イプシロン　2006. Vol. 48, 79-84

Collatzの $3k+1$ 予想に現れるフラクタルと記号力学

愛知教育大学数学教育講座　　橋　本　行　洋

1. 問題の紹介

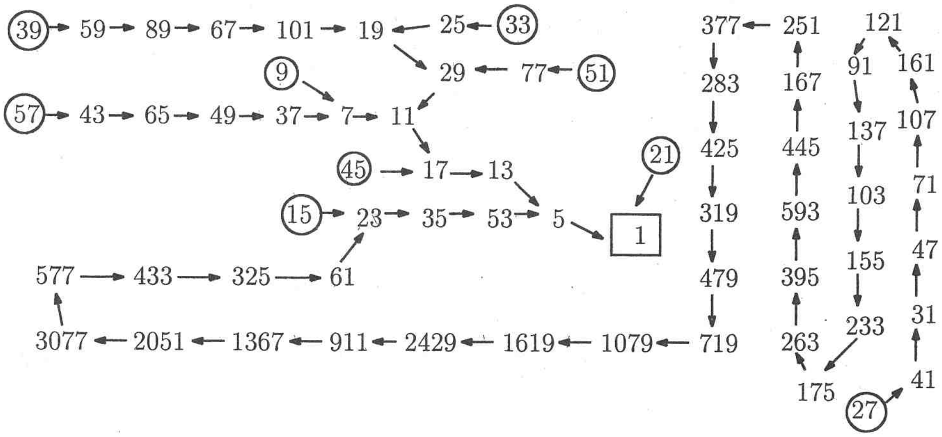
1930年代、当時学生だった Lothar Collatz は数論的関数を有向グラフに関連付けることに興味をもっていた。当時の彼のノートの一節には、後に「Hasse-Collatz-Syracuse」の問題として知られることとなる（日本では「角谷の問題」として知られている）次の問題が提唱されていた[1]。

Problem 1.1. 自然数 n について

$$H(n) = \begin{cases} 3n+1, & n\text{が奇数のとき}, \\ n/2, & n\text{が偶数のとき} \end{cases}$$

という操作 H を考える。するとどんな自然数 n についても操作 H を繰り返せばいつかは必ず1にたどりつくらしい。

具体的にいくつか実験してみよう。（以下では偶数が出てきたら2で割れるだけ割り奇数にして、常に奇数の部分だけ考えることにする。従って操作 H も奇数から奇数への写像と考える。）



このようにどれも必ず1にたどりつくように思われる。実際、相当大きな数まで computer によって確認されている[2]。この問題に関しプロ、アマの数学者によって様々な角度から

[1] 実際にノートに書かれていた問題は

$$H(n) = \begin{cases} 2n/3 & \text{if } n \equiv 0 \pmod 3, \\ (4n-1)/3 & \text{if } n \equiv 1 \pmod 3, \\ (4n+1)/3 & \text{if } n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

についてその有向グラフを考察することだったが、現在では「$3k+1$ 予想」が広く知られている。詳しくは [3] を参照。

[2] [1] によれば 1.2×10^{12} まで確かめられているとのこと。

のアプローチがなされてきた [5]。しかし「2 で割れるだけ割る」という操作が入ることから、自然数を 2 進数展開して上記の写像 H を観察するというのがごく自然な発想だろう。このノートでは、「逆 2 進数展開」なる方法によって見えた Collatz の問題に付随するある Fractal 集合の構造を紹介する。なお、より詳細な解析は [2] にて行っている。また複素関数からのアプローチが [4] で行われている。

2. 逆二進数展開

まず操作 H を 2 進数で書いてみよう。たとえば $H(53)$ の計算を見てみる。

式	10 進数	2 進数
n	53	110101
		110101
		+)1101010
$3n$	159	10011111
		+)　　　1
$3n+1$	160	10100000
$\dfrac{(3n+1)}{2^{\sigma}}$	5	101

特に最後の「2 で割れるだけ割る」という操作は末尾の 0 を全て消すという操作に対応している。また、$3n$ という操作は $2n+n$ と考えれば与えられた 2 進数の末尾に 0 をつけ、それをもとの 2 進数に足すという操作をしていることになる。それはあたかも 0, 1 の並びが「運動」しているかのようだ。そこでこの「運動」を図式化すること、つまり写像 H のグラフを描くことを考えよう。しかしそのまま自然数あるいは 2 進数を数直線上に並べたのでは無限に広いグラフ用紙が必要となってしまう。そこで自然数を次のように区間 $[0,1)$ の実数と対応づけることを考えた:

$$n=\sum_{i=0}^{l} a_i 2^i \quad \to \quad x \doteq \sum_{i=0}^{l} \frac{a_i}{2^{i+1}} \in [0,1), \qquad a_i = 0,1.$$

