イプシロン　2008. Vol. 50, 41-52

研究授業からＤＳの新しい使い方が生まれる様子のケーススタディ

― 附属名古屋中学校での後藤実践：「$3^2+4^2=5^2$に似た例を探せ」―

愛知教育大学　**飯　島　康　之**

０．はじめに

イプシロンも今回で50号を迎える。今でこそ，数学教育に関する雑誌を発行している大学は多くなってきたが，発行当時には，数学教育に関する雑誌は非常に少なかったはずであり，他誌に先駆けて50号を迎えることができるのは，とても喜ばしいことである。本誌の特徴は何であろうか。研究のみならず，教育実践にも大きく関わっていることが一つの特徴ではないかと思う。また，私自身のことでいえば，さまざまな先生方との共同研究をさせていただくことが研究そのものの大きな原動力になっているが，その様子を報告する貴重な媒体となっている。

昨年，附属名古屋中学校の岩田実践に関する共同研究を契機に，GCの改良案や新しい授業像が生まれる様子をご紹介した。この実践は，GC活用研究会があり，そのための実践を私の方から依頼することから始まった。共同研究は，このように私たちの側から投げかけることが生まれることばかりとは限らない。附属学校の先生方をはじめとして，いろいろな先生方から投げかけられたことをヒントに生まれることも多い。今回はそのような例として，附属名古屋中学校の後藤義広先生の投げかけから始まった事例とそのインパクトについてご紹介したい。

１．任天堂DSに注目した経緯とそれまでの成果

1.1 生徒用携帯端末としてのDS

2007年度に，愛知教育大学の「大学教育研究重点配分経費」を申請し，DSとDSブラウザを40台購入した。DSをゲーム機として買ったのではない。DSブラウザをつかえば無線LANでホームページにアクセスすることができるようになる。ホームページ上でJavaScriptなどでプログラムを作っておけば,パソコンと同等とまではいかないまでも，いろいろなことができる。しかも，タッチペンでの入力が可能だ。つまり，タブレットPCをとてもコンパクトにした生徒用携帯端末のような機能を果たしてくれるわけである。コンピュータ室では，数学の授業はやりにくい。大学ではノートパソコンを文房具として使うが，小中高では，やはり主役は紙のノートであり，補助的に電子機器は使いたい。すると大きさはせいぜいグラフ電卓くらいでありたいし，データの配信・収集をする上では無線LANは不可欠。将来予想される生徒用携帯端末をイメージしたとき，少なくとも2006年時点でそれに最も近くてかなり安価なものを実現してくれるのがDSだったのだ。

1.2 実験の概要

まず，DSと(ソニーの)PSPを候補として比較した。一長一短はあるのだが，タッチペン入力の手軽さ等から，DSを選択した。基本的なコンテンツの開発とテストする規模と範囲の拡大という二つのことを段階的に行った。研究室内，ゼミ，大学での40人規模の授業，他大学(東京学芸大学)での40人規模の授業，名古屋市内のホテルでの30人規模の研修会，附属学校での15人規模の授業，一般校での40人規模の授業を行った。それぞれ，いろいろな課題が見つかり，それを段階的にクリアした。たとえば，研究室やゼミ室では問題にならなかったが，共通棟での実施では，ケーブルを100m程度伸ばさなければならない。東京学芸大学では，認証サーバを経由しなければならない。DSブラウザでのインターネット接続では一度任天堂のサイトにアクセスしなければならないという変わった設定になっている。そのため，附属名古屋中学校ではまったく問題なかったのだが，豊田市内の中学校では，普通教室にきているLANでは，フィルタリングによって任天堂のサイトにアクセスできないため，急遽図書室に来ているLANからケーブルを100mほど延長して使うなど，個々の状況によってどう対処すべきかというノウハウを獲得した。

一方基本的なコンテンツとしては，感想を書き込む事例や，4択問題の事例，また，その場で4択問題等を作る事例を作った。これらは，タッチペンでの手書き入力にはとてもあっていて，のべ数百人以上で使ってみたが，「DSでもこんなことができます」という紹介としては，かなり楽しく使うことができることがわかった。

