イプシロン　2007. Vol. 49, 59-66

ふり返り活動を助長する問題としての「電話線問題」の分析

愛知教育大学　山田篤史
福岡教育大学　清水紀宏

1．はじめに

問題解決において，「解答のチェック」レベルを超えた「ふり返り」を期待するとしよう。ポリアの『いかにして問題をとくか』(ポリア,1954/1975)における「ふり返り」の段階を例に取れば，「同じ結果を違った仕方で導くことができるか」「それを一目で理解できるか」「その結果や方法を何か他の問題に利用する事ができるか」(pp.19-20)等々の活動がそれにあたる。こうした活動は，一般的に「ふり返り活動の機能」として言及されるものであるが，授業における個別解決から練り上げの段階を考慮すれば，特に推奨・期待されてよいものである。しかし，当該問題そのものがこうした活動を助長しないようなものであれば，上記のようなふり返り活動を期待することはできないだろう。例えば，中学生に小学校1年生の教科書にある一段階加減文章題を提示したとしても，解答を提出した後に彼らに別解を求めるような自発的活動を期待することが難しいことは自明なことと思われる。

このように，提示された問題に対して一定の解答を与えた後の「ふり返り」活動には，「解答のチェック」というレベルの機能だけでなく上で挙げたような「別解の探求」など，様々な機能・役割が期待されることがあり，だとすれば，児童・生徒にどのような問題を提示するか，より具体的には，ふり返りの機能を意識し，そうした活動を誘発・助長するような問題の開発が必要となると考えられるのである。

本稿では，こうした課題意識を背景にし，筆者らの「ふり返り」に関わる一連の研究において使用してきた「電話線問題」を，「一応の問題解決終了後のふり返りの機能」と「解法の進展」という観点から分析し，ふり返り活動を助長するような問題であるか否かの検討を試みることを目的とするものである。

2．多様な解法とふり返りの機能

議論を始めるに当たって，先に述べたような，中学生に小学1年生の教科書の一段階加減文章題を与えた場面を再度想定してみよう。この場合，例えば，解決終了後にその解決者に別解を求めたとしても，多くの解法を期待はできないだろう。こうしたことが容易に想像できる背景には，問題と解決者とのレベルの齟齬もさることながら，解決者にとってのふり返りの必然性の問題がある。

まず，解決者と問題のレベル差の問題はあるが，中学生にとって，一段階の加減適用問題程度の問題は，それほど多様な解法を許容するものでないし，解答も自明なものであろう。解法が限定的で多様性を許容しないものであれば，そもそもふり返りで期待できることは，せいぜい「解答・解法のチェック」程度であろう。そして更に，解答が自明であれば，ふり返る必然性は無くなってしまう。逆に，自らの解答をふり返り，別解を探したり，より良い解法を目指して様々な思考を巡らしたりするような活動を助長しようとするならば，その解決者にとっての解答の自明性を考慮すると共に，そうすることに何らかの価値が見いだされるようにしなければならないのだろう。例えば，多様な解法を許容するような問題を提示し，実際に多様な解法が提示されたならば，それらをふり返る中で，序列化・統合化・構造化したりすることは児童・生徒にとっても（先の例に比べれば）必然性は高いことになろうし，授業における「多様な考えのまとめ方」(古藤他, 1998)という観点からも重要な活動となり得るはずである。多様な解法が許容される問題であればこそ，別解の探求を通じて当該問題のより深い理解に繋がることもあろうし，多様な解法を統合・洗練する中で解法や結果さらには問題そのものの一般化を図る，という数学的問題解決の立場から見て価値ある活動が生起する蓋然性は高まるのである。そして，問題解決の指導におけるふり返り活動には，上記のような様々なことが期待されているはずである。

ところで，そうしたふり返り活動において期待されるべき役割・機能にはどのようなものが想定されるのであろうか。筆者らは，先行研究を手がかりに，ふり返りの機能を以下の表1のように整理した(清水・山田,2003)。

表1　一応の問題解決終了後のふり返りの機能

(a) 解答・解法のチェック
(b) 別解・より良い解法の探究
(c) 問題構造に対する洞察や理解の深化
(d) 解や解法の拡張・発展及び他の問題への適用
(e) 批判的かつ創造的思考の喚起
(f) 解法の妥当性・一般性に関する検討

