,p.45)ものであり，考察の対象はかなり広く，記述的枠組みとしてもかなり柔軟なものである。また，こうした枠組みは，Polyaの４段階に代表されるような段階論，すなわちいくつかの段階の移行により解決過程を捉える立場とは異なり，解決過程の進行を「解決者の問題場面に対する理解の変化・深化」として捉える立場から来るものである。

この枠組みでは，「解決者が問題場面に与える構造」という視点で解決過程を記述・分析するため，当然ながら問題場面の構造に対する予め用意されたラベルは無く，むしろ，解決過程の文節化や文節化されたセグメントのラベルは，解決者がその時点で与えている構造（例えば，解決者が認識した要素間にどのような関係を確立しているか，あるいは，その問題をどのように意味付けているか）に依存するものになる。

このように，「問題場面の構造」は，記述的枠組みであるけれども，前述のエピソード分析のように記述・分析の目的となる対象が極端に焦点化されているわけではない。むしろ，問題解決過程を解決者の問題場面に対する理解の漸進的な変化･深化として捉えることが要請されるため，問題場面の理解及びその変化にかかわるあらゆることが記述・分析の対象となり，非常に柔軟な枠組みになっている。

(10) 数学的問題解決における認知プロセスを記述する枠組み(山田, 1997)

山田(1997)の「数学的問題解決における認知プロセスを記述する枠組み」とは，問題解決過程を解決者が構成する問題表象の変容過程と捉え，ある時点での問題表象はGodin(1992,1998)の「５つの内的表象体系に基づく問題解決のコンピテンス・モデル」を利用して記述し，また，解決過程の時系列的な進行は「解決活動」と「問題表象の種類」というペアの系列として記述していこうとする方法論である。この「解決活動」に対するラベルは，当初，段階論的なGarofalo & Lester(1985)の「認知−メタ認知の枠組み」における「方向付け・組織化・実行・検証」を用いていたが，近年では，「解決活動」は主に外的に現れる活動として独立させ(山田,1999)，問題表象とのペアは「解決者の目標」(清水,1993; Yamada,1998)として，より内的表象と外的表象・活動との相互作用を強調する枠組みとして変容しつつある。ただし，問題解決過程の進行の鍵の１つとして解決者が構成・変容させる問題表象にあり，それを記述するためにGoldinの「コンピテンス・モデル」を使い，記述的な枠組みから規範性を備えた問題解決過程のモデルを構築しようとする立場は一貫しているものである。

以上のように，この枠組みは，解決者が構成・変容させる表象を記述するための枠組みとしての機能が大きく，また，解決者の目標や外的な活動・表現の文節化には予め特定のラベルが用意されていないため，非常に柔軟な枠組みとなっている点が特徴である。もちろん，問題表象を記述・分析するための枠組みにはGoldinのコンピテンス・モデルを用いているため，その部分では

Goldinモデルの制約を受けることになるが，各内的表象システムにサブシステムを考慮することで柔軟性は確保できるだろう。また，そういった特定の表象システムにおけるサブシステムの形成の問題や，Goldinモデルに示される表象システム間の翻訳の問題についても議論できるため，特定の表象システム内での表象の変容や表象間の翻訳の問題，すなわち，規範的な問題を取り扱うための枠組みとしても機能すると考えられるものである。

３．モデルの分類・整理の観点

3.1. モデルの説明体系や理論的背景

モデルを分類・整理するに当たっては，当然「モデルの説明体系・理論的背景」が重要な観点となる。例えば，先に挙げたコーディング・スキーマは，認知心理学的な説明体系を利用しながらも，後の定量的な分析を志向するため，方法論的には明示的な行動にしかコーディングを施さない。また，筆者が提案する「数学的問題解決における認知プロセスを記述する枠組み」は，「問題解決過程を問題表象の構成・変容過程と見る」認知心理学的立場を取るが，教授学的な示唆を積極的に引き出そうとするために，問題解決過程の記述に際しては解決者の問題表象に対する具体的な解釈を多用する。このように，比較的明示的にモデルの説明体系に言及して構築されたモデルもあれば，例えば，Polyaの４段階のように，モデルの意図（問題解決における発見的行動や活動の段階の指摘とカテゴリー化）は明確ながら，メタレベルからの説明がないモデルも有る。さらには，Wilson *et al.*のモデルのように，Polyaの４段階をモデルの説明体系として利用し，それを柔軟に拡張したモデルもある。

