イプシロン　2009. Vol. 51, 43-52

累乗和の公式について

愛知教育大学　小 谷 健 司

1 序

この論文では, 正の整数 r, n に対して

$$S_r(n) = 1 + 2^r + 3^r + \cdots + (n-1)^r + n^r \tag{1}$$

で定義される多項式を r **乗和の多項式**ということにします。$r = 1, 2, 3$ については,

$$S_1(n) = \tfrac{1}{2}n(n+1), \quad S_2(n) = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2}), \quad S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2. \tag{2}$$

を高校「数学 B」で学習するので, 読者のみなさんもよく知っていることでしょう。高校では学習しませんが, r が 10 までの r 乗和の多項式は下のようになります：

$$\begin{aligned}
S_4(n) &= \tfrac{1}{5}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})(n^2+n-\tfrac{1}{3}),\\
S_5(n) &= \tfrac{1}{6}n^2(n+1)^2(n^2+n-\tfrac{1}{2}),\\
S_6(n) &= \tfrac{1}{7}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})(n^4+2n^3-n+\tfrac{1}{3}),\\
S_7(n) &= \tfrac{1}{8}n^2(n+1)^2(n^4+2n^3-\tfrac{1}{3}n^2-\tfrac{4}{3}n+\tfrac{2}{3}),\\
S_8(n) &= \tfrac{1}{9}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})(n^6+3n^5+n^4-3n^3-\tfrac{1}{5}n^2+\tfrac{9}{5}n-\tfrac{3}{5}),\\
S_9(n) &= \tfrac{1}{10}n^2(n+1)^2(n^6+3n^5+\tfrac{1}{2}n^4-4n^3+\tfrac{1}{2}n^2+3n-\tfrac{2}{3}),\\
S_{10}(n) &= \tfrac{1}{11}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})(n^8+4n^7+\tfrac{8}{3}n^6-6n^5-\tfrac{10}{3}n^4+8n^3+\tfrac{2}{3}n^2-5n+\tfrac{5}{3}).
\end{aligned} \tag{3}$$

残念ながら, r が 4 以上の場合は有理数の範囲内で 1 次式の積に因数分解できません。でも, これらの式を見て簡単に気づくことがあります。**r 乗和の多項式は, r が 2 以上の偶数の場合は $n(n+1)(n+\frac{1}{2})$ を, r が 3 以上の奇数の場合は $n^2(n+1)^2$ を因数にもつことです。**

この論文の第 2 節では, 上の事実を高校「数学 B」の範囲でわかるように証明します。第 3 節では, 多項式の積分を使って r 乗和の公式を簡単に求める方法と r 乗和の公式について説明します。第 4 節では, 累乗和の多項式のグラフの形について調べます。第 5 節では, 累乗和の方程式 $S_r(x) = 0$ の実数解・虚数解の個数について調べます。この論文は高校数学の知識で理解できるよう書きました。また, 第 3 節と第 4 節の一部で「数学 III」の知識を使っている以外は「数学 II・数学 B」の範囲で理解できるようにしたつもりです。

2 累乗和の多項式の因数

r 乗和の多項式の性質を調べるために, $S_r(x)$ の x を正の整数に限らず, 実数として考えたいと思います。しかし, 式 (1) の左辺は正の整数に対してしか意味を持ちません。そこで, 式 (1) の代わりになる式が必要です。それが次の定理です。

定理 1. $S_r(x)$ が r 乗和の多項式であるための必要十分条件は, すべての正の整数 x に対して

$$S_r(x) - S_r(x-1) = x^r \tag{4}$$

と $S_r(0) = 0$ が成り立つことである。

証明. r 乗和の定義から式 (4) が導かれることは明らかです。この式に $x = 1$ を代入すると $S_r(0) = 0$ が導かれます。

逆に, 式 (4) の x に $1, 2, 3, \cdots, x$ を代入すると右のようになります。それらを足し合わせると, 左辺の項が次々に消えていって, $S_r(x)$ が r 乗和と等しいことがわかります。 □

$$\boxed{\begin{aligned} S_r(1) - S_r(0) &= 1^r \\ S_r(2) - S_r(1) &= 2^r \\ S_r(3) - S_r(2) &= 3^r \\ &\vdots \\ S_r(x) - S_r(x-1) &= x^r \end{aligned}}$$