これらのふり返りの機能が網羅的であるか否かは議論の余地があるかもしれないが，第一に，多様な解法が生起する可能性があり，第二に，それらの解法をふり返る中で，上記のような活動のいずれかが生起すると期待できるのであれば，それは正にふり返りを指導・助長するに相応しい問題であると言えよう。そして，最終的に，指導の場面において，そうした活動を誘発するような発問が構成できればよいのであろうが，そのためにも，上記のようなふり返りの機能を明示的にリストアップしておくことは重要と思われる。例えば，一般的な「ふり返ってみなさい」といった発問では，児童・生徒がふり返る必然性を感じられないだろうし，何をどのようにふり返ったらよいかもわからないだろう。発問に当たっては，むしろそのねらい・期待を明示的にした

「ふり返り活動を促す発問」を検討することが重要である。具体的には，「あなたの答えをチェックするためにふり返ってみなさい」と発問することで，その発問が機能し，具体的なふり返り活動が生起する蓋然性は高まると考えられるのである。

３．電話線問題における解法の進展

3.1. 電話線問題

前述のように，問題解決指導においては解決されるべき問題そのものが重要な要素となる。特に「ふり返り」活動を指導・助長するに相応しい問題としては，多様な解法を導き得るものであり，しかも，具体的なふり返りの機能が生起すると期待できるようなものが望ましいだろう。それでは，そうした問題群には，どのようなものがあるのだろうか。

チャールズ & レスター(1983)は，数学カリキュラムの中で用いられる問題を，その目的に沿って「ドリル問題」「簡単な適用問題」「複雑な適用問題」「過程問題」「応用問題」「パズル問題」６つに分類している。これら６つのタイプのうち問題解決指導においてとりわけ重要視されるものは，「解決のためにいくつかの思考過程（たとえば，計画すること，思いつきを出すこと，見積りをすること，推測をすること，パターンを求めること）を用いることを必要とするような」(p.16)過程問題(process problem)であろう。また，この過程問題の例として，以下のような問題を挙げている。

チェスクラブが15人の会員のために選手権大会を開催しました。みんなの会員がどの会員とも相互に１回ずつゲームをやったときには，いくつのゲームが行われたことになりますか？(p.13)

これは，組合せに関する学習を済ませた生徒にとっては，単純な組合せの公式の適用問題に類するものであろうが，それは現行カリキュラムでは高等学校の数学Ａでの学習になる。そのため，それが未習の小学生から中学２年生レベルまでの生徒にとっては，単純な四則・公式の適用問題とは異なり，様々な解法が期待できる問題となりうる。また，これと同型な問題であり，様々な問題解決研究で使用される問題としては，以下の「電話線問題」が有名である。

家と家の間を電話線で直接結びます。家が15軒のとき，電話線は何本必要でしょうか。

電話線問題は，数学的問題解決に関する日米共同研究(三輪,1992)など，様々な問題解決研究で使用されており，多様な解決方法が採用されることも期待できる。例えば，典型的な解法としては，後述するように，図をかいて電話線を数え上げるといった素朴なものから，電話線を系統的に数えたり，それらの増分のパターンを探したりといったものまで，多種多様である。また，そうした多種多様な解法が先行研究（例えば，布川(1993)）でも実証的に見いだされてきているものである。

3.2. 電話線問題における様々な解法と解法の進展

我々の一連の研究(清水・山田,2007,2003; 山田・清水,2004)では，「場合の数」が未習の中学校２年生を対象にして，以下のような「電話線問題」をペーパーテスト方式で解答してもらった。

問題１． 家と家の間を電話線で直接結びます。例えば，家が4けんのとき，電話線は6本必要です。家が6けんのとき，電話線は何本必要でしょうか。
問題２． 家と家の間を電話線で直接結びます。例えば，家が4けんのとき，電話線は6本必要です。家が20けんのとき，電話線は何本必要でしょうか。