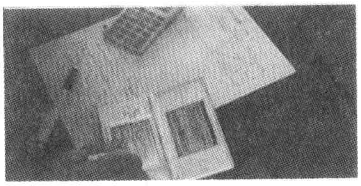
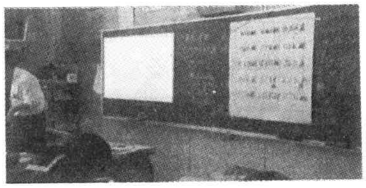
しかし，DSブラウザ上では，Flashも動かなければJavaアプレットも動かない。GCのように図形を動的に調べるために使うことはできない。使えるとしても静止画である。この時点では，数学らしいコンテンツのほとんどは，4択問題等であり，それまでのGCでの実践などで蓄積してきた探究的な使い方とはかなり距離があることを実感した。

図－1　大学での授業の様子

1.3 名中生のきびしい評価

上記のような段階的なテストの中で，一つの実験を，名古屋中学校で行った。GC活用研究会で公開授業を企画し，「三角形の3つの長さを提示し，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形，三角形にならない，という４つの中のどれになるかを順次選択する」というコンテンツを使う授業を行ってみた。この授業の授業者が，後藤先生だったのだが，公開授業とその前の授業という二つの授業の中で，名中生からはきびしい評価を受けた。帰国子女クラスということもあって，彼らは思ったことを率直に言う。たとえば，感想をDSで入力してみようという投げかけに対しては，「口で言う方がいいんじゃないか?」「これだったら，紙に感想を書く方がずっといいよね」と

ずばずば言ってくれる。彼らは帰国子女のため，漢字の書き順を間違えることもある。すると，DSの手書き入力ではうまく入力できないこともある。「うまく書けねー。だめなんじゃないのDSって。」という発言に対して，後藤先生の「書き順が違うからうまくいかないんだ。ちゃんと漢字書けないとだめなんだぞ」という発言は，前時では「なるほど」という納得で終わったが，研究授業のときには，「早く入力したいのにうまくいかない。紙に書くならすぐにできるのに，なんて面倒な機械なんだ」というイライラ感を強く感じた。また，素早く入力したいと思うときに，DSの(インターネット経由でやりとりをする)反応の緩慢さには課題を感じた。彼らの様子を観察する中で，授業として満足できる段階にはまだまだ到達していないことを実感したのだった。

図－２　名古屋中学校での様子

これらの結果を総括すると，次のようなことがわかった。

(1) 無線LANが使える端末はとても快適。DSによって将来の生徒用端末のあり方を実感できた。

(2) 手書き入力もかなり実用的。特に小学校向けを考える場合には，とてもよい。

(3) 今回試みたコンテンツ作成の路線でいえば，「感想の書き込み」と「4択問題」とその派生形。それらは，可能性を実感する上では有効であったが，実際の数学の授業の中で使うコンテンツとしては魅力が少ない。

特に(3)は私にとってはかなり致命的であり，そこに，現時点での「DS + DSブラウザ + webコンテンツ」という使い方の可能性と限界を感じていた。

2.後藤先生からの新しい提案

2.1 提案された問題

2008年6月に，後藤先生から，二次方程式の単元の中で，次の問題に関してDSを使った授業をしてみたいという打診を受けた。

> **問題**
>
> 連続する三つの自然数３，４，５では$3^2+4^2=5^2$という等式が成り立ちます。
> このような等式が成り立つ連続した自然数は他にありますか。

3つの連続する自然数では，この例しかないことを二次方程式で証明することができる。さらに数の個数を増やしたときにどうなるかを調べようという問題である。

率直に言って，私は気乗りがしなかった。数学らしい使い方のための道具としてはDSはあまり使えないだろうと思っていたからである。むしろ，Excel の方が適していると思った。あるいは，

Excelを使って作った数表の紙を配布し，暗算できまりを見つけようという授業の方がいいのではないかと思った。ところが，ゼミ生と一緒に試してみると，

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

のような表を眺めて，どれかとどれかの和が隣になっているのを目で見つけるなど，する気にならないことがわかった。和を最初から計算しておくのも手なのだが，等しい数値があるかどうかだけを眺めるのだから面白くないし，膨大な中にほんの少しあるものを見つけるような作業になる。等しくなるかどうかを判定してしまう機能を含めることもできるが，そういうプログラム(たとえば，Excelのマクロ)を書く課題としては適切だが，それを使うのは，ブラックボックスが出してくれる結果を眺めるだけなので，適切でない。