定理 1 で「すべての正の整数 x に対して」と主張していますが, これは「すべての実数 x に対して」と読み替えてもかまいません。なぜなら, すべての正の整数に対して成り立つ多項式の等式は, つねに成り立つ式 (恒等式) だからです。(詳しいことは第 5 節に書いてあります。) 試しに, 式 (4) に $x = 0$ を代入すると, $S_r(-1) = 0$ を導くことができます。さらに, 式 (4) の x に $-x$ を代入すると, 次の式を導くことができます:

$$S_r(-x) - S_r(-x-1) = (-x)^r. \tag{5}$$

この公式を使うと, 次のような強力な定理が簡単に証明できます。

定理 2. (i) $S_r(x)$ は, r が奇数のとき $(x + \frac{1}{2})$ の偶関数, r が偶数のとき奇関数になる。
(ii) $S_r(x) - \frac{1}{2}x^r$ は, r が奇数のとき偶関数, r が偶数のとき奇関数になる。

証明. (i) $P(x) = (-1)^{r+1}S_r(-x-1)$ とおくと, これは $P(0) = 0$ を満たします。さらに, 式 (5) より, すべての正の整数 x に対して $P(x) - P(x-1) = x^r$ が成り立ちます。よって, 定理 1 より, 次の等式が成り立ちます:

$$(-1)^{r+1}S_r(-x-1) = S_r(x). \tag{6}$$

この式は次のように変形することができます:

$$S_r(-(x+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}) = (-1)^{r+1}S_r((x+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}). \tag{7}$$

これは (i) の主張が成り立つことを示しています。

(ii) 式 (5), (6) を使うと, 次の式を導くことができます：

$$S_r(-x) - \tfrac{1}{2}(-x)^r = (-1)^{r+1}\{S_r(x) - \tfrac{1}{2}x^r\}. \tag{8}$$

これは (ii) の主張が成り立つことを示しています。 □

定理 2 の内容を具体例で確かめてみます。

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x &&= \tfrac{1}{2}\{(x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\},\\
S_2(x) &= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x &&= \tfrac{1}{3}\{(x+\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{4}(x+\tfrac{1}{2})\},\\
S_3(x) &= \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 &&= \tfrac{1}{4}\{(x+\tfrac{1}{2})^4 - \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{16}\},\\
S_4(x) &= \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x &&= \tfrac{1}{5}\{(x+\tfrac{1}{2})^5 - \tfrac{5}{6}(x+\tfrac{1}{2})^3 + \tfrac{7}{48}(x+\tfrac{1}{2})\},\\
S_5(x) &= \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2 &&= \tfrac{1}{6}\{(x+\tfrac{1}{2})^6 - \tfrac{5}{4}(x+\tfrac{1}{2})^4 + \tfrac{7}{16}(x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{3}{64}\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

定理 2 (i) より, $y = S_r(x)$ のグラフは, r が偶数のとき点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称, r が奇数のとき直線 $x = -\frac{1}{2}$ に関して対称になります。この事実を使うと, 下の定理が簡単に証明できます。

定理 3. (i) $r\ (\geqq 2)$ が偶数のとき, $S_r(x)$ は $x(x+1)(x+\frac{1}{2})$ で割り切れる。
(ii) $r\ (\geqq 3)$ が奇数のとき, $S_r(x)$ は $x^2(x+1)^2$ で割り切れる。

証明. (i) $S_r(0) = 0$ より $S_r(x)$ の定数項は 0 になり, $S_r(x)$ は x で割り切れます。関数 $y = S_r(x)$ のグラフが $(0,0)$ を通るのだから, 点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称より, $(-1, 0)$ も通ります。よって, $S_r(x)$ は $(x+1)$ でも割り切れます。さらに, 関数 $y = S_r(x)$ のグラフは点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称より, $(-\frac{1}{2}, 0)$ を通ります。よって, $S_r(x)$ は $(x+\frac{1}{2})$ でも割り切れます。

(ii) $S_r(0) = 0$ より $S_r(x)$ の定数項は 0 になり, さらに, $S_r(x) - \frac{1}{2}x^r$ は偶関数より, 1 次の項も 0 になります。よって, $S_r(x)$ は x^2 で割り切れます。関数 $y = S_r(x)$ のグラフが $(0,0)$ で x-軸に接するのだから, 直線 $x = -\frac{1}{2}$ に関して対称より, $(-1, 0)$ でも x-軸に接します。よって, $S_r(x)$ は $(x+1)^2$ でも割り切れます。 □