ただし，実際の実験では，「特定のふり返りの機能（(a)解法のチェック，(b)別解・より良い解法の探求，(f)解法の妥当性・一般性に関る検討）を想定した質問によりふり返りを促したとき，問題１と２との間で解法に進展があるか否か」を調べるという所に研究目的があった。そのため，実際の解答に当たっては，各被験者グループに対して，問題１と問題２との間に上記３つのいずれかのふり返り活動を促すような質問（表２）をし，それに回答をさせている。このような，やや特殊で実験的な状況設定に関しては，注意が必要である。

表２．ふり返り活動を促す質問

(a) 解法のチェック

左のあなたの答えは本当に正しいですか。左のあなたの解き方をふりかえって考えてみましょう。

(b) 別解・より良い解法の探求

左のあなたの解き方以外に，別の解き方はありますか。左のあなたの解き方をふりかえって考えてみましょう。

(f) 解法の妥当性・一般性に関る検討

左のあなたの解き方は，家の数が何けんの場合でも使うことができますか。左のあなたの解き方をふりかえって考えてみましょう。

それでは，以下では，まず我々の実験において現れた典型的な解法を述べ，幾つかの観点からそれらを序列化し，それらの間での解法の進展の可能性について述べてみよう。

3.3. 解法の類型

実際の問題１・２の解答における正答の解法は，次のようなC1からC7に分類された。また，誤答については多種多様なものがあったため，特定の分類は行わなかった。

C1. $(n-1) \times n \div 2$の考えを活用する（重複させておいて２で割る考えの）解法
　例.　（問題１）$5 \times 6 \div 2 = 15$
　　　（問題２）$19 \times 20 \div 2 = 190$

C2. 多角形の対角線の考えを利用した計数や公式を活用する解法
　例.　（問題２）$(20-3) \times 20 \div 2 + 20$

C3. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$ の考えを活用する（重複させない考えの）解法
　例.　（問題１）$5+4+3+2+1=15$
　　　（問題２）$19+18+17+\cdots+2+1=190$

C4. ２軒の場合，３軒の場合の数を表にして，パターンを探す解法

C5. 図をかいて系統的に数を数え上げるが，C3のような数や式には表さない解法

C6. 図をかいて数え上げるが，数え方に系統性は確認できない解法

C7. その他（解答のみを含む）

3.4. 電話線問題における解法の進展

我々の実験では，ペーパーテスト形式ではあったが，問題１と問題２の間に，表２のような特定のふり返りの機能を想定した質問を行った。

こうした具体的な質問に対して，正答者は，多くの場合，その質問に沿った回答をしようとしていた。もちろん，曖昧な返答や「分からない」という返答，（特に(a)に対しては）問題１の解答をより詳しく説明するという回答などもあったが，「(a)(b)(f)の活動をして欲しい」というレベルの意図は伝わったようであった。とすれば，更に高いレベルとして期待される「そうした活動により，よいことがあったか」ということが問題になる。もちろん，解決者にとっては，ふり返り活動の恩恵は暗黙的なものかもしれないし，不必要に感じられたかもしれない。しかし，上記のような質問とそれに対する回答作成により，問題２において解法に進展がみられたとすれば，それは具体的な恩恵だろうし，授業でそうした活動を繰り返すことができれば，ふり返り活動の機能に対応した様々な恩恵が児童・生徒にも感得されるであろう。また，練り上げの場面を想定しても，解法に進展がみられた児童・生徒がいるという事実は，授業展開上大きな貢献となるはずである。

それでは，この電話線問題においては，どのようなことが「解答が進展する」ということなのだろうか。

議論を始めるにあたって，問題１が誤答で問題２が正答の場合，解決が進展したと捉えることに異論はないであろう。むしろ問題は，問題1，問題2でともに正答していた場合である。上で述べたように，この問題の解法はC1からC7のカテゴリに類型化されるが，問題１に解答を与えた後，ふり返りを促す質問に回答する所から問題２に解答するまでの間に，どのような解法上の変化があったかが興味の対象になる。そのため，ここではC1からC7までの解法を幾つかの視点から序列化できれば，それらの序列間でのより洗練された解法への変化があった場合を「解法が進展した」と捉えてよいだろう。

