イプシロン　2010. Vol.52, 35 − 44

数学的問題解決に有用と目される汎用的な図について

愛知教育大学　山田篤史

1．はじめに

平成20年の学習指導要領の改訂を境に，「表現力の育成」に注目が集まりつつある。算数・数学の教授・学習全体を考える場合，表現は不可欠の要素であり，当然，様々な表現が考慮の対象になる。ただし，実践的な数学的問題解決研究に限っていえば，その分野の研究が焦点を当ててきた表現には，一定の偏りがあったようにも思われる。具体的には，第一に，式に代表される伝統的な規約的・記号的表現，第二に，自然言語による一般的な言語的記述表現，第三に，線分図等の図的表現があり，現在でもこれらに焦点が当たる傾向は変わらないように思われる。そして，数学的問題解決という文脈では，問題文を記述する言語的表現と解法や問題場面が記述される記号的表現を媒介するものとして，図的表現が位置づけられることが多いのも事実であろう。

このように，数学的問題解決において図的表現は重視される存在だが，例えば，その指導可能性などを志向して，「一般に図的表現にはどのような種類があるのか」等々を考え出すと，かなり厄介な問題になるだろう。というのも，「図」という用語が指す外延はそれほど明確ではないし，その内包も抽象的に語らざるを得ないが故に明確な分類は困難になると思われるからである。例えば，中原（1995）は図的表現に関して８つの分類を施しているが，それでもなお「この分類は基本的視点に基づくものであり，この種の分類の常としてやはり境界領域を厳密に定めることが難しいことやいずれにも入りにくいもの（例えば，挿絵）がある」（pp.232 − 234）としており，その分類の困難性を指摘している。さらに，問題解決過程を記述しようとする立場からしても，解決者が生成する様々な図的表現を分類することは，それなりに困難な作業になることが予想される。

結局，そうした図全体を措定するかのような分類作業や分析の枠組み作りから始めるのは，特に実践に関わる研究では有効な方法論ではないように思われる。むしろ，数学的問題解決に文脈を限定しつつ，「問題解決に頻繁に利用され適用範囲の広い有用な図的表現は無いものだろうか」と素朴に考え，そのような図的表現を具体的にピックアップし，それらのバリエーションを広げつつ，その特徴付けや指導可能性を考えることも重要だと思われる。

本稿は，敢えてそうした素朴な問題意識と方法論を採用し，数学的問題解決の指導を考慮した立場から，数学的問題解決に有用と目される汎用的な図的表現の幾つかをピックアップすることを試みるものである。

2．問題の所在

2．1．数学的問題解決における数学的構造への着目：絵と図の違い

前述のように，数学的問題解決の文脈では図的表現は馴染みのある存在であるが，問題解決研究で頻繁に取り上げられる同種の表現には，絵というものもある。例えば，問題解決ストラテジーの指導に関わるに研究においても，両者は「絵や図をかく」のように同列に扱われることがしばしばであるし（例えば，大須賀他，1986），日常言語においても両者の区別は曖昧で，同一のカテゴリーとして括られることもある。

ところが，英語には両者に相当する単語として，例えば，picture（絵，写真），drawing（線画，図画，製図），diagram（図式）のようなものがあり，これらの意味するところを参考にして絵と図の特徴を抽出すれば，ある程度両者の区別をつけることもできる。まず，pictureやdrawingは，対象の表面的な特徴を描くようなものを指し，それが写真のような詳細部まで描かれるのであればpicture，主に線で描かれるようなものであればdrawingということになる。我々は，これらを一般に絵と呼ぶことが多く，両者の違いは，その表面的特徴の捉え方・描き方にあると思われる。そうした表面的特徴の捉え方・描き方に関して言えば，diagramは，対象の表面的な詳細部を捨象し，その注目しようとする構造的特徴（例えば，要素間の関係）だけを表現したものを指すことが多い。例えば，列車の運行ダイヤグラムなどはその典型であり，そこには列車の詳細などは記述されず，停車駅（列車の位置）と時刻の関係だけを表す一種の距離－時間グラフがあるだけである。そして，少なくともこれらは図と呼ばれることになろう［1］。