定理 2 から, r が奇数のとき, $S_r(x)$ は $S_1(x)$ の多項式になることがわかります。例えば, $S_3(x) = (S_1(x))^2$ です。また, 定理 2 と 3 から, r が偶数のとき, $S_r(x)$ は $S_1(x)$ の多項式と $S_2(x)$ の積になることがわかります。例えば, $S_4(x) = \frac{6}{5}(S_1(x) - \frac{1}{6})S_2(x)$ です。これらの事実は J. Faulhaber (1580~1635) が発見し, C. Jacobi (1804~1851) が証明しました。

累乗和の公式を最初に詳しく研究したのは Faulhaber ですが, 定理 4 で紹介する累乗和の公式を発見することはできませんでした。累乗和の公式は, Jacob Bernoulli (1654~1705) と和算家の関孝和 (1642~1708) によってほぼ同時期に発見されました。2 人とも, 研究成果が出版されたのは死後のことですが, 出版年は関の方が 1 年早かったようです。累乗和の公式を, 最初に詳しく研究した人の名をとって Faulhaber の公式と呼ぶこともあります。

この節のおもしろいところは, 正の整数だけで意味を持つ公式をそうでない数に拡張することによって, その公式の性質を詳しく調べていることです。数学ではしばしば, **元の意味を忘れてしまうことによって**, 研究対象をより深く調べることができます。

3 累乗和の公式を簡単に求める方法

この節では, 累乗和の公式の作り方を説明します。累乗和の公式を作る方法はいろいろありますが, 以下に説明する積分法を使った方法が最も簡単だと思います。3 乗和の公式までは高校で学習しているので, それを使って 4 乗和の公式を求めてみましょう。

例題. $S_3(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)^2$ は既知として, $S_4(x)$ を求めよ。

解. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3$ は $4S_3(x)$ の原始関数です. $x^3 = S_3(x) - S_3(x-1)$ なので, 両辺を 4 倍して積分すると, $x^4 = F(x) - F(x-1) + B_4$ となります. ただし, B_4 は積分定数です. $P(x) = F(x) + B_4$ とおくと, $P(x) - P(x-1) = x^4$ かつ $P(0) = 0$ を満たします. よって, 定理 1 より $S_4(x) = P(x)$ になります. $S_4(1) = 1$ となるように B_4 の値を定めると, $B_4 = -\frac{1}{30}$ になります。以上より, $S_4(x)\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$ です。 □

簡単に求めることができますね。上の方法を 1 つの式で表すと, 下のようになります：

$$S_r(x) = \int_0^x rS_{r-1}(u)\,du + B_r x. \tag{10}$$

ただし, B_r は $S_r(1) = 1$ となるよう定めます。式 (10) を微分すると, 次の式が得られます：

$$S'_r(x) = rS_{r-1}(x)\,du + B_r. \tag{11}$$

公式 (10) で次々に累乗和の公式を求めることができます。10 次までの累乗和の公式を求めると, 下のようになります：

$$\begin{aligned}
S_6(x) &= \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x,\\
S_7(x) &= \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{7}{12}x^6 - \tfrac{7}{24}x^4 + \tfrac{1}{12}x^2,\\
S_8(x) &= \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{2}{3}x^7 - \tfrac{7}{15}x^5 + \tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{1}{30}x,\\
S_9(x) &= \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{2}x^9 + \tfrac{3}{4}x^8 - \tfrac{7}{10}x^6 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{20}x^2,\\
S_{10}(x) &= \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{2}x^{10} + \tfrac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{5}{66}x.
\end{aligned} \tag{12}$$

定数 B_r は多項式 $S_r(x)$ の 1 次の項の係数になり, それらの値は下のようになります：

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1,\ B_1 = \tfrac{1}{2},\ B_2 = \tfrac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\tfrac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \tfrac{1}{42},\ B_7 = 0,\\
&B_8 = -\tfrac{1}{30},\ B_9 = 0,\ B_{10} = \tfrac{5}{66},\ B_{11} = 0,\ B_{12} = -\tfrac{691}{2730},\ B_{13} = 0,\ B_{14} = \tfrac{7}{6},\\
&B_{15} = 0,\ B_{16} = -\tfrac{3617}{510},\ B_{17} = 0,\ B_{18} = \tfrac{43867}{798},\ B_{19} = 0,\ B_{20} = -\tfrac{174611}{330},\ \cdots
\end{aligned} \tag{13}$$