まず，C1，C2は，比較的容易に任意の数が適用できる一般的な解法であり，ある意味ではこれ以上の進展を期待することは困難であるとも考えられるものでもある。実際，C1は，そのまま組合せの公式 ${}_{20}C_2$ に通ずるものであるし，そこからより一般的な ${}_{n}C_2$ へと一般化することさえ可能である。また一般化された式の形やそのアイデアは異なるがC2についても同様のことが言えるであろう。

次いで洗練された解法はC3であり，C4はその前段階に位置けられるものである。C1・C2とC3以降を峻別するのは，先に述べたように一般性（あるいは一般化可能性）にある。C3は，その計算さえ可能であれば任意の数について当てはまる解法ではあるが，肝心の計算自体はガウスの方法を知らなければ（あるいはその場で創り出さなければ）任意の数で実行可能ではないかもしれない。また，n(n-1)/2 のような一般化へ至る際にも，等差数列の和の公式を導出するのと同じ類いのハードルを越える必要がある。もちろん，C3は20軒程度の問題では十分に活用可能な解法であり，問題１においてC3の解法を採用した場合，問題２の解決にあたってC1やC2に解法を洗練させる必要はないともいえる。しかし，実際の指導のふり返り活動において，児童・生徒に，解や解法の拡張及び他の問題への適用可能性を検討したり，解法の一般性を検討したりすること(表1.(d)(f)の機能を参照のこと）を期待するのであれば，C1やC2への解法の洗練が意味ある方向性であることは言えるだろう。そうした観点を考慮すれば，C3も進展可能な解法と捉えられよう。

一方，C4は，C3に至る大きなステップではあるものの，少数軒の場合の表やリストからパターンを抽出することが解法の主要なアイデアであり，電話線の引き方に思考の対象が移行していないところに，C3との大きなギャップがある。そのため，例えば，解答の妥当性を調べたり，問題の構造を理解する（それゆえ，多分に，類似問題を理解する）際には，困難を抱えることになるだろう。

C5はC4ほど洗練された方法ではないけれども，系統的な数え上げをある程度実行し続けることができればC4や，更に進んでC3に繋がる可能性がある。ただし，図を描く活動だけに留まり，電話線の数のパターンに思考の対象が移行することが（あるいは，数のリストを組織化しようとすることが）その条件であり，それがC4以上の解法との大きなギャップになろう。

C6は，図を描くストラテジーは使われているものの，数え方に系統性が見出せない解法である。系統的に考えるという考え方は，多くの問題解決において頻繁に使用されるが，この問題解決においては最も重要な考え方である。実際，系統的に数え上げることができればC5に，さらに系統

的に数え上げていこうとする工夫をし，そこからパターンを抽出しようと試みればC4へと，より洗練された解法に繋がる可能性がある。このように，この問題の解決における核心のアイデアを持てたか否かがC5以上とC6とを峻別する所である。

以上のように考えてみると，C1からC7の解法には，C1・C2 ← C3 ← C4 ← C5 ← C6 ← C7（矢印の方向で洗練度合いが増している）という序列をつけることができるだろう。そして，こうした序列を前提にすれば，上で述べたように，ふり返り活動をすることによってより洗練された解法に移行していくことを，「解法の進展」として捉えても違和感がないと思われるのである。

4．議論：電話線問題はふり返りを指導・助長するに相応しい問題か

前章では，電話線問題とその解法を取り上げ，そこでの（ふり返り活動に伴う）解法の進展について議論した。

まず，電話線問題そのものについては，これが様々な問題解決研究で採用されていることからも想像できるように，組合せが未習のレベルの者であれば，多様な考え方を許容するものであり，実際に多様な解法を創出し得る問題であることが理解されたであろう。本稿では，そうした多様な解法群を７つに類型化することができた。しかも，そこでの類型化は，

・解法の一般性・一般化可能性の有無(C1・C2 の洗練度合及びそれらと C3 以降のギャップ)，
・方法（電話線の引き方）に思考対象が移行しているか否か（数的パターンへの着目に留まるか否か）(C3 と C4 とのギャップ)，
・素朴な系統的数え上げを超えられるか否か(C4 と C5 とのギャップ)，
・系統的な考え方の有無(C5 と C6 とのギャップ)