3.2. モデルの目的的性格（規範性と記述性）

特定のモデルをみる場合，「モデルの説明体系・理論的背景」という観点は重要であるが，一方では，「そのモデルは何のために使われるか」という機能的観点，言わば「目的的性格」という観点も重要であろう。もちろん，この「モデルの目的的性格」にも様々なものが考えられるが，本稿では，数学教育における児童・生徒の様々な思考活動に言及する場合に多用される観点である規範的性質と記述的性質の２つの観点（例えば，「理解のモデル」における小山(1999)の議論などを参照のこと）を採用する。

3.3. 柔軟性に関わる幾つかの相対的な観点

多くのモデルを比較・検討しようとする場合，3.2節の「規範性と記述生」といった観点のように，対極的な２つの視点からの相対的な比較が有用になる場合が多い。本稿では，前節の先行研究のレビューの段階でも度々触れられたモデルの「柔軟性」という観点を採用する。ただし，モデルの「柔軟性」とは，「モデルの適用範囲の広さ」や「改編などに際する融通の利き具合」といった意味に加え，記述的立場からは大きな関心事となる以下のような２つの観点を加味して捉えることにする。

<u>モデルの構成要素におけるラベル</u>

モデルの柔軟性に関わる要因としては，第１に「そのモデルが，予め解決段階等に特定の固定的ラベルを用いているか否か」といった観点が考えられる。例えば， Schoenfeldのエピソード分

析の枠組みには，Polyaの４段階に類似する幾つかの解決行動に対するラベル（例えば，読み・分析・探求等）が存在する。エピソード分析の枠組みは，行動のラベルを組み合わせることも可能であり，かなり柔軟であるけれども，コントロールの問題を扱うという適用範囲を超えた柔軟性は持ちにくいのも確かである。一方，布川の問題場面の構造という枠組みは，予めそれに特定のラベルを付与しておらず，結果的に非常に柔軟な解決活動の解釈を可能にするものになっている。

モデルの緻密さ

モデルの柔軟性に関わる２番目の要因は，「そのモデルの記述レベルが，どれほどの緻密さを要求するか」といった観点である。例えば，Polyaの４段階には「理解・計画・実行・ふり返り」という解決活動上のラベルが４つしか存在しない。ただし，そうしたラベルの粗さ故か，それ自身ではやや柔軟性に欠ける面があるにもかかわらず，Wilson *et al.* のモデルのように，モデルに循環的な観点を取り入れることで改編にも柔軟に対応できるものとなっている。一方，Lucas *et al.* のコーディング・スキーマには，「辞書」と呼ばれる程の多数の細かな行動上のラベルが存在し，緻密な分析を可能にするものの，まさに表面的行動の記述的な枠組みとしてしか機能せず，モデルそのものの柔軟性には欠けるものになっている。また，Nunokawaの枠組みでは，解決活動の文節化のレベルは解決者の問題場面に対する意味付けなどに依存するものとなっている。

3.4. 構成要素/解決段階間の移行についての言及

問題解決過程のモデルには，「どのような構成要素があるか」という要素的側面，「それらの要素がどのように関係しているか」という構造的側面，また「問題解決過程がどのようなプロセスとして記述されるのか」というプロセス的側面という，３つの側面が存在する。これら３つの側面について詳細に議論する余裕はないが，本稿では特に３番目の側面，特に，各モデルにおける構成要素・ラベル・解決段階の間の移行について，明示的に言及されているかに着目する。ただし，そのモデルが記述的枠組みとしての性質が強い場合には，それらの本来の用途が問題解決過程の進行のパターン等を記述することであり，プロセス的側面は記述の結果として解釈・生成されるものでもあるため（つまり，それらが予めモデルの中には示されていないかもしれないため），議論に際しては注意を要するところでもあろう。

４．議論：諸先行研究の特徴づけと比較

第２節で採り上げた10個のモデルを第３節で述べた観点に基づき整理すると，次の表１のようになり，先行研究に対する簡単な比較をすることができる。

この表は，これらの先行研究を系譜的に捉え，比較・検討する場合，非常に有用となる。例えば，Polyaの４段階を狭義に(線形的に)捉えたとき，Wilson *et al.*のモデルは，それをより柔軟に克服しようとしたものであるし，Kulm & Bussmannのモデルは，それを認知過程の記述面と精緻さの面で克服しようとしたものであろう。また，これらは，Polyaの４段階の規範的側面を強調したものと捉えられるであろう。一方，Schoenfeldの５段階は，Polyaの４段階を参照しながらも，それを特定の問題解決行動(特に発見的行動)の分析・記述的枠組みとして改良したものとも考えられる。また，これを含め，70年代後半の研究に起源を持つ (5)(6)(7)の研究は，情報処理心理学的