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1		2つの和	1つの和		3つの和	2つの和	
2	4		5	9		14	41	
3	9		13	16		29	61	
4	16		25	25	○	50	85	
5	25		41	36		77	113	
6	36		61	49		110	145	
7	49		85	64		149	181	
8	64		113	81		194	221	
9	81		145	100		245	265	
10	100		181	121		302	313	
11	121		221	144		365	365	○
12	144		265	169		434	421	
13	169		313	196		509	481	
14	196		365	225		590	545	
15	225		421	256		677	613	
16	256		481	289		770	685	
17	289		545	324		869	761	
18	324		613	361		974	841	
19	361		685	400		1085	925	
20	400		761	441		1202	1013	
21	441		841	484		1325	1105	

図－３　ワークシートの１例

```
Sub Macro1()
    For L1 = 1 To 200
        For L2 = 1 To 200
            For n0 = 1 To 2000
                If Check(n0, L1, L2) = 0 Then
                    i = i + 1
                    Worksheets("sheet2").Cells(i, 1) = n0
                    Worksheets("sheet2").Cells(i, 2) = L1
                    Worksheets("sheet2").Cells(i, 3) = L2
                    Exit For
                End If
                If Abs(Check(n0, L1, L2)) > 10000 Then Exit For
            Next
        Next
    Next
End Sub
```

```
Function Check(n0, L1, L2)
    n = n0
    For i = 1 To L1
        sum1 = sum1 + n ^ 2
        n = n + 1
    Next
    For i = 1 To L2
        sum2 = sum2 + n ^ 2
        n = n + 1
    Next
    Check = sum1 - sum2
End Function
```

図－４　マクロの一例

そしてそもそも，「コンピュータ室は使いたくないんですよね」という後藤先生の言葉にはとても説得力があった。せっかく後藤先生から提案してもらえたのだから，ちょっと工夫してみようか。やっと重い腰を上げたのだった。

2.2 DS上で実現する機能

JavaScriptによって，あるボタンを押せば，自動的になにかを計算してくれる。そういうソフトをホームページ上に作ることにした。

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

のような他の例を探すのだが，この授業では，これに対応して

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$$

という二次方程式を考え，それを解くことを主眼としている。そこで，3種類の機能を考えた。

(1) 数で調べる：初期値や項数などを変え，数を設定したときに，その数で「=」が成り立つかどうかを判定する。

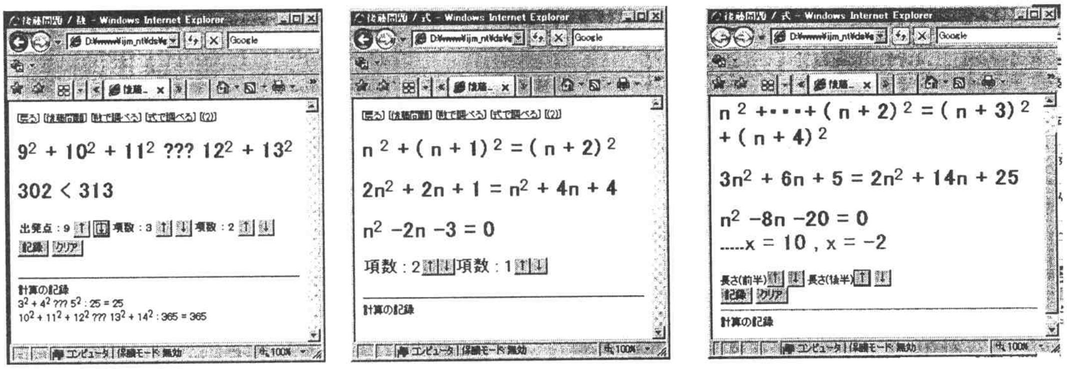
(2) 式で調べる：左辺の項数や右辺の項数を指定したときにできる二次方程式を表示し，それを整理するとどんな二次方程式になるかを示す。