これらの数は, 発見した Bernoulli の名をとって**ベルヌーイ数**と呼ばれています。(関孝和も同時期にベルヌーイ数を発見しています。) ベルヌーイ数の定め方には流儀がいくつもあって, 最近では $B_1 = -\frac{1}{2}$ と定める人が多いのですが, この論文では $B_1 = \frac{1}{2}$ を採用することにします。$r \geqq 3$ が奇数のとき, $B_r = 0$ となることは定理 3 からすぐにわかります。 $r > 0$ が 4 の倍数のとき $B_r < 0$ となり, r が 4 の倍数 +2 のとき $B_r > 0$ となることは第 4 節で証明します。

ベルヌーイ数を使うと, 累乗和の多項式を次のように表すことができます。

定理 4. $S_r(x) = \dfrac{1}{r+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{r} {}_{r+1}C_i\, B_i\, x^{r+1-i}.$

証明. 数学的帰納法で証明します。$r = 1$ のときは, 次のように確認できます：

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\left({}_2C_0B_0x^2 + {}_2C_1B_1x \right) = \frac{1}{2}(x^2 + x). \tag{14}$$

次に, $r = k-1$ のとき等式が成り立つと仮定します。すると, 式 (10) より,

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \int_0^x \Big(\sum_{i=0}^{k-1} {}_kC_i\, B_i\, u^{k-i} \Big)\, du + B_k x = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+1-i}\, {}_kC_i\, B_i\, x^{k+1-i} + B_k x \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} {}_{k+1}C_i\, B_i\, x^{k+1-i} \qquad \Big(\because\ \frac{k+1}{k+1-i}\, {}_kC_i = {}_{k+1}C_i \Big). \end{aligned} \tag{15}$$

よって, $r = k$ のときも等式が成り立ち, 等式が証明できました。 □

式 (4) で $S_r(x)$ の 2 通りの表し方を示しましたが, $(x+\frac{1}{2})$ の多項式としての表し方にも定理 4 と同様の公式が成り立ちます。

定理 5. $S_r(x) = \dfrac{1}{r+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{r} {}_{r+1}C_i\, D_i\, (x+\tfrac{1}{2})^{r+1-i} + S_r(-\tfrac{1}{2}),$ ただし $D_r = rS_{r-1}(-\frac{1}{2}) + B_r.$

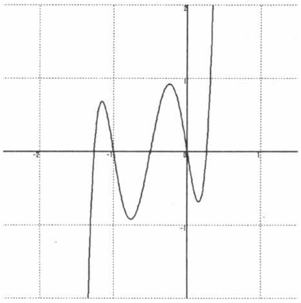
定理 5 の証明は定理 4 と同様なので省略します。D_r の値は以下のようになります：

$$\begin{aligned} &D_0 = 1,\ D_1 = 0,\ D_2 = -\tfrac{7}{4},\ D_3 = 0,\ D_4 = \tfrac{7}{240},\ D_5 = 0,\ D_6 = -\tfrac{31}{1344},\ D_7 = 0, \\ &D_8 = \tfrac{127}{3840},\ D_9 = 0,\ D_{10} = -\tfrac{2555}{33792},\ D_{11} = 0,\ D_{12} = \tfrac{1414477}{5591040},\ D_{13} = 0,\ D_{14} = -\tfrac{57337}{49152}, \\ &D_{15} = 0,\ D_{16} = \tfrac{118518239}{16711680},\ D_{17} = 0,\ D_{18} = -\tfrac{5749691557}{104595456},\ D_{19} = 0,\ D_{20} = \tfrac{91546277357}{173015040},\ \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

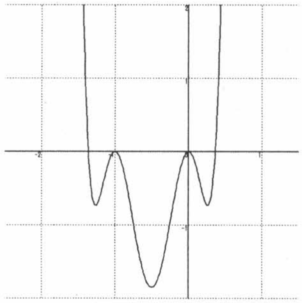
この論文では, 高校生にもなじみの深い累乗和の多項式 $S_r(x)$ を扱っていますが, 数学者の世界では $B_r(x) = rS_{r-1}(x-1) + B_r$ で定まる**ベルヌーイ多項式**を研究対象とすることが多いです。ベルヌーイ数は $B_r = B_r(0)$, 式 (15) の定数は $D_r = B_r(\frac{1}{2})$ で表すことができます。

4 累乗和の多項式のグラフ

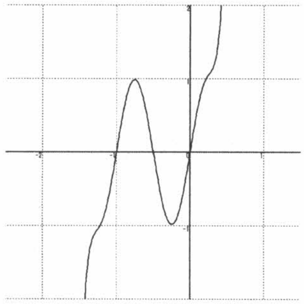
r 乗和の多項式 $S_r(x)$ のグラフはどのような形になるでしょうか？ $r = 4$ から 9 までの場合のグラフを次に示します。ただし, グラフの形が見やすくなるように, r が偶数の場合は $\dfrac{2\pi}{|B_r|}$, 奇数の場合は $\dfrac{4\pi^2}{r|B_{r-1}|}$ をかけてあります。(なぜこのような数をかけるかについては, 第 6 節を見てください。)



