イプシロン　2004. Vol. 46, 21-30

逆思考問題の問題解決に関する調査とその分析

：正答率と正誤パターンの学年間での変化に焦点をあてて

愛知教育大学　山　田　篤　史

1．はじめに

従来から１段階の加減文章題には相対的な困難性が指摘されており，「結合・変化・比較」の３タイプの加減文章題の中では「比較」が難しいとか，「未知数」が文の最初に来る問題は難しい等，いくつかの結果がある(例えば，Riley *et al.*(1983); Ishida(1987))。この種の相対的に難しい一段階加減文章題の解決には，様々な知識が必要であろうが，例えば，Riley & Greeno(1988)の研究では，「未知数」が問題文の最初に来るような変化問題では，最初の量から結果量への動的・時間的変化を捨象し，それらの量を静的・構造的な「部分－全体関係」に関係付けて理解することが，解決促進への鍵になることが示唆されている。これらは「比較」問題の一部についても言えることであるようで，結局，この種の問題解決では，先の３タイプの文章題から構成される表象全てを，より抽象的な「部分－全体関係」で処理できることが重要になってくるわけである。

このように，一部の問題解決では，問題文中に現れる量の時間的変化を逆に辿ったり，それを捨象し，より抽象的な問題構造の一部と見て解決を図ることが重要になるときがある。例えば，逆思考問題の解決などはその典型例であろう。この逆思考問題とは，「問題文中のある未知の量が時間経過に伴い変化し，結果量だけが既知である状況で，その結果量から時間経過と変化の様相を逆に辿って，はじめの量を求める問題」のことであり，算数の中では第２学年から頻繁に登場する問題形式である。具体的には，「公園で何人か遊んでいました。そのうち２人が帰りましたが，４人残っています。公園で何人あそんでいましたか。」といった問題などがそれにあたるだろう。

この種の問題解決において経験的事実として興味深いのは，小学校高学年であれば，加減の１段階逆思考問題はほとんどの場合解決可能であるのに対し(例えば，Riley *et al.*(1983))，乗除の１段階逆思考問題では，乗除の計算が十分できる高学年の児童でさえ，依然として順思考に比して相対的な困難が伴う場合があるということである(注 1)。もちろん，この種の問題の難しさの大きな要因が，乗法構造や小数・分数，さらには割合概念の理解などにあることは言うまでもないが，低学年での逆思考問題における，「量の時間的変化を逆に辿る」「量の時間的変化を静的な関係の中に関係付ける」という思考が，その種の問題解決にいかに働いているかについては，それほど分かっていないのが現状であろう。

もちろん，逆思考問題の難しさは古くから指摘されており，その問題解決過程に関しても，例えば，川口(1970)や伊藤(1970)に詳細な議論がある。しかし，これらも含めた議論の多くは，ど

ちらかといえば指導への示唆を引き出すためのものであって，経験的なデータに基づく議論ではないのが現状である。一方，実際の児童・生徒の問題解決過程の様相を捉えた研究としてはWatson(1994)があるが，やや特殊な乗法構造の逆思考問題１問に限った研究であるし，加法構造と乗法構造という２つの数学的構造を持つ逆思考問題の間での調査にはなっていない。さらに，加法構造と乗法構造を横断した問題解決能力の発達的性質やそれらの問題群の相対的困難度も興味深い問題なのであるが，それについても広範な研究が行われていないのが現状である（例えば，Christou & Philippou(1998)などが散見されるに留まっている)。もちろん，基本的な加減文章題や，乗除文章題に関する経験的な研究は多いのだけれども，「加法構造と乗法構造を横断する逆思考問題についての研究」という観点から見れば，その知見は，いくつかの同種の研究の中に分散して存在しているだけであり，それらを統一的に議論した研究は殆ど見られないのが現状であろう。

そういった現状に鑑み，筆者は，逆思考問題の解決過程に関する基礎的な資料を得るために，加法構造並びに乗法構造を持ついくつかの簡単な（整数範囲で解決可能な）順思考／逆思考問題に関して，小学校第２学年から第６学年までを被験者にして調査を行った。本稿では，その結果について報告し，またそれを基にした手短な議論をすることを目的にするものである。

２．調査の概要

加法構造と乗法構造を横断する逆思考問題について，小学校段階での実態を検討するために，以下のような調査を実施した。調査対象は，国立大学法人附属小学校の第２学年から６学年までの児童（各学年２学級ずつ）であり，各学年の被験者数は表１の通りである。また，調査実施時期は，2004 年６月であった。

表１：各学年の被験者数

	第２学年	第３学年	第４学年	第５学年	第６学年	合計
被験者数	78	80	76	77	77	388

調査問題は，加法構造と乗法構造のそれぞれに対して，順思考問題と逆思考問題を作成することにした。また，本稿では分析に加えないが，やや複雑な乗法構造の逆思考問題を加え，合計５問構成にした。具体的な問題は下の表２にあるが，これらのうち問題１～４までは被験者毎で問題順序が異なるように並び替え，最後に問題５を配置し，全体を冊子の形にして配付した。問題の解答にあたっては，解き方を説明するように表紙に指示が与えられていたが，問題３～５に関しては，問題文の中にも注意を与えておいた。また，解答時間は 25 分とした。