(3) 解も示す：(2)に加えて，解の公式を使うことによって，nの解を自動的に表示する。

生徒自身が行うべき仕事を残す必要がある。そういう意味で，(1)と(2)を生徒に提供することを

考えた。

最初はPC用を開発し，画面上の配置や入力の仕方などをDS用にカスタマイズした。



(1) 数で調べる　　(2) 式で調べる　　(3) 解も示す

図－５　後藤問題に関するＤＳ用コンテンツ例

2.3 自分で試す

まず，自分が実験台である。$3^2 + 4^2$??? 5^2 の数値を変えてみると，みるからに，3つの数では他に解はなさそうである。4つにすると2個2個($1^2 + 2^2$ と $3^2 + 4^2$)では，どうみても右辺が大きい。3個1個ではどう大きな数にしてみても左辺の方が大きそうである。5つにすると，3個2個のときに，$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ を見つけることができる。7つのときに4個3個でできるのではないかと推測してみる。なかなか見つからない。しかし，左辺と右辺の符号の変化あるいは差に注目してみると，$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$を見つけることができる。実際「$3^2 + 4^2 = 5^2$」のような例としての2つ目の例ということになるのだが，数表から暗算で求めるような例としてはふさわしくない。また，符号の変化などに注目しない限りは，21まで増やしてみる気になりそうもない。同様の気づきとして，4個2個の場合はなさそうという根拠として，$5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 < 9^2 + 10^2$ なのに，$6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 > 10^2 + 11^2$ になってしまうことなどがあげられる。これも，いろいろな場合をボタン一つで観察できるからする気になるが，暗算ではする気にならない。しかも，DSで調べるといっても，毎回ネット接続を求めるわけではないから，かなり反応がいい。DSで調べるのにかなり適した問題になると思った。

一方，上記ではいろいろな場合を見つけることはできるが，証明はできない。また，この単元として，二次方程式で証明したいわけだが，3個2個の場合について調べよと指定するのではなく，いろいろな場合について調べることを求めるとすると，二次方程式の計算をするのもまた，煩雑である。計算の流れを大まかに考えれば次のようになる。

(1) 立式 ($n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2$ のような式)

(2) 展開と整理 ($n^2 - 8n - 20 = 0$ のような式)

(3) 因数分解あるいは解の公式 による解の発見 ($(n-10)(n+2)=0 \rightarrow n=-2,\ 10$)

(1)のような式をいくつか扱うと，(2)の式の特徴は見つけられるのだが，生徒に対して因数分解

の部分を暗算で行うことのみを求めるとすれば，(2)自身をDSで計算してしまうのも一つの手である。「式で調べる」コンテンツを使うと，次のような式から，右のような結果を得ることになった。

2個1個　$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$　$\rightarrow n^2 -2n -3 = 9$　$\rightarrow n=-1,\ n=3$

2個2個　$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+3)^2$　$\rightarrow -8n -12 = 0$　$\rightarrow n=-3/2$

3個2個　$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2$　$\rightarrow n^2 -8n -20 = 0$　$\rightarrow n=-2,\ n=10$

すると関連して

4個3個　$n^2 -18n -63 = 0$　$\rightarrow n=-3,\ n=21$

5個4個　$n^2 -32n -144 = 0$　$\rightarrow n=-4,\ n=36$

6個5個　$n^2 -50n -275 = 0$　$\rightarrow n=-5,\ n=55$

というあたりでパターンを見つけることができそうだ。

こういった流れの中で，DSを計算機として使う事例として「$3^2 + 4^2 = 5^2$ に似た例を探せ」の授業構想とそのために使うコンテンツ等がほぼ確立していった。

3. 「これしかない」を証明できないか

3.1 授業で想定する一般的な証明とそのためのポイント

前述のような方程式から，次のような一般化ができる。

k+1個k個の場合には，

$$n^2 + (n+1)^2 + ... + (n+k)^2 = (n + k + 1)^2 + ...\ (n+2k)^2$$

$$n^2 - k^2 n - k^2(2k+1) = 0$$

$$(n + k)(n - k(2k+1)) = 0$$

このような文字を使った証明そのものは，中学生の課題というより高校生向けの課題といっていい。しかし，素朴な予想として，「$3^2 + 4^2 = 5^2$ に似た例」は，k+1個k個の場合しかないのではないか。そのためのアイデアを授業の中に取り入れることはできないだろうかと考えた。

まず目につくのは，k+1個k個の方程式のときだけは，二次の係数が1になっていること。これは項の数の差が現れるのだから，ある意味であたりまえである。そして，$n=-k$が解になっていること。これは自然数という条件を満たさないので，適した解ではない。しかし，整数に拡張して考えてみればたとえば，$k=2$の場合でいえば，