こうした英語の区別を借りれば，描き出そうとしている対象に関して，その表面的特徴をある程度詳細に描こうとしているものを「絵」，その構造的特徴だけを抽象的に描こうとしているものを「図」と区別できるかもしれない。もちろん，数学的問題解決の研究では，例えば，情景図のようなものも図に分類されることがあるし（例えば，中原，1995），問題解決におけるそうした情景図に類する図的表現の有効性を示す研究（例えば，菊池，1996）や問題解決過程におけるその利用の実態を検討する研究（例えば，廣井，2003）もある。しかし，これらは上記の区別に従えば，いずれも絵に近いものになるだろうし，議論の焦点化のためにも，考察の対象を典型的な図（例えば，線分図のようなもの）に絞ることは賢明な措置であろう。そして，数学的問題解決に有用な図は，当然ながら何らかの数学的構造に焦点を当て，その構造を抽象的に表現しているものであろう。グラフのように慣習的規約の制限が強くはないが，伝統的に特定の数学的構造と結び付いた図は多いと思われるし，まずはそうした図をピックアップすることから作業を始めることは，実践的には有効な方法だと思われる。

2．2．数学的問題解決における多様な図の介在の可能性

前節では，英語の意味の違いを利用して絵と図の違いについて考察し，考察の対象を数学的構造に結びつく抽象的な図に限定する作業を行ったが，単純な適用問題の解決を想定するだけでは，問題解決にそうした図が多様な形で介在することが想像できないかもしれない。しかし，例えば，「５チームが総当たり戦を行うと全部で何試合が行われるか」という問題を考えてみよう。

この組合せ問題は，一般的には，組合せの公式を学ぶ高校生用の適用問題として理解されるものかもしれない。しかし，この種の問題を初めて目にする中学生でも，様々な考え方や表現を使うことで，この問題を解決できることが知られている（例えば，吉田，1991；清水・山田，2003）。例えば，5つの丸をチームに見立てて五角形状に配置し，各々の丸から他の丸に重複を許して線を引けば，（5×4）／2＝10という式が導出されるが，この式は正に組合せの公式${}_5C_2$に繋がるものである（図1）。また，2次元の組合せや関係を図示する5×5の勝敗表をかいたり（図2），5つの丸を重複させずに系統的に結ぶと（図3），4＋3＋2＋1　という一般化可能な式表現に至る。さらに，こうした洗練された方法・表現に至らず，系統性を考慮せずに単純に5つの丸の繋がりだけを考えて線を結ぶ図（図4）でも，確認のための図をかき直す中で図3のような系統的な線の結び方に気づくことはある。

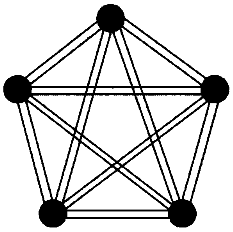
図1

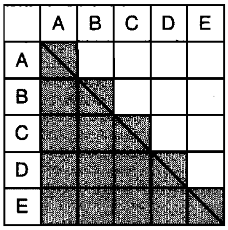

図2

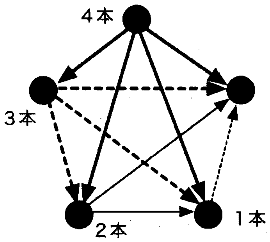

図3

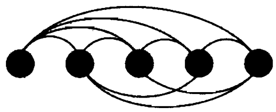
図4

この例に見られるように，数学的な問題解決では，式に代表される伝統的な形式的・記号的表現に直接は繋がらないものの，特定の数学的構造と結びついた図が多様な形で使われる可能性は多々ある。さらに，例えば，チーム数が30になった場合には，一般化に繋がるような図や考え方を使わない限り解答が難しくなるため，場合によってはそうした目的に適った図の構成と洗練が重要であることも理解できよう。

2．3．数学的構造と結びついた問題解決に有用で汎用的な図

上記の例のように，数学的な問題解決では，時として特定の数学的構造と結びついた図の構成が鍵となる。もちろん，数学的問題解決研究の文脈では，そうした図を解決者が描かない（描こうとしない）こと（Lopez-Real & Veloo, 1993）や構成できないこと（土居下他，1986）が問題になることがある。また，解決者が構成する素朴な図を解決過程の中で変容させることで情報の生成・総合や問題の意味づけの変容が進行することの重要性が指摘されることもあり（布川，1993；Nunokawa, 1994），これらはいずれも重要な指摘である。しかし，Diezmann（2000）も指摘するように，そもそも児童・生徒が図の概念をどれほど持ち合わせているかは重要な問題であろう。