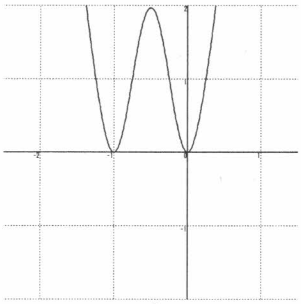
$y = \frac{2\pi}{|B_4|} S_4(x)$



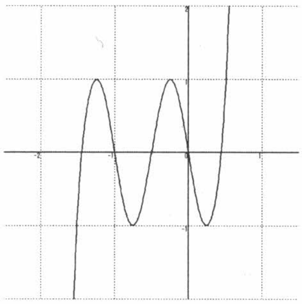
$y = \frac{4\pi^2}{5|B_4|} S_5(x)$



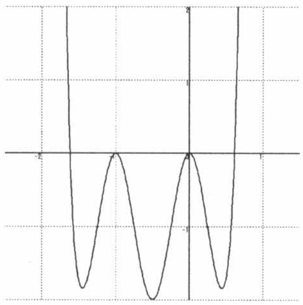
$y = \frac{2\pi}{|B_6|} S_6(x)$



$y = \frac{4\pi^2}{7|B_6|} S_7(x)$



$y = \frac{2\pi}{|B_8|} S_8(x)$



$y = \frac{4\pi^2}{9|B_8|} S_9(x)$

これらのグラフから, $-1 \leqq x \leqq 0$ の範囲において $S_r(x)$ のグラフの形が次のようになることが読み取れます。

定理 6. (i) $r > 0$ が 4 の倍数のとき, $S_r(x)$ は区間 $(-1, -\frac{1}{2})$ で負, 区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で正。

(ii) r が 4 の倍数 $+1$ のとき, $S_r(x)$ は区間 $(-1, 0)$ で負。

(iii) r が 4 の倍数 $+2$ のとき, $S_r(x)$ は区間 $(-1, -\frac{1}{2})$ で正, 区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で負。

(iv) r が 4 の倍数 $+3$ のとき, $S_r(x)$ は区間 $(-1, 0)$ で正。

証明. はじめに, (i), (iii) が成り立つことを数学的帰納法で証明します。$r = 2$ のときは, $S_2(x) = \frac{1}{3}x(x+1)(x+\frac{1}{2})$ より (iii) が成り立ちます。

$k > 0$ が 4 の倍数で, $r = k-2$ で (iii) が成り立つと仮定します。k は偶数なので, 式 (11) と $B_{k-1} = 0$ より, 次の式が成り立ちます：

$$S''_k(x) = k(k-1)S_{k-2}(x). \tag{17}$$

式 (17) より, $S''_k(x)$ は区間 $(-1, -\frac{1}{2})$ で正になり, $S_k(x)$ は下に凸になります。$S_k(x)$ は区間 $[-1, -\frac{1}{2}]$ の両端で 0, 内部で下に凸だから, 区間 $(-1, -\frac{1}{2})$ で負になります。定理 3 より $S_k(x)$ は点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称なので, 区間 $(-\frac{1}{2}, 0)$ で正になります。よって, $r = k$ のとき (i) が成り立ちます。同様の方法で, k が 4 の倍数 $+2$ で, $r = k-2$ で (i) が成り立つと仮定すると, $r = k$ のとき (iii) が成り立ちます。よって, 数学的帰納法により (i), (iii) が証明できました。

次に, (ii), (iv) が成り立つことを証明します。$r \geqq 3$ が奇数のとき, 式 (11) と $B_r = 0$ より, 次の式が成り立ちます：

$$S'_r(x) = rS_{r-1}(x). \tag{18}$$

r が 4 の倍数 +3 のとき, 式 (18) と (iii) より, 区間 $(-1, -\frac{1}{2})$ で $S'_r(x)$ が正になります。さらに $S_r(-1) = 0$ であるので, $S_r(x)$ は区間 $(-1, -\frac{1}{2}]$ で正になります。定理 3 より $S_k(x)$ は直線 $x = -\frac{1}{2}$ に関して対称なので, 区間 $(-1, 0)$ で正になります。よって, (iv) が証明できました。同様の方法により, (ii) も証明できます。 □

定理 7. (i) $r \geqq 3$ が奇数のとき $B_r = 0$.
(ii) $r > 0$ が 4 の倍数のとき $B_r < 0$.
(iii) r が 4 の倍数 +2 のとき $B_r > 0$.