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$$

と，とても自明な解である。これを手がかりにしてみると，たとえば10個9個の場合でも

$$(-10)^2 + (-9)^2 + ... + 0^2 = 1^2 + 2^2 + .. + 10^2$$

が自明な解になっていることは明白であり，そのときの二次方程式の一つの解が -10 なのだから，(n+10)で割り算をすれば，自動的に二次方程式は因数分解できることがわかる。一般にそうなることは見通せるだろう。

3.2 「これしかない」を証明したい

うまくいくときにはこんなにきれいな仕組みになっている。逆にいえば，式が成り立っているときには，おそらくそういう仕組みがなければいけないだろうから，「このパターンしかない」ということを証明できないだろうか。そう思った。

左右の個数が同じ場合は1次方程式，そうでないときには2次方程式。つまり，有理数の中でそれぞれ1個，2個の解がある。

左右の個数が同じ場合は，たとえば2個2個の場合でいえば，

$$(-3/2)^2 + (-1/2)^2 = (1/2)^2 + (3/2)^2$$

というように，左右対称になる分数が解になるから，適した解がないことがわかる。

2次方程式の場合には，解が最大二つだが，上の場合は一つが負の整数が解になっていて，もう一つの解の存在がわかる。常識的に考えて，解は存在するとしても一つだろうから，解が存在する場合は負の数に注目すればいいのではないか。また，個数の差が1だから二次の係数が1になったが，そうでない場合には整数解は難しそうだ。そういうことを考えてみると，「これしかない」の証明はできるのではないか。そう思った。

整数で成り立っているときには，上のようなパターンが必然的にあるはずだということを証明しようと，いろいろなことを模索してみた。イメージ的にうまくいきそうだと思ってみるものの，後で冷静に記述してみると，反例が見つかったりする。そうした一喜一憂する日々が数日続いた。

3.3 予想を覆す例の発見

もう少しいろいろな場合を調べてみようと，解を明示するコンテンツを作って，いろいろな場合を調べてみた。すると，次のようなことがわかった。

(1) 二つともマイナスの解になる場合の発見(1)

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 \rightarrow x = -5\ ,\ x = -1$$

予想に反する答えである。しかし，よく考えてみると，-5 と -4, -3 そして -1 と 0, 1 が解になる。つまり，n, n+1 と n+2 に対応する例である。なぜ，片方がプラスマイナスで，片方がマイナスマイナスになってしまうのか。それは文字の置きかたが適切でない例だろう。たとえば，n-1, n, n+1 と考えるならば，nの解は 0と4 あるいは，0と -4 となるはずなのである。

つまり，マイナスマイナスという形のものが一見みつかったとしても，それは文字の置きかたを変えれば 0 プラス に変形可能な例であろうと考えた。

(2) 二つともマイナスの解になる場合の発見(2)

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + \cdot\cdot\cdot + (n+11)^2 \rightarrow x = -9\ ,\ x = -7$$

$$-9^2 + -8^2\ ???\ -7^2 + -6^2 + -5^2 + -4^2 + -3^2 + -2^2 + -1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2\ :\ 145 = 145$$

$$-7^2 + -6^2\ ???\ -5^2 + -4^2 + -3^2 + -2^2 + -1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\ :\ 85 = 85$$

さきほどの例と違って，本当の意味で，マイナス，マイナスといっていい。両方とも 0 をまたいでいるのだ。0をまたぐと数値は小さいので，奇妙なことも起こりうるということなのだろう

か。しかし，自然数解の場合に関しては，k+1 個 k個の砦は守ることができるだろう。そう思った。

(3) 整数と分数ペアの発見

$n^2 + \cdots + (n+6)^2 = (n+7)^2 + \cdots + (n+31)^2 \rightarrow x = -33.44444444444444$, $x = -17$

$-17^2 + -16^2 + -15^2 + -14^2 + -13^2 + -12^2 + -11^2$??? $-10^2 + -9^2 + -8^2 + -7^2 + -6^2 + -5^2 + -4^2 + -3^2 + -2^2 + -1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2$: 1400 = 1400

またもや予想を覆す例の発見である。整数解になる場合には，整数ペアしかないだろうと思っていたら，整数と分数のペア発見である。片方が分数でも片方は整数になりうるということは，想定する範囲をかなり広げなければならない。これは憂鬱だ。そうしているうちに，とんでもない例を発見した。

(4) モンスター(根本的な反例)の発見

$n^2 + \cdots + (n+7)^2 = (n+8)^2 + \cdots + (n+24)^2 \rightarrow x = -42$, $x = -12.222222222222221$