例えば，図がある程度使えるためには，図とはどのようなものを指し，どのような特性（例えば，2.1節で指摘したような特性）を備えたものか等々を直観的に理解しているかは重要と思われるが，多くの児童・生徒がそうした一般的な理解には及んでいるとは限らないし，ともすると絵と図の直観的な区別もつかないことは容易に想像がつくだろう。また，図の例も線分図などのように極端に狭い範囲で，しかも特定の問題群に結びついた形でしか理解していない可能性も

ある（例えば，面積図を鶴亀算を解決する時の解法の一部としてしか理解していない場合などは，その典型であろう）。

とすれば，児童・生徒には，ある程度，図の概念を理解させることが重要になろうし，少なくとも図を提示しようとする際には，教師側にそうした意識が必要になってくる。例えば，そもそも図とは何かについてのアイデア，表面的特徴ではなく構造的特徴を優先して抽象的に描くという特徴，特定の数学的構造やアイデアとの繋がりについての意識等は，教師側に理解されており，指導に際しては，その都度強調されなければならないだろう。そして，さらに進んで，その使われる場面と使い方，その効用（なぜ図を使うのか）などについても，多数の同種の数学的構造を持つ問題群に結びつけて，意図的な指導がなされるべきだろう［2］。

しかし，それは当然，「そのような図にはどのようなものがあるのか」という問題に突き当たり，結局，「問題解決に頻繁に利用され適用範囲の広い有用な図的表現は無いものだろうか」という最初の素朴な疑問に行き着くことになる。ただし，そうした図にはどのようなものがあるかに関しては，Diezmann & English（2001）の先行研究が参考になる。次章では，彼女たちの研究をもとに，議論を広げることにしてみよう。

3．数学的問題解決に有用で汎用的な図の例

Diezmann & English（2001）は，Novick，Hurley，& Francis（1999）の研究を参考に，算数・数学で重要な適用範囲の広い図を４つ取り上げ，それらの明示的な指導を取り入れた研究を行っている。以下では，それら４つの図を紹介し，それらがどのような数学的構造と結びついているか，また解決に際して当該の図を用いると有効な問題例について議論してみることにする。

<u>ネットワーク</u>

ネットワークとは，「駅の地図のような，ノード（点）と各ノードを結びつけるそこから出ている線からなる図」（Diezmann & English，2001，p.79）のことであり，数学的な構造としては「関連」を表すものであろう。もちろん，この図は，要素間の繋がりや因果の図示など，その用途は幅広く，先の図１，図３，図４などは，典型的なこの図の例になる。ただし，Diezmann & English（2001）は，「コマドリは５日毎に，スズメは３日毎に，餌場にやってくる。今日，コマドリとスズメの両方が餌場にやってきた。コマドリとスズメの両方が再び同じ日にやってくることになるのは，何日後だろうか？」（p.79）という問題に対する図５のような線画も，ネットワークの範疇としている。また，割合の学習の場面などで登場する「関係図」なども，この図の範疇と考えてよいだろう。

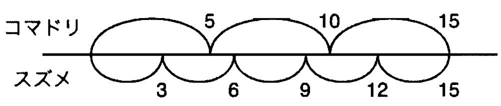

図５：小鳥の問題に対するネットワーク図の例
（Diezmann & English（2001，p.79）の改編）

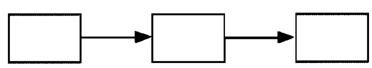

図６：関係図の例

マトリクス

マトリクスとは，「２つの情報の集合間の関係を表す２次元の図」（Diezmann & English, 2001, p.79）のことであり，一般的な数学的な構造としては「２次元の直積構造」を表すものになろう［３］。先の図２はこの典型例であり，２次元の組合せの問題の解決には非常に有用なものになる。我々はこの種の図を「表」と呼ぶことが多いが，関数的な文脈で使われるものとは異なるため注意が必要であろう［４］。またこの図は，複数の条件に適合する要素などを求めるようなマッチング問題を考える際にも有用である。例えば，次のような問題を考えてみれば，図７のような図で考えることがいかに有効であることが分かるだろう。