証明. (i) は定理 2 (ii) よりわかります。

(ii), (iii) は数学的帰納法で証明します。$r = 2$ のときは, $B_2 = \frac{1}{6}$ より (iii) が成り立ちます。k が 4 の倍数で, $r = k - 2$ で (iii) が成り立つと仮定します。$B_k \geqq 0$ と仮定すると, $B_{k-1} = 0$, $B_{k-2} > 0$ より $S_k(x)$ は $x = 0$ の近くで単調増加になります。これは定理 5 (i) に矛盾します。よって, 背理法により $B_k < 0$ が証明できました。同様の方法で, k が 4 の倍数 +2 で, $r = k - 2$ で (iii) が成り立つと仮定すると $B_k > 0$ が証明できます。よって, 数学的帰納法により (ii), (iii) が証明できました。 □

定理 5 で定義した D_r についても同様の定理が成り立ちます。

定理 8. (i) r が奇数のとき $D_r = 0$, $S_{r-1}(-\frac{1}{2}) = 0$.
(ii) r が 4 の倍数のとき $D_r > 0$, $S_{r-1}(-\frac{1}{2}) < 0$.
(iii) r が 4 の倍数 +2 のとき $D_r < 0$, $S_{r-1}(-\frac{1}{2}) < 0$.

証明は定理 7 と同様なので省略します。

5　累乗和方程式の実数解・虚数解の個数

第 1 節で, $r = 1, 2, 3, \cdots, 10$ の場合に, 累乗和の多項式を因数分解した式を与えました。では, これらの式はこれ以上因数分解できるのでしょうか？ $r = 4, 5, 6, 7$ の場合に, $S_r(x)$ を無理やり因数分解すると下のようになります。

$$\begin{aligned}
S_4(x) &= \tfrac{1}{5}x(x+1)(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2})(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}),\\
S_5(x) &= \tfrac{1}{6}x^2(x+1)^2(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{21}}{6})(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{21}}{6}),\\
S_6(x) &= \tfrac{1}{7}x(x+1)(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2}-\alpha)(x+\tfrac{1}{2}-\bar{\alpha})(x+\tfrac{1}{2}+\alpha)(x+\tfrac{1}{2}+\bar{\alpha}),\\
S_7(x) &= \tfrac{1}{8}x^2(x+1)^2(x+\tfrac{1}{2}-\beta)(x+\tfrac{1}{2}-\bar{\beta})(x+\tfrac{1}{2}+\beta)(x+\tfrac{1}{2}+\bar{\beta}),\\
&\text{ただし,}\ \alpha = \sqrt{\tfrac{\sqrt{93}+9}{24}} + \sqrt{\tfrac{\sqrt{93}-9}{24}}\,i,\ \beta = \sqrt{\tfrac{3\sqrt{17}+2\sqrt{33}}{24}} + \sqrt{\tfrac{3\sqrt{17}-2\sqrt{33}}{24}}\,i.
\end{aligned} \tag{19}$$

$r = 4, 5$ の場合には, 実数の範囲内で 1 次式の積に因数分解できますが, 有理数の範囲内ではできません。また, $r = 6, 7$ の場合には, 実数の範囲内で 1 次式の積に因数分解することもできません。(r が偶数のとき, $S_r(x)$ が x, $(x+1)$, $(x+\frac{1}{2})$ 以外の有理数係数 1 次多項式の因数をもたないことは, 1959 年に K. Inkeri [3] によって証明されています。) r が 1 から 30 までの $S_r(x) = 0$ の実数解と虚数解の個数を, 重複も考慮に入れて表にすると下のようになります。

r	1	5	9	13	17	21	25	29	3	7	11	15	19	23	27	31
実数	2	6	6	6	6	10	10	10	4	4	4	4	4	4	4	4
虚数	0	0	4	8	12	12	16	20	0	4	8	12	16	20	24	28

r	2	6	10	14	18	22	26	30	4	8	12	16	20	24	28	32
実数	3	3	7	7	7	7	7	11	5	5	5	5	9	9	9	9
虚数	0	4	4	8	12	16	20	20	0	4	8	12	12	16	20	24