$-42^2 + -41^2 + -40^2 + -39^2 + -38^2 + -37^2 + -36^2 + -35^2$??? $-34^2 + -33^2 + -32^2 + -31^2 + -30^2 + -29^2 + -28^2 + -27^2 + -26^2 + -25^2 + -24^2 + -23^2 + -22^2 + -21^2 + -20^2 + -19^2 + -18^2$: 11900 = 11900

すべてマイナスなのである。つまり，符号をかえ，順序を逆にすれば自然数の解が見つかるということになる。しかも，k+1個 k 個に対する反例になる。17個と8個であった。

$18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 + 30^2 + 31^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2$??? $35^2 + 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2$: 11900 = 11900

この例は，最初の予想に対する根本的な反例である。つまり，予想は見事にくつがえされたしまった。そして，同様の例は，さらに次のようなものが見つかった。

$n^2 + \cdots + (n+9)^2 = (n+10)^2 + \cdots + (n+44)^2 \rightarrow .x = -48$, $x = -24$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2$: 3885 = 3885

$4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 + 30^2 + 31^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2 + 35^2 + 36^2 + 37^2 + 38^2$??? $39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 + 45^2 + 46^2 + 47^2 + 48^2$: 19005 = 19005

$n^2 + \cdots + (n+12)^2 = (n+13)^2 + \cdots + (n+51)^2 \rightarrow x = -63$, $x = -27$

$31^2 + 32^2 + 33^2 + 34^2 + 35^2 + 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 + 45^2 + 46^2 + 47^2 + 48^2 + 49^2 + 50^2$??? $51^2 + 52^2 + 53^2 + 54^2 + 55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 + 61^2 + 62^2 + 63^2$: 42419 = 42419

4. 後藤実践の概要

4.1 はじめに

上記のような様子は，逐次後藤先生にも報告してきた。また，上記では記述しなかったが，DS上のコンテンツを実際に使っていただき，生徒が使いやすいようにするための改良点を指摘していただいた。新しい証明等が見つかったわけではないので，授業の指導案等は当初のプランと比較してそれほど大きく変わったわけではない。しかし，観察するデータによって，実はさまざまなことを発見できる可能性を実感することができ，そういう潜在的な可能性を持ったデータに生徒を接しさせるのだという感覚は，かなり深まったと思う。

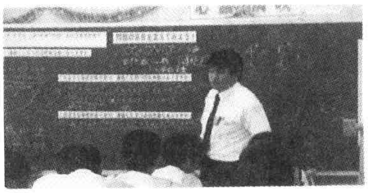
4.2 2個1個の場合を手計算で確かめる

「$3+4=5$ は正しくないけど，何かを付け加えて等式が成り立つようにできないか」という投げかけから始まり，$3^2+4^2=5^2$ を生徒が指摘したのを受け，「連続する三つの自然数3,4,5では，$3^2+4^2=5^2$ という等式が成り立ちます。このような等式が成り立つ，連続した三つの自然数は他にありますか」という発問を提示した。具体的な数で調べようとする生徒には，方程式の利用を示唆しながら机間指導をして，「$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$ の解は3，-1 のみであり，-1，0，1 は条件を満たさないので，答えは3，4，5しかないこと」を確認した。(10分)

条件を変えてみようと投げかけ，「和を積に変える，自然数を一般の数に変える(分数や負の数も認める)，2乗を3乗などに変える，連続する3つの数を，4つの数などにする」などの意見が出た。そして，最後の案，つまり個数を増やす案を取り上げることにした。(ここまで15分)

4.3 問題の拡張と予想，そしてDSの登場

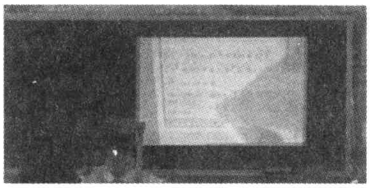
先生：4つの場合も方程式で得られるだろうか。
生徒：3個1個について，3つのときと同様に，方程式を作って解けばいいと思う。
先生：3個1個がうまくいきそうだとすると，2個2個の場合もうまくいくかな。
生徒：多分。
生徒：いや，2個2個の場合には，右側の方が大きくなってしまうからうまくいかない。
全員：なるほど。
先生：じゃあ，5つの場合もできそうか?
生徒：可能性はありそう。
先生：4個1個も可能性はありそう?
生徒：ありそう。
先生：3個2個の可能性もありそう?
生徒：ありそう。
先生：今日はそれを実際に調べてもらいます。
(ちょっと間を置いて)でも，この方程式，とても面倒くさそうだよな。
生徒：(教卓の上にあるDSを見て，何となく笑う)
先生：そこで，今日は計算の道具として，DSを使ってもらいます。」(ここまで23分)