A，B，C，Dの４人がテニスをした。総当たり戦で１回ずつテニスをしたところ，３人が２勝１敗となって。また，BはAに勝ち，CはBに勝ち，DはCに勝ったという。次の(1)～(3)で正しいものはどれか。

(1) AはCに勝った。

(2) AはDに勝った。

(3) BはDに勝った。

	A	B	C	D
A		×	×	×
B	○		×	○
C	○	○		×
D	○	×	○	

図７

階層（ヒエラルキー）

階層とは，「一揃いの点と，それらの間で分岐・収束するパスで構成される」（Diezmann & English, 2001, p.80）階層的な図のことを指し，数学的な構造としては「多次元の順序・直積関係」や「階層構造」を表すものになろう。樹形図はこの典型であり，例えば，「１～３までの数字の書いてあるカード２枚を使って２桁の整数を作るとき，２桁の整数は全部で何通りできるか」という問題などでは，この種の図が有効に機能することになるし（図８），場合分けを考える場合も有用であろう。

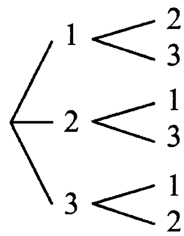

図８

部分－全体

部分－全体とは，「部分と全体との間の関係を表す」（Diezmann & English, 2001, p.81）図のことであるが，彼女たちによれば，それらは上の３つとは対照的に，「容易に認識可能な外形」（p.81）を持つものではないという。例えば，彼女たちは，「Janeは，公園で犬を連れて散歩している人々を見た。彼女が全ての足を数えてみると，全部で48本あった。公園には何人の人と何匹の犬がいたのか？他の解答はあるか？」という問題に対して，各人が１匹ずつの犬を連れている場面として図９のような生徒の図を紹介している。この図は，個々の足（点）を部分と見て足（点）全体を全体と見るとか，線分で括られた２本足（２点）や４本足（４点）を部分として見て48本の足（点）を

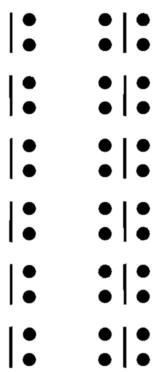

図９

全体と見るとか，様々な部分－全体関係を読み取ることができる。
しかし，典型的な図という意味でも，またどのような数学的構造と繋がっているかを考慮する意味でも，多少違和感があるところだろう。むしろ，部分－全体関係は，典型的には「加減構造」と結びついており，その意味では図10（a）のような図や図10（b）のような両端が閉じた線分図，さらにはベン図・オイラー図のような図（図10（c））の方が，我々には馴染みがあるものと思われる。そして，我が国の加減文章題解決では，この種の図をかくよう指導されるのが典型であろう。

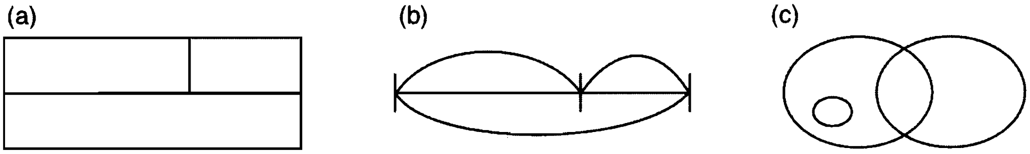

図10

以上が，Diezmann & English（2001）が紹介する図のカテゴリーであるが，これらは元々「数学的」問題解決に限らない思考・問題解決一般で有用な図としてNovickら（1999）が取り上げてきたものである。しかし，これまで議論してきたように，数学的問題解決で有用と目される図のピックアップには，それがどのような数学的構造と結びついているかが重要なポイントであった。その点では，例えば，上記の「加減構造」と並んで重視されなければならない「乗除構造」と結びつくような図を挙げておかなければならないだろう。

<u>比例数直線</u>

我が国で単純なかけ算場面や２量の比例的関係を表すために使われる最も典型的な図形は，２本の（それぞれが特定の量空間を表す）数直線からなる比例数直線［５］であろう（図11（a））。また，そこに登場する４項（あるいはそれ以上）間の比例関係を際立たせようとする場合には，Vergnaud（1983, 1996）が使う図11（b）のような図式が使われることもある。