(例えば $53_{10}=110101_2 \to 0.101011_2$) つまり 2 進数を「裏返し」て小数点以下の数にする。こうすることで全ての自然数を有限な区間 $[0,1)$ へ重複無く埋め込むことができる。(特に偶数は $[0,\frac{1}{2})$ に、奇数は $[\frac{1}{2},1)$ に埋め込まれることに注意。) この対応 (逆 2 進数展開) を β と書こう。すると奇数から奇数への写像 H は変換 β を通じて $[\frac{1}{2},1)$ 上の写像として捉えられ、そのグラフを描くことができる。

3. Collatz 集合

H のグラフを描こうとすると $(n, H(n))$ という点を座標平面にプロットすることになるが、このままでは全ての奇数について描くことができない。しかし変換 β を通せば $(\beta(n), \beta\circ H(n))$ という $[\frac{1}{2},1)^2$ 内の点をプロットしていけばよい。これを実際に実行したものが Figure 1 だ。この集合 $\mathfrak{C}$ を Collatz 集合と呼ぼう。つまり

$$\mathfrak{C}=\{(\beta(n), \beta\circ H(n)) \in [\frac{1}{2},1)^2 \,|\, n:\text{奇数}\}.$$

この図には Collatz の写像 H のいろいろな性質が反映している。大まかなこの図の構造は次のようになっている (Figure 2)。

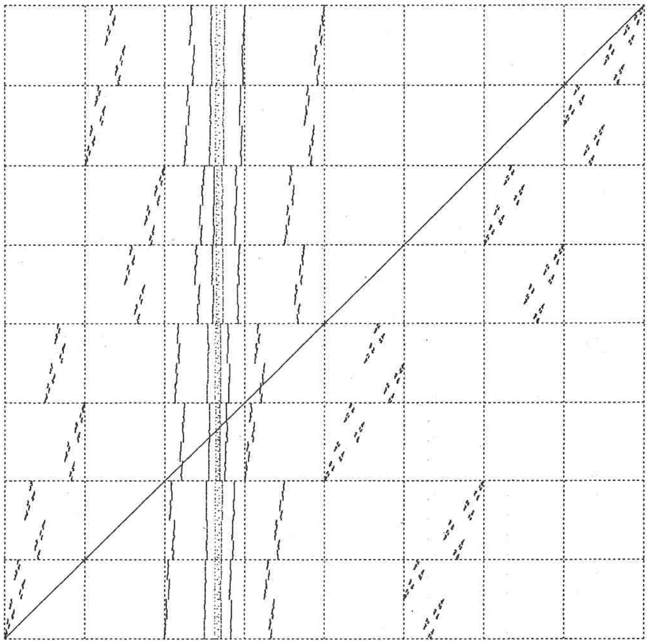


FIGURE 1. Collatz 集合 $\mathfrak{C}$

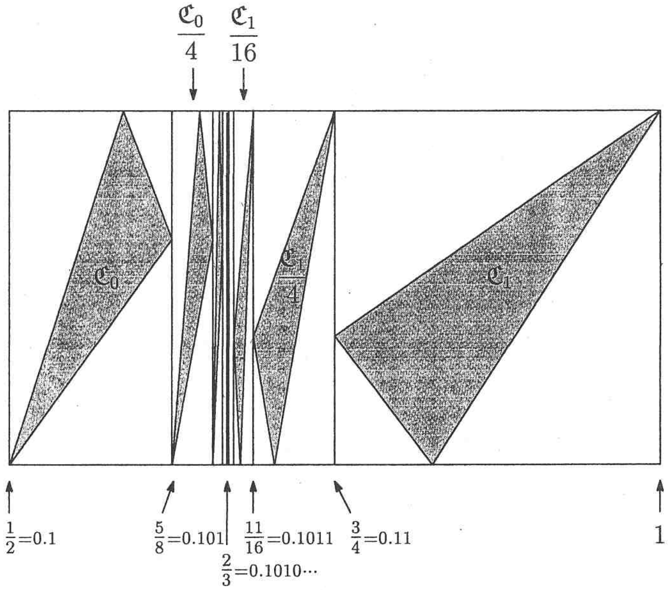


FIGURE 2. Collatz 集合 $\mathfrak{C}$ の構造

区間 $[\frac{3}{4},1)$ 上の図形（$\mathfrak{C}_1$ と名づける）が基本となって横軸方向に 1/4 倍した図形がその左の区間 $[\frac{11}{16},\frac{3}{4})$ にそのまた 1/4 倍の図形がその左 $[\frac{43}{64},\frac{11}{16})$ に... といった具合に直線 $x=\frac{2}{3}$ へ右から近づいていく。また同様に区間 $[\frac{1}{2},\frac{5}{8})$ 上の図形（$\mathfrak{C}_0$ と名づける）が基本と

なって1/4倍ずつされながら左から $x=\frac{2}{3}$ へ近づいているのが分かる。これらの事実は写像 H の以下の簡単な性質によって示される。

Lemma 3.1. n が奇数なら $H(4n+1)=H(n)$.