表1． 先行研究の比較

	モデルの説明体系や理論的背景	目的的性格(非排反的)	モデルの柔軟性		段階の移行等についての明示的言及
			ラベルの有無	緻密さのレベル	
(1) Polyaの4段階	明示的なものは無いが，モデルの意図は，問題解決活動における発見的活動や4つの段階/相の指摘	規範的	有	粗	明示的には無し
(2) Wilson *et al.* のモデル	線形的なPolyaの4段階の循環的な拡張	規範的	有るが循環的	粗	明示的には無し
(3) Schroeder & Lesterのモデル	問題解決過程における数学の世界と現実的世界との間の関係を表した図式の拡張	規範的	始点と終点には有	任意	有（モデル自体には明示無し）
(4) Kulm & Bussmannの段階-能力モデル	問題解決過程の研究と心的能力構造の研究の融合（問題解決過程の各段階で必要とされる能力の明示化）	規範的+記述的	有	細	各段階に必要な能力という形で示される
(5) Schoenfeldの5段階	Polyaの研究を基盤にした，発見法・問題解決ストラテジーの解決段階に沿ったカテゴリー化	記述的	有（一部循環的）	粗	流れ図的には示されている
(6) Lesterの記述的モデル	情報処理心理学的な理論(e.g., GPS (Newell & Simon)やWickelgrenの研究)と主にPolyaの研究	記述的	有（流れ図的）	細	流れ図的には示されている
(7) コーディング・スキーマ	情報処理心理学的な微視的行動分析の方法論	記述的	有（増設可能）	細	無 (*1)
(8) エピソード分析の枠組み	解決活動（コントロール活動）の巨視的分析の方法論	記述的	有（組合せ可能）	粗	無 (*1)
(9) 布川の問題場面の構造	「問題場面の構造」を基にした問題解決活動の解釈的・記述的枠組み	記述的	無（問題場面の構造に依存）	任意	無 (*1)
(10) 山田の記述的枠組み	問題解決過程を「問題表象の構成・変容過程」と見る立場を基礎にし，いくつかの理論を融合させた，解決活動の認知プロセス分析の方法論	記述的	問題表象については有り	任意	問題表象内については有り (*1)

(*1) 3.4節でも述べたように，これらは記述の結果として示されるのが基本である。もちろん，研究結果として示されているものもあるが，ここでは「明示的にモデルに示されていない」という意味で「無」とラベリングした。

な色彩を帯びており，緻密ではあるものの，やや柔軟性に欠く記述的枠組みとして位置づけられるだろう。そして，80年代以降に登場する(8)(9)(10)の研究は，記述的な柔軟性という観点でこれらを克服しようとする試みとして位置づけられるものだろう。

ただし，「段階の移行等についての明示的言及」については，前節で述べたように注意が必要である。特に，(7)ー(10)については本来記述的枠組みであるため，段階間の移行や解決過程の進行のパターン等がモデルに明示的に言及されることはない。むしろ，それらは，これらの記述的枠組みを用いて解決過程を記述・分析した結果として説明されるものであろう。このように，記述的性格が強いモデルについては，具体的な問題解決過程を分析する中で，様々な解決の進行のパターンが記述されているため注意が必要であるし，それらの結果をモデルに組み込むことで，モデルに規範的性格を帯びさせていくことも可能になると思われる。

5　おわりに

本稿では，先行研究における10個の問題解決過程のモデルを，「説明体系や理論的背景」「目的的性格」「柔軟性」「構成要素/解決段階間の移行についての言及」という４つの観点から分類・整理した。特に，「目的的性格」と「柔軟性」という２つの相対的観点から，幾つかのモデルの系譜や，規範的性格の強いモデルと記述的性格の強いモデルとの対比点などについて，比較的明快な議論ができる可能性が示唆された。尚，筆者が提案する「数学的問題解決における認知プロセスを記述する枠組み」は，本来，記述的枠組みとしての性格が強いものであるが，本稿で得られた示唆をもとに，問題解決的な授業をデザインする際に有用と目される規範的性格をさらに組み込んでいくことが今後の課題となるだろう。

引用・参考文献

伊藤説朗(1993).『数学教育における構成的方法に関する研究（上)』. 明治図書.