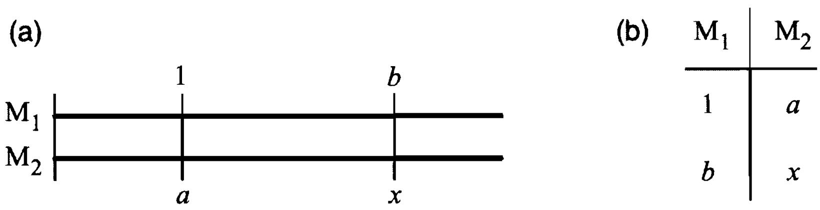

図11

図 11 に即して典型的な問題を考えるなら，例えば，「１個 a 円のアメを b 個買った時の代金はいくらか」といった問題になろう。しかし，乗法の意味は複雑であり，様々な乗除の意味を包含しようとするとこの種の図だけでは無理になる。例えば「Ｔシャツ３枚とズボン２着があるときの服の組合せは何通り」のような問題に対しては，むしろマトリクスやアレイ図が使われるのが常であろう（この種の乗法構造一般についての議論は，Vergnaud（1983）で詳述される）。

4．議論

前節では，Diezmann & English（2001）の研究を中心に，数学的問題解決に有用と目される汎用的な図を幾つかピックアップした。ここでは，数学的問題解決の指導を考える立場から，これらの図に関わって幾つかの議論を試みる。

第一に，一見同一カテゴリーに含まれないような図を同一カテゴリーに分類していることの違和感について弁明をしておきたい。例えば，本稿では，図６の関係図をネットワークに含めている。関係図は，我が国の教科書では，割合に関する場面で使われることが多いため，むしろ乗法構造を示すような図にカテゴライズされるべきだと思われるかもしれない。しかし，関係図は本来，ある種の操作を施すその前後の要素の繋がりを示しているだけであり，それを偶々我が国では乗法的な場面で使うことが多いため（加法構造を示す図が専ら線分図に限定されているため），乗除構造と繋がったような図として認識されることも多いのだろう。例えば，Vergnaud（1996）は，時間軸に沿った順序の表現として図12（a）のような図（初期状況，第一の変換，中間状況，第二の変換，最終状況）を挙げ，実際，加法的な変化の場面における情報の組織化にこの図を使った例として図12（b）のような図を挙げている。

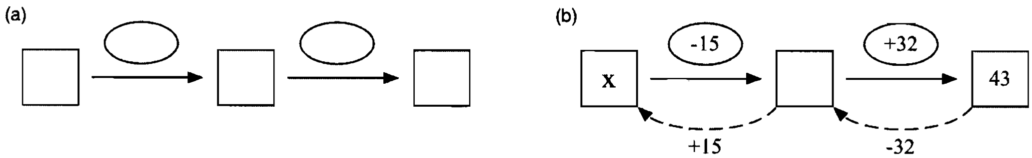

図12

時間的な変化には乗法的なものもあれば加法的なものもあり，加減・乗除のような数学的な構造を重視する場合には，それぞれ部分－全体や比例数直線を使えばよいのだろうが，より一般的に，ある操作を特定の対象に施したときの時間的な変化を示すような場合には，ネットワークの方が優れているように思われる。もちろん，そうした捉え方が加減・乗除に優先する数学的構造かといえば議論の余地はあるが，例えば，演算を関数的なものと見れば，こうした見方もそれほど特殊ではないだろう。そして，そうした理論的な観点よりむしろ，数学的問題解決の指導を考える立場からすれば，児童・生徒がどちらの図を好むかを適宜選択させるということを考えた方がよいだろう。例えば，「ジュースが何dLかあって，２dLを飲んだときの残りが３dLだったとすると，始めに何dLあったのか？」のような量の加法的な時間的変化を考える問題場面において，時間的な側面を捨象できるのであれば部分－全体を表す見慣れた線分図や図10（a）の図を使えばよいが，可逆的な思考や問題場面における時間的側面を捨象した考えができない児童にとっては，ネットワークに類する図（例えば図12（b）に類する図）が好まれるかもしれない。