のような，数学的問題解決に重要な考え方や価値を基準としたものであったため，結果的には，そうした類型化がそのまま序列化に繋がった。

このように，多様な解法を許容し，それらの間に何らかの数学的な考え方や価値を基準にした序列がつけられる問題は，ふり返り活動を助長するに（また，ふり返り活動の実態を調べる問題としても）相応しい問題と考えられる。というのも，当該問題に対して一定の解答を与えることができたとしても，それが特定の数学的な考え方や価値から見て序列の下位に位置するものであれば，ふり返り活動によって解法が進展する可能性が生じ，しかも実際の解法の進展によって，そのギャップを成立させている考え方や価値を感得することができる可能性が生じるからである。また，こうした基準は，「特設型」(石田,1987)の問題解決指導のみならず，「方法型」の問題解決的な指導においても，自力解決から練り上げのプロセスを想定するならば，児童・生徒に提示すべき問題として重要な観点となり得るだろう。ただし，具体的にふり返り活動を促す発問をする場合には，その指導の目的や個別解決の状況に応じて表１のような様々なふり返りの機能を意識することは肝要だと思われる。

5．まとめと今後の課題

本稿では，ふり返り活動を助長し得る問題の一般的特性（解決者の問題解決のレベルに鑑みて多様な解法を導き得るか否か）について議論することから始め，ふり返り活動に期待される機能（表１）について触れつつ，具体的に「電話線問題」とその解法を取り上げて，その問題がふり返り活動を助長し，指導し得る問題であるかについて検討を進めた。電話線問題は，様々な解法を導き得るものであることは知られていたが，本稿では，実際的なデータである児童・生徒の解法を類型化し，それらを幾つかの観点から序列化することができている（3.4 章及び 4 章を参照のこと）。そのため，ふり返りを助長し得る他の問題を開発する際にも，そうした観点を踏まえた解法の類型化は参考になると思われる（もちろん，より一般的な序列化を可能にする基準・観点について議論できればよいが，基本的にそれらは問題に強く依存すると思われる）。そして，電話線問題とは数学的領域が異なる問題や，異なるふり返りの機能を誘発し得るような問題を開発することが，今後の課題となるだろう。

文献

石田忠男(1987).「問題解決指導のための教材開発」．石田忠男・川嵜昭三(編),『算数科問題解決指導の教材開発』(pp.11-28). 明治図書.

古藤怜・新潟算数教育研究会(1998).『コミュニケーションで創る新しい算数学習：多様な考えの生かし方まとめ方』．東洋館出版社.

清水紀宏・山田篤史(2007).「数学的問題解決終了後のふり返り活動による解法の進展について ---潜在的な数学的能力を視点とした検討---」．『日本教科教育学会誌』,第30巻,第2号,1-8.

清水紀宏・山田篤史(2003).「数学的問題解決における自己参照的活動に関する研究(VII): 問題解決終了後の「ふり返り」活動について」．全国数学教育学会『数学教育学研究』,第9巻,127-140.

チャールズ,R. & レスター,F.(1983).『算数の問題解決の指導』．中島健三(訳).金子書房.(Charles,R. & Lester,F.(1982). *Teaching problem solving: What, why, & how*. Palo Alto,CA: Dale Seymour Publications.)

布川和彦(1993).「数学的問題解決における図の役割と解決者による意味づけ」.三輪辰郎先生退官記念論文集編集委員会編,『数学教育学の進歩』(pp.303-320).東洋館出版社.

ポリア,G.(1954/1975).『いかにして問題をとくか』．柿内賢信(訳).丸善.(Polya,G.(1957). *How to solve it: A New aspect of mathematical method* (2nd edition). Princeton,NJ: Princeton University Press.)

三輪辰郎編(1992).『日本とアメリカの数学的問題解決の指導』．東洋館出版社.

山田篤史・清水紀宏(2004).「数学的問題解決における自己参照的活動に関する研究：問題解決終了後の「ふり返り」活動について(2)」,全国数学教育学会第19回研究発表会(Jan. 31 / Feb. 1, 愛知教育大学:刈谷市).

※ 本研究は，平成19−21年度科学研究費補助金（基盤研究(C),「数学的問題解決における「ふり返り活動」とその指導に関する実証的研究」,課題番号:19500737）の交付を受けて進められた。