このLemmaに現れる $4n+1$ という操作は逆2進展開の言葉で見ると、与えられた2進小数の先頭に新たに「10」を付け足していることになる。(例えば $n=3$ のとき $\beta(3)=0.11$、$\beta(4\cdot3+1)=0.\mathbf{10}11$.) そして丁度この操作を無限に繰り返していった先が $\frac{2}{3}=0.101010\cdots$ なのである。また一方 $\mathfrak{C}_0$ は $\mathfrak{C}_1$ を横に1/2倍し180°回転させたものになっていることも見て取れるだろう。つまり集合 $\mathfrak{C}_1$ が写像 H の本質だと考えられる。

そこで次に $\mathfrak{C}_1$ について詳しく観察しよう (Figure 3)。これは見るからに自己相似集合 (＝全体が部分に相似) だ。実際、初等的な計算によって次の結果を得る。

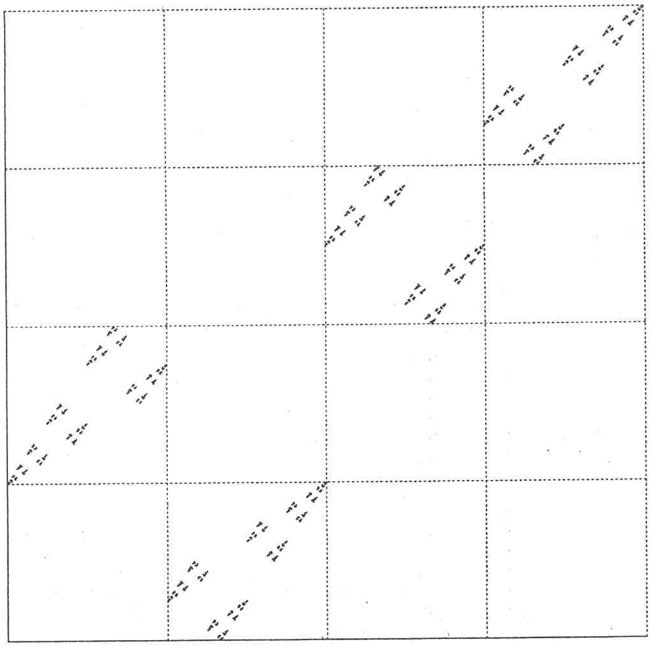


FIGURE 3. 自己相似集合 $\mathfrak{K}$

Theorem 3.2. 次の単位正方形上の写像 $g_1, g_2, g_3 : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ を考よう。

$$
\begin{aligned}
g_1(x,y) &= \frac{1}{2}(x,y)+(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\\
g_2(x,y) &= \frac{1}{4}(x,y)+(\frac{1}{4},0),\\
g_3(x,y) &= -\frac{1}{4}(x,y)+(\frac{1}{4},\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

この3つの写像から生成される自己相似集合を $\mathfrak{K}$ と書こう。

すると $\mathfrak{C}_1$ の閉包は写像 $T_1(x,y)=(4x-3,2y-1)$ によって $\mathfrak{K}$ と *Affine* 同相になる。

更に、自己相似集合であるばかりでなく

Theorem 3.3. $\mathfrak{K}$ の *Hausdorff* 次元は1、位相次元は0 の *Cantor* 集合である。したがって $\mathfrak{K}$ は *Fractal* 集合である。

証明には Hutchinson の定理を使った。

4. 加法的整数論から記号力学へ？

前節の結果により、変換 β を通して Collatz の写像を視覚化することはできた。しかし操作を繰り返すことによって生まれる「運動」（あるいは力学系）については何等の答えも得られていない。この研究の本来の目的もこの「運動」の解析であった。実際どのような運動が起こっているのか、その運動の軌跡を具体的な数 $N=27$ について見たものが Figure 4 だ。このように 非常に複雑な軌跡を描くにもかかわらず必ず 1 にたどりついてしまうのは「奇跡」に思える。この事実をいかにして数学に載せていくか？この運動を記号力学の言葉で記述するのは一つの試みであろう。実際 Collatz の写像よりずっと簡単な