こうした図の選択を指導の場面で議論することは，当然「図についての議論」に及ぶことになり，図は次第に教師が説明するためのものというより，児童・生徒が考えるためのものとなっていくことが期待できる。先に，児童・生徒が図の概念をどれほど持ち合わせているかは疑わしい

と述べたが，図が与えられてしまっており，それを使うよう強要されれば，「図とはどのようなものか」といった疑問が出てくるかは疑わしいところであろう（もちろん，図のかき方などの指導が無いことよりは，はるかによい状況であることは言うまでもない）。

第二に注意すべきは，例えば教科書等で標準的に使用されているような図がどのような数学的構造と結びつきうるかを，少なくとも教師側は強力に意識して使用しなければならないということである。例えば，図11の２つの図は，両者とも２量間の比例関係に基づく４項（１を暗黙的なものとすれば３項）の乗除関係を示す図であった。これらは一見別物のように見えるかもしれないが，最終的な形状が異なるだけであり，本質的には同じことを表すことが意図されている。同一の数学的構造を表す図の候補が複数ある場合，それらのうちのどれを使うかは，実際には本質的な問題ではないかもしれないし，コミュニケーションに支障を来さない範囲で，ある程度選択の余地はあってもよいだろう（特に，児童・生徒側にはそうだろう）。しかし，逆に考えて，形状の異なる２つの図が同じような数学的構造を表していることについて，例えば教師側が判断できなければ当然ながら指導に困難が生ずる。例えば，分数のわり算の計算を考える教科書紙面では，図13（a）のような図が示されることがしばしばであるが，この図は図13（b）の上側の直線の示す量を面積図にしたに過ぎず，これらを別物として扱えば児童には混乱が生ずるかもしれない。

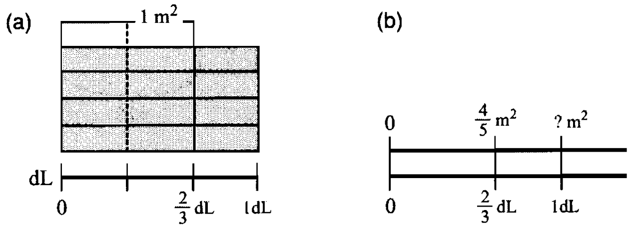

図13

こうした同一の数学的構造に繋がる図を同じものとして見る見方は，多数の図をそれが表している数学的構造の立場からまとめるという作業を経ることで獲得してもよいのかもしれないが，本稿では，まず典型的な図をピックアップすることから始め，それがどのような数学的構造や問題群に繋がるかを考えて，その後，他の類似の図を考えるという方法論を採用した。これは，包括的な議論に至らないが，ある意味では堅実な方法ではあるだろう。

5．おわりに

本稿は，数学的問題解決には図をかくのが有効とされているが，そもそも児童・生徒は図について必ずしも体系的に指導されているわけではないし，特定の図と数学的構造との結びつきが意識されているかも疑問である，という問題意識を背景にしたものであった。研究課題の設定は，「それでは数学的問題解決に頻繁に利用され適用範囲の広い有用な図的表現は無いものだろうか」という素朴なものでものであったが，具体的な図についての議論を積み上げることが可能であるため，実践的には有効な方法論であるように思われる。

具体的な作業にあたっては，差しあたりDiezmann & English（2001）の研究を中心に，数学的問題解決に有用と目される汎用的な図を５つピックアップし，それぞれについて問題解決指導の文脈を考慮して議論してきたが，当然ながら他の候補もあると思われ，それらを堅実に積み上げていくことがまずもっての今後の課題である。また，図の指導については具体的な議論はできなかった。Diezmann & English（2001）は，「図の利用法（diagram use）について知っており，その知識を適切に使えることを，ダイヤグラム・リテラシー（diagram literacy）という用語で呼び」（p.77），本稿で取り上げたような一般的・汎用的な図に関する指導を一種のリテラシーの指導として位置づけているが，そうした議論も含めて，数学的問題解決の観点から見た図の指導の枠組みに関する議論は，今後の大きな課題である。