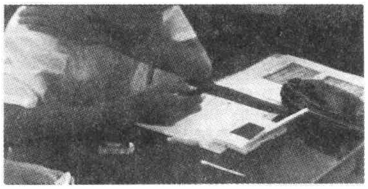
図－6　予想をまとめる

4.4 DSを使って調べる

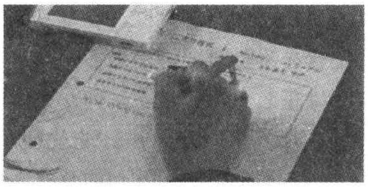
たとえば，2個2個の場合には，どんな立式からどういう方程式が得られるのか。その部分をDSが行っている。数の個数と初期値の3ケ所を変えながら，得られる方程式について，因数分解等を使って解を自分で求め，具体的な数の並びを発見するのが，生徒の活動である。



図－7　使い方の説明



図－8　使っている様子

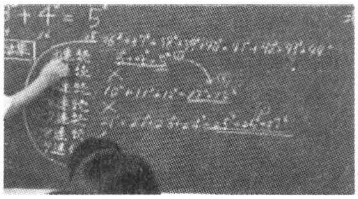


図－9　結果をワークシートに書く

この時間は約10分だった。基本的には個人としての作業なのだが，まわりの生徒とやり方や結果についての話し合いがあったり，覗き込みがあったり，DSを初めて使うにしては，かなり円滑に使うことができた。

4.5 調べたことの発表

時間を見計らって，調べて分かったことを発表した。



図－10　結果の板書

先生：4連続は?
生徒：ない。
先生：5連続は?
生徒：$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$
先生：これ，見つかった人(半分くらい挙手)
　　　6連続は？（挙手なし）
先生：7連続(4人くらい挙手)
生徒：$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$
先生：8連続(なし)，9連続(なし)
　　　実は9連続は，こんな式です。
　　　$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$

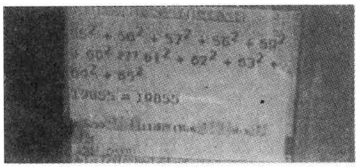
4.6 調べた結果から気づいたこと

上記の結果から，どんなことに気づくかという発問に関して，次のようなことが発表された。

(1) (左右の)項の数が一つずつ増えている。
(2) 3連続,5連続,7連続などと，奇数個のときだけうまくいく。
(3) 頭の項の差は,7, 7+4, 7+4+4, 7+4+4+4 というように，4ずつ増えている。
(4) 頭の項は，1×3，2×5，3×7，4×9 となっている。

(4)が発表されると，生徒の中から，「こっちの方がすごいよね」というようなつぶやきがあり，先生は，「このきまりだと，次は何になるんだ?」と投げかけ，$5\times11 = 55$ を確認し，他の生徒の発見でもそうなるのかを確認し，さらに「本当にそうなるのかどうか，確かめてみましょう」と，DSでの数値で調べるページを使い，次の式を確認した。

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 = 60^2 + 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 \quad (=19855)$$



図－11　DSで確認

5．考察　－上記の例の意味－

5.1 テクノロジーを使って整数問題を探究する可能性

残念ながら，上記のプロセスでは，新しい定理を発見して証明するということはできなかった。しかし，「$3^2 + 4^2 + 5^2$に似た例を探せ」というくらいの身近な問題であっても，かなり奥が深いということを実感できた。たしかに，フェルマーの定理も見かけは難しくなさそうに見えて，実はあまりに難しい。フェルマーの定理を実感することは難しいが，この問題は式変形などにおけるパターンを見つけたり，反例を探したり，また反例の意味づけを考えたりすることを体験させてくれた。整数に関する問題には，同じような探究を体験することができる問題がまだかなりあるのではないか。そう感じた。