小山正孝(1999).「数学理解の２軸過程モデル：その理論的な再検討」.『日本教科教育学会全国大会論文集』(pp.196-199). 兵庫教育大学.

清水紀宏(1993).「数学的問題解決における方略的能力に関する研究：方略的能力の生起の分析可能性について」. 日本数学教育学会,『第 26 回数学教育論文発表会論文集』(pp.303-308). 上越教育大学.

布川和彦(1991).「数学的問題解決過程における数学的知識の問題場面の構造への作用について」『筑波数学教育研究』, 第 10 号, 45-55.

布川和彦(1993).「問題場面の構造の大局的再構成について」.『上越数学教育研究』,第 8 号,19-28.

山田篤史(1999).「数学的問題解決における認知プロセスに関する研究：問題表象の立場から見た解決の進行のパターンについて」. 日本教科教育学会,『日本教科教育学会全国大会論文集』(pp.192-195). 兵庫教育大学.

山田篤史(1997).「数学的問題解決における認知プロセスを記述する枠組みについて」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』,第 3 巻,59-73.

Garofalo,J. & Lester,F.K.,Jr.(1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education,* ***16*** (3), 163-176.

Goldin,G.A.(1992). Toward an assessment framework for school mathematics. In R.Lesh & S.J.Lamon (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics* (pp.63-88), Washington,DC: American Association for the Advancement of Science.

Goldin,G.A.(1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2),137-165.

Kantowski,M.G.(1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 8* (3), 163-180.

Krulik,S.(Ed.).(1980). *Problem solving in school mathematics* (1980 Yearbook of NCTM). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kulm,G. & Bussmann,H.(1980). A phase-ability model of mathematics problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 11* (3), 179-189.

Lucas,J.F. et al.(1984). A process-sequence coding system for behavioral analysis of mathematical problem solving, In G.A.Goldin & C.EMcClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp.353-378). The Franklin Institute Press.

Lester,F.K.,Jr.(1977). *Mathematical problem solving project technical report I: Documents related to a problem-solving model. Part B: Mathematical problem solving in the elementary school - Some educational and psychological considerations. Final reports.* IN: Indiana University, Mathematics Education Development Center. (ERIC ED168384).

Lester,F.K.,Jr. & Kehle,P.E.(2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R.Lesh & H.M.Doerr(Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp.501-517). Mahwah,NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Newell,A. & Simon,H.A.(1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ :Prentice-Hall.

Nunokawa,K.(1994). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 275-297.

Polya,G.(1957). *How to solve it (2nd edition)*. Princeton, NJ: Princeton University Press. (ポリア,G.(1954).『いかにして問題をとくか』(柿内賢信訳).丸善.)

Rohr,A.R.(1975). *Kreative Prozesse und Methoden der Problemlösung [Creative processes and methods in problem solving]*. Weinheim: Beltz.

Schoenfeld,A.H.(1979). Can heuristics be taught? In J.Lochhead & J.Clement (Eds.), *Cognitive process instruction* (pp.315-338). Philadelphia,PA:Franklin Institute Press.

Schoenfeld,A.H.(1980). Teaching problem-solving skills. *American Mathematics Monthly, 87*, 794-805.

Schoenfeld,A.H.(1985). *Mathematical problem solving*. New York,NY:Academic Press.

Schroeder,T.L. & Lester,F.K.,Jr.(1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R.Trafton & A.P.Shulte(Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp.31-42). National Council of Teachers of Mathematics.

Wickelgren,W.A.(1974). *How to solve problems*. San Francisco:W.H.Freeman. (ウィケルグレン,W.A.(1980).『問題をどう解くか:問題解決の理論』,矢野健太郎(訳).東京:秀潤社)

Wilson,J.W., Fernandez,M.L., & Hadaway,N.(1993). Mathematical problem solving, In P.S.Wilson(Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp.57-78). New York,NY:Macmillan.

Yamada,A.(1998). A study on cognitive process in mathematical problem solving: Segmentation of problem-solving process. 日本数学教育学会,『第31回数学教育論文発表会論文集』(pp.371-376). 福岡教育大学.

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：22530963）の助成を受けたものである。