注

[1] ただし，日本語のニュアンスでは，図がそうしたものだけを指すとは言い難いのが現実であろう。

[2] 実際には，図に関するある程度の指導をした後でもなお，図をかくことについては様々な困難性がつきまとうことが報告されている（Diezmann，2000）。だとすれば，明示的な指導がない場合，多くの児童・生徒にとって図をかくことが困難だというのは当然のこととなり，「絵や図をかけ」という問題解決ストラテジーが，肝心の図に関する指導が無いままでは有効に機能しないのも頷けるところであろう。

[3] 「２次元の直積構造」という特徴付けであれば，２次元の座標系も含まれてしまうことになろう。日常的な指導では，この種の直積構造を表す表とグラフは区別されがちであるし，実際の使われ方もかなり異なるのだが（例えば，ここでの問題例では，特定の順序対に対する，勝ち，負け，試合無しの値の付与のされ方を示しているが，関数・関係を表すグラフであれば直積集合の特定の部分集合を図示するものになる），ここでは数学的問題解決の文脈をより広範囲に考えるために，敢えてより抽象的な立場からの特徴付けを行った。

[4] つまり，表している数学的構造が異なるため，敢えて「マトリクス」という表現を使うのも選択の一部と考えてよいと思われるのである。

[5] この種の数直線に特定の呼び方があるか否かについては不明である。単純に「数直線」と呼ばれることもあるし，「線分図」と呼ばれることもある。ここでは，２量間の比例関係を基盤にした乗法構造の一部との繋がりを意識して，暫定的に「比例数直線」と呼んでいる。

引用・参考文献

大須賀康宏・石田淳一・愛知県幸田小学校（編著）（1986）.『楽しく学べる算数の問題解決ストラテジー：理論と実践・すぐ使える100の教材例』. 東洋館出版社.

菊池光司（1996）.「算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究」.『日本数学教育学会誌：算数教育』，第78巻，第12号，2-7.

清水紀宏・山田篤史（2003).「数学的問題解決における自己参照的活動に関する研究（VII）：問題解決終了後の「ふり返り」活動について」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第9巻, 127-140.

土居下晃宏・志水廣・植岡利之・一崎満夫（1986).「問題解決における方略の指導：絵や図についての児童の実態調査と実践」.『日本数学教育学会誌：算数教育』, 第68巻, 第4号, 18-22.

中原忠男（1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.

廣井弘敏（2003).「小学校5年生に見られる図による問題把握」.『日本数学教育学会誌：算数教育』, 第85巻, 第6号, 10-19.

布川和彦（1993).「数学的問題解決における図の役割と解決者による意味づけ」. 三輪辰郎先生体感記念論文集・編集委員会（編),『数学教育学の進歩』(pp.303-320). 東洋館出版社.

吉田稔（1991).「日本の算数・数学授業についての覚書　－共通題目による日米の授業比較を通して－」(pp.181-206). 三輪辰郎（編),『数学的問題解決に関する日米共同研究研究成果報告書』. 筑波大学.

Diezmann,C.M. (2000) . The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. In T.Nakahara & M.Koyama (eds.) , *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol.2* (pp.241-248) . Hiroshima, Higashi-Hiroshima: Hiroshima University.

Diezmann,C.M. & English,L.D. (2001) . Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A.A.Cuoco & F.R.Curcio (eds.) , *The role of representation in school mathematics: NCTM 2001 Yearbook* (pp.77-89) . VA,Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Lopez-Real,F. & Veloo,P.K. (1993) . Childre's use of diagrams as a problem-solving strategy. In I.Hirabayashi, N.Nohda, K.Shigematsu, & F.-L. Lin (eds.) , P*roceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol.2* (pp.169-176) . Ibaraki, Tsukuba: University of Tukuba.

Novick,L.R., Hurley,S.M., & Francis,M. (1999) . Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial *diagram representations. Memory & Cognition, 27* (2) , 288-308.

Nunokawa,K. (1994) . Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics, 14* (1) , 34-38.

Vergnaud,G. (1983) . Multiplicative structures. In R.Lesh & M.Landau (eds.) , *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174) . Orlando,FL: Academic Press.

Vergnaud,G. (1996) . The theory of conceptual fields. In L.P.Steffe, P.Nesher, P.Cobb, G.A.Goldin, & B.Greer (eds.) , *Theories of mathematical learning* (pp.219-239) . Mahwah,NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：22530963）の助成を受けたものである。