5.2 道具の適切性

同じ問題に取り組むとき，今ではいろいろな道具を選択することができる。暗算から始まって，電卓やExcelの数式機能などもあれば，Mathematicaのような数式処理システムもある。自分でプログラムを作ることを求めることもできれば，ある程度使いやすいソフトを作って提供することもできる。たとえば，この問題の場合，電卓はほとんど無力だ。Excelも，ワークシート上で数式を作ってコピーするくらいの使い方ではほとんど無力だ。膨大な事例の中から，ほんの数個の例を見つけるような作業になる。それを乗り越える使い方をしようと思うと，(Excelの)マクロなどでプログラムを書かなければならない。プログラミングの練習課題の一つとして本問題を位置づけるならば，それも一つの学習課題になりうるが，中学生対象ならば，この問題固有のソフトを用意する方が適切なのではないだろうか。

一方，ソフトもどのようなインターフェイスで何を調べるものを作るかによって，その探究は大きく変わってしまう。今回は，数のレベルで具体的に確認するものと，右辺左辺の個数を入力してその式や解を求めるものを作り，使ったところ，上記のようなプロセスになった。一方，最初から，連続する2乗の和について求める性質を満たすものをしらみつぶし的に調べて，列挙するプログラムを作ってみたところ，上記にあげたような反例をすぐに確認できた。いわば，成り立つような例を投網をかけて集めるような方法だが，反例はすぐに見つかるものの，そこから式

の意味などがわかるわけでもなく，あまり面白みは感じられない。おそらく，教育的にはこの部分はとても重要だ。つまり，ある問題に対して，適切と思える数学的探究を行うためには，どういうプロセスが教育的に意味があるかを想定して，それに合わせて道具(ソフト等)を作る必要がある。

5.3 後藤実践の基本的な成果

$3^2 + 4^2 = 5^2$ のような例は，2個1個の場合には，一つしかないことを方程式を使った証明した後，一般的なきまりを教師側から提示し，それを証明せよという証明問題であれば，普段の授業の中でも行えたであろう。しかし，いろいろな場合を想定しながら，それらについて実際に調べてみて，成り立つことからきまりを発見しようという，今回のような流れを構成しようと思うと，紙と鉛筆等では，あまりに時間と労力がかかりすぎる。「やればわかるが時間と労力のかかること」をDSが代替してくれることによって，いろいろな場合を自分で確認することができ，またそこにあるきまりを発見することができたという点に，本実践の基本的な成果があると思う。つまり，この課題に関してよりオープンな展開をねらいつつ，1時間で収めるためには，テクノロジーが有効に使える実践事例を確立したといえるだろう。(これらの事例がより多く蓄積されていくことによって，学習目標の設定の仕方に応じて，どのような(テクノロジーも含めて)道具を選択し，どのような授業設計をしていくべきかが容易になっていくし，そのような支援がないと,テクノロジーを有効に使っていくことは難しい。)

5.4 DSの新しい可能性

同時に，この実践は，数学の授業の中でのDSの使い方に関して，新しい可能性を実証してくれた。つまり，特定の問題に対する適切な道具を提供するということであれば，DSは十分に機能することが実感できた。感想を書いたり，4択問題をするというような，あまり数学らしくない使い方にとどまるのではなく，電卓やExcelとは違って，問題に則した探究の道具としてカスタマイズして使えることが示唆されたのである。しかも，そのためのソフト(ホームページ上のJavaScript)は，無線LAN経由で，ホームページにアクセスして使うことができる。必要に応じて，授業用のサイトを作っておき，そこにアクセスすることで，毎回使うソフトを切り換えながら使うことが簡単に行える(これは，グラフ電卓の利用などと根本的に違うところである。)。また，必要に応じて，生徒が発見した事例や，感想などを，やはりネットワーク経由で収集するということも可能になる。後藤先生が，なぜDSを使った授業にこだわったのかはわからないが，もし，以前にGC活用研究会の中での，DSを使った実践に不満を感じていて，そのリベンジをしたいと思っていたとしたら，それは十分に果たせたと言っていいのだろうと思う。

また，当たり前のことだが，このようなケーススタディは，「DSを使うため」に行っているわけではなく，DSは，生徒用携帯端末の代表例の一つである。JavaScriptで書かれているということは，PSPでもそのまま使えるし，パソコンでも同じものが使える。同じ実践を違う機器を使うとどうなるのか。そういう機器選択の可能性も含めて，新しい授業の可能性を提案したと言ってもいいだろう。