上の表から読み取れる事実に証明を付け, 定理にしてみました。

定理 9. $S_r(x) = 0$ の実数解の個数は, 重複も考慮に入れると以下のようになる：

(i) r が 4 の倍数のとき, 5 個以上である。

(ii) $r \geqq 5$ が 4 の倍数 +1 のとき, 6 個以上である。

(iii) r が 4 の倍数 +2 のとき, ちょうど 4 個である。

証明. (i) 定理 7 (ii) より, $S_r(x)$ の 1 次の項の係数は $B_r < 0$ です。$\varepsilon > 0$ が十分に小さいとき, $S_r(\varepsilon)$ の 2 次以上の項は 1 次の項に比べ無視できるほど小さいので, $S_r(\varepsilon) < 0$ になります。一方, $S_r(1) = 1 > 0$ なので, ε と 1 の間に解 c があります。また, $y = S_r(x)$ のグラフは点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ に関して対称なので, $-c-1$ も解になります。よって, $S_r(x) = 0$ は, $-1-c, -1, -\frac{1}{2}, 0, c$ の少なくとも 5 個の解をもちます。

(ii) も (i) と同様の方法で証明できます。

(iii) 定理 6 (iv) より, $-1 < x < 0$ のとき $S_r(x) > 0$ です。$x > 0$ とすると, $-1 < x - n \leqq 0$ となる整数 n がとれて, 次のような計算ができます：

$$S_r(x) = S_r(x-n) + x^r + (x-1)^r + \cdots + (x-n+1)^r > 0. \tag{20}$$

よって, $S_r(x) = 0$ は $x > 0$ に解をもちません。$y = S_r(x)$ のグラフは直線 $x = -\frac{1}{2}$ に関して対称なので, $x < -1$ にも解をもちません。よって, $S_r(x) = 0$ の解は $x = -1, 0$ だけです。 □

定理 10. $S_r(x) = 0$ の虚数解の個数は 4 の倍数である。

証明. α を $S_r(x) = 0$ の虚数解とすると, 定理 5 より, $-\alpha-1$ も解です。さらに, $S_r(x) = 0$ は実数係数の代数方程式なので, それらの共役複素数 $\bar{\alpha}$, $-\bar{\alpha}-1$ も解です。

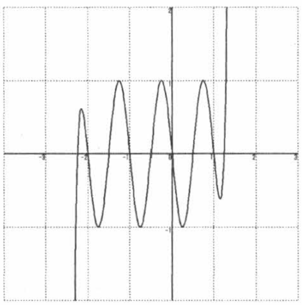
次に, $-\bar{\alpha}-1 \neq \alpha$ を証明します。そのために $-\bar{\alpha}-1 = \alpha$ と仮定すると, $\alpha = -\frac{1}{2} + bi\ (b \neq 0)$ と表せます。定理 5, 8 より, r が 4 の倍数のとき $S_r(\alpha)/(bi) > 0$, r が 4 の倍数 +1 のとき $S_r(\alpha) < 0$, r が 4 の倍数 +2 のとき $S_r(\alpha)/(bi) < 0$, r が 4 の倍数 +3 のとき $S_r(\alpha) > 0$ にな

ります。よって, α は $S_r(x)=0$ の解にはなりません。わかりにくいので具体的に書きます。$\alpha=-\frac{1}{2}+bi$ を式 (4) に代入すると, 下のようになります：

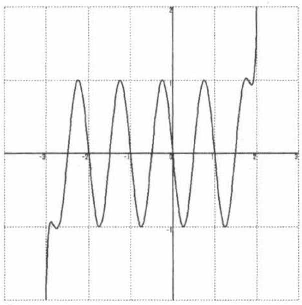
$$\begin{aligned} &S_1(\alpha)=-\tfrac{1}{2}(b^2+\tfrac{1}{4})<0, &&S_2(\alpha)/(bi)=-\tfrac{1}{3}(b^2+\tfrac{1}{4})<0,\\ &S_3(\alpha)=\tfrac{1}{4}(b^4+\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{16})>0, &&S_4(\alpha)/(bi)=\tfrac{1}{5}(b^4+\tfrac{5}{6}b^2+\tfrac{7}{48})>0. \end{aligned} \tag{21}$$

よって, $-\bar{\alpha}-1\neq\alpha$ となり, $x=\alpha,\ -\alpha-1,\ \bar{\alpha},\ -\bar{\alpha}-1$ は異なる 4 つの虚数解になります。虚数解 4 つで 1 組になるので, 虚数解の個数は 4 の倍数です。 □