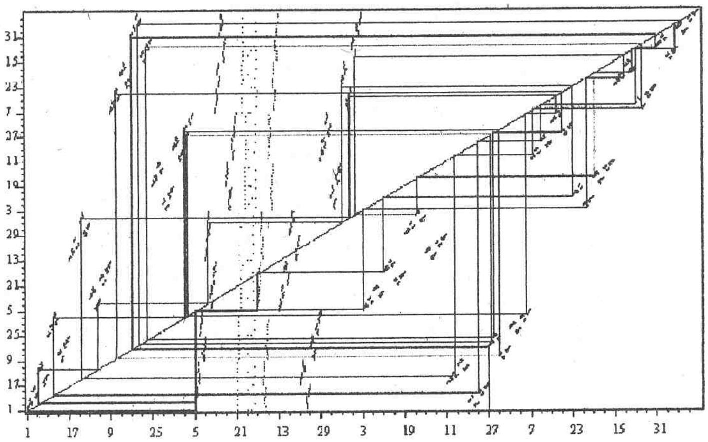


FIGURE 4. $N=27$ の軌跡

$$K(n)=\begin{cases} n+1, & n\text{ が奇数のとき,}\\ n/2, & n\text{ が偶数のとき}\end{cases}$$

については（この操作の繰り返しではどんな自然数 n もやがて 1 になることはすぐ分かる）、以下に見るように記号力学の言葉で完全に記述できる。

写像 H の場合と同様に K についても偶数のときは 2 で割れるだけ割ってしまうことにして K を奇数から奇数への写像と考える。一方、次の写像 $F:[1/2,1)\to[1/2,1)$ を考える。

$$x\in[1-2^{-t},1-2^{-t-1})\quad(t=1,2,3,\ldots)\text{ のとき } F(x)=2^t(x-1)+3/2.$$

すると $\beta\circ K=F\circ\beta$ が成り立つ。言い換えると K と F は β を通してみれば同じ「運動」をしており、K を考える代わりに F を考えてもよいということだ。（しかし写像 H で F に対応するものを考えるとその形はとても複雑だ！）すると写像 F は区間 $[1/2,1)$ を

$$[1/2,3/4),\ [3/4,7/8),\ [7/8,15/16),\ \ldots$$

のように Markov 分割しているので、F による運動を記号列の運動として書き直すことができる。つまり、記号力学の言葉でもとの操作 K が表されるというわけだ。例えば、

$n = 15587$ について $K(15587) = 3897$、$K(3897) = 1949$、$K(1949) = 975$、$K(975) = 61$、$K(61) = 31$、$K(31) = 1$ となるのだが、これらを逆 2 進数展開したものに以下のルール

(1) 逆 2 進数展開の先頭の 0.1 を削除する
(2) 先頭から順に見て $11\cdots10$(1 が l 個連なっている) という塊があったら $11\cdots10 \to l$ と記号をおきかえる
(3) その続きが $00\cdots0$(0 が m 個連なっている) ならばそのまま $00\cdots0 \to 00\cdots0$ と連なっている 0 の個数を変えずに記号を付け加える

を適用してできる記号列の変化を観察してみよう。

n	$\beta(n)$	記号列
$n = 15587$	$x = 0.1\ 10\ 00\ 1110\ 0\ 1111$	100304
$K(n) = 3897$	$F(x) = 0.1\ 00\ 1110\ 0\ 1111$	00304
$K^2(n) = 1949$	$F^2(x) = 0.1\ 0\ 1110\ 0\ 1111$	0304
$K^3(n) = 975$	$F^3(x) = 0.1\ 1110\ 0\ 1111$	304
$K^4(n) = 61$	$F^4(x) = 0.1\ 0\ 1111$	04
$K^5(n) = 31$	$F^5(x) = 0.1\ 1111$	4
$K^6(n) = 1$	$F^6(x) = 0.1$	$\emptyset$

操作 K を施すということが、記号列の先頭から記号を一つずつ削っていく操作に他ならないことが見てとれるだろう。このようにして一見複雑な動きをしている「整数の運動」が記号力学の言葉で書き直すととても単純なものに見えてくる。

だからこうした表現が Collatz の写像についても得られるならば（今のところ成功していないが)、Collatz 予想の解決にある程度近づけるのではなかろうか。そしてまた「なぜ $3k+1$ なのか」という問にも答えられるのではなかろうか。これまでの数学で扱い辛い無数にあるこういった類の加法的性数論における未解決問題（[1] 参照）へ力学系を応用する試みはとても魅力的だと感じている。

References

[1] リチャード・ガイ, 数論における未解決問題集, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.
[2] Y. Hashimoto, *A fractal set associated with the Collatz problem*, Bull. Aichi Univ. of Education **56**, 2007 (to appear).
[3] J. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalization*, Amer. Math. Monthly **92**, 3-23, 1985.
[4] T. Urata, *The Collatz problem over 2-adic integers*, Bull. Aichi Univ. of Education **52**, 5-11, 2003.
[5] G. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the $3x+1$ Function*, Lect. Notes in Math. **1681**, Springer, 1998.

E-mail address: ykhashi@auecc.aichi-edu.ac.jp