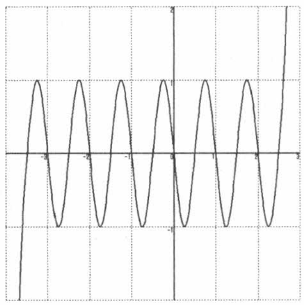
r が 4 の倍数のとき, $S_r(x)=0$ の解の問題を, 累乗和の多項式ののグラフをコンピュータで描くことによって調べてみます。ただし, r が大きくなるとグラフがタテに大きくなってしまうので, 定数倍した $y=\dfrac{2\pi}{|B_r|}S_r(x)$ のグラフを描くことにします。$r=20, 32, 44$ のときのグラフは下のようになります。



$y=\dfrac{2\pi}{|B_{20}|}S_{20}(x)$



$y=\dfrac{2\pi}{|B_{32}|}S_{32}(x)$



$y=\dfrac{2\pi}{|B_{44}|}S_{44}(x)$

このように, r が 4 の倍数で十分大きいとき, $y=\dfrac{2\pi}{|B_r|}S_r(x)$ のグラフは $y=-\sin 2\pi x$ のグラフに近似しています。実際に $r=44$ の場合に 2 つの関数のグラフを重ねてみると, $-3\leqq x\leqq 2$ でほぼぴったりと重なります。つまり, r が 4 の倍数で十分大きいなら, 適当な範囲の x で $\dfrac{2\pi}{|B_r|}S_r(x)\fallingdotseq-\sin 2\pi x$ が成り立ちます。累乗和の公式と三角関数, 一見無関係に見えるものが関係しているのは不思議ですね。このように, r が 4 の倍数のとき, r をドンドン大きくしていくと, $S_r(x)=0$ の解は $x=\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, -2, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ の付近に次々と現れてきます。

同様に, r が 4 の倍数 +1 で十分大きいとき $\dfrac{4\pi^2}{r|B_{r-1}|}S_r(x)\fallingdotseq-(1-\cos 2\pi x)$, 4 の倍数 +2 で十分大きいとき $\dfrac{2\pi}{|B_r|}S_r(x)\fallingdotseq\sin 2\pi x$, 4 の倍数 +3 で十分大きいとき $\dfrac{4\pi^2}{r|B_{r-1}|}S_r(x)\fallingdotseq 1-\cos 2\pi x$ がそれぞれ適当な範囲の x で成り立ちます。(これらの事実は, 1987 年に K. Dilcher [2] によって証明されています。)

6　多項式の一致の定理

第 2 節では, すべての正の整数に対して成り立つと主張された等式を, 実数変数の等式に拡張しています。このようにしても問題ないことは, 下の定理からわかります。

多項式の一致の定理. m 次以下の多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ が $m+1$ 個の異なる x で等しくなるならば, それらは等しい多項式である。(つまり, すべての x に対して成り立つ。)

証明. 背理法で証明します。m 次以下の多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ は $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ で等しいが, それらは異なると仮定します。$R(x) = P(x) - Q(x)$ とおくと, $R(\alpha_1) = 0$ であるので $R(x)$ は $(x - \alpha_1)$ を因数にもちます。同様にして, $R(x)$ は $(x - \alpha_2), \cdots, (x - \alpha_m)$ も因数にもちます。よって, $R(x)$ は次のように因数分解できます:

$$R(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_m), \qquad a \neq 0. \tag{22}$$

ところが, この式に $x = \alpha_{m+1}$ を代入すると, 左辺は 0 になるが, 右辺は 0 になりません。これは矛盾です。よって, $P(x)$ と $Q(x)$ は等しくなります。 □

この論文では r 乗和の公式がただ 1 つしかないことを当然のこととして使っていますが, これを証明するのにも一致の定理が使われます。つまり, 式 (1) を満たす多項式が 2 つあるとして, それらを $S_r(x), T_r(x)$ すると, それらはすべての正の整数 x で一致していなければなりません。よって, 一致の定理より $S_r(x) = T_r(x)$ となり, r 乗和の公式がただ 1 つしかないことがわかります。

参考文献

[1] 荒川 恒男, 伊吹山 知義, 金子 昌信「ベルヌーイ数とゼータ関数」牧野書店, 2001.

[2] K. Dilcher, Asymptotic behaviour of Bernoulli, Euler, and generalized Bernoulli polynomials, Journal of Approximation Theory Vol.49, No.4 (1987), pp. 321–330.

[3] K. Inkeri, The real roots of Bernoulli polynomials, Annales Universitatis Turkuensis Vol.37, Ser.A (1959), pp. 9–10.