問題３は，小学校の第２学年で登場する標準的な加法構造の逆思考問題である。加法構造の順思考問題は，この問題３を基準にして作成した。また，そのカバーストーリーを同じにして，乗法構造の問題（問題２，４，５）を作成したが，乗法構造を与えるオペレーターとしては「半分

（にする)」を選んだ。これは，小学校第２学年から第６学年まで，共通の問題を解決させるためである。「半分（にする)」という操作や用語は，有理数概念の基礎にある「(等）分割」という操作・概念の初源的概念に当たり(Pothier & Sawada,1983)，数学的には不完全であるかもしれないが，児童が小学校就学以前から社会的状況の中で既に学習している可能性が高いと考えられるものである(注 2)。もちろん，「半分」という用語が乗法構造的なオペレーターであるか否かについて議論の余地はあるだろう。また，例えば上の問題２の解決過程を考えたとき，式の上では 14 人のうち残った 7 人と帰った 7 人の区別がつかないこともあり，乗法構造の理解では重要な「何が当該オペレーターにより変化した結果量なのか」(比の第２用法で考えれば，「何が，基準量に当該の比・割合をかけた比較量なのか」）が分かりにくいという，欠点も持つ。しかし，乗法構造に関わる問題解決では，正答率は，小数や分数などの数の種類によって影響を受けやすいのであるし(前田,1999)，割合概念の理解状況等によっても影響を受けやすいものでもある。今回の乗法構造の問題におけるオペレーターの選択は，そういった要因を排除して，第２学年から第６学年まで同一問題で調査を行うことを優先させたためである。なお，問題文中の漢字は学年に合わせて，適宜，平仮名に直し，できるだけルビも振るように配慮した。

表２：調査問題

【問題１：加法構造順思考問題】

子どもが８人遊んでいました。いま，６人の子どもが帰りました。みんなで何人になったでしょう。

【問題２：乗法構造順思考問題】

子どもが 14 人遊んでいました。いま，子どもの半分が帰りました。何人の子どもが帰ったのでしょう。

【問題３：加法構造逆思考問題】

子どもが遊んでいました。そのうち５人が帰ったので，９人になりました。はじめ何人いたのでしょう。あなたの考え方も説明せつめいしてください。

【問題４：乗法構造逆思考問題】

子どもが遊んでいました。そのうち半分が帰ったので，６人になりました。はじめ何人いたのでしょう。あなたの考え方も説明せつめいしてください。

【問題５：複雑な乗法構造逆思考問題】

子どもが遊んでいました。お昼に，半分の子どもが帰りました。夕方に，残りの子どもの半分が帰りました。すると，残りは４人でした。はじめ何人の子どもが遊んでいたのでしょう。あなたの考え方も説明せつめいしてください。

3．調査結果

ここでは，まず，調査のスコアリング方法について簡単に触れ，その後，(1)各学年における問題毎の正答率，(2)各学年における問題１～４までの個人の正答パターンの度数分布，という観点から調査結果を整理する。

問題解決のスコアリングに関しては，解答に対する説明を求める問題であれば，解答に至る考え方なども得点尺度として考慮し，例えば，Charles *et al.*(1987)の「分析的スコアリング(Analytic Scoring)」や「全体論的スコアリング(Holistic Scoring)」のようなスコアリングを考えるべきであろう。しかし，今回のスコアリングに関しては，調査結果の大まかな傾向を見ることを重視して，やや極端に「正答・誤答」（本来の「正答」「誤答」の意味とはずれている）の２値でスコアリングすることにした。その際，式に対する説明が無く，しかも，解答用紙に「答え」と記してある場合や，式の計算結果をカッコ囲みで別に記すなどして明示的な答えの指示がある場合には，「何を答えとするか」という点についての理解を重視し，指示部分の答えを優先させてスコアリングを施した。例えば，問題３において，「14-5=9，答え.9」とだけ書いてある解答が見られたが，今回のスコアリングでは，「誤答」とした。また，「14-5=9」のように式だけが書いてある場合も，その計算結果を答えと見なし「誤答」とした(注 3)。ただし，もちろん，「14-5=9，14」という解答や，明確な答えの指示は無いものの解答の説明部分に式の説明や考え方の説明などが入れてあるものは「正答」としている(注 4)。

(1) 各学年における問題毎の正答率

第２学年から第６学年までの各学年における問題毎の正答率は，以下の表３の通りである。

表３：各学年における問題毎の正答率

	1.加法順思考	2.乗法順思考	3.加法逆思考	4.乗法逆思考	5.複雑問題
２年(n=78)	0.910	0.577	0.782	0.462	0.167
３年(n=80)	0.913	0.725	0.925	0.700	0.225
４年(n=76)	0.961	0.895	1.000	0.908	0.553
５年(n=77)	0.948	0.909	0.961	0.935	0.714
６年(n=77)	0.987	1.000	0.987	0.974	0.883

(2) 各学年における問題１～４までの個人の正答パターン

(1) では，各学年における問題毎の正答率について述べたが，被験者は５問の問題を解いているわけであるから，より興味深いのは各学年毎の被験者の正誤パターンとその学年間での変化であろう。しかし，その正誤パターンは$2^5 = 32$通りにもなり，各学年とも被験者が 80 人程度であるのに対して多すぎる感がある。そこで，やや特殊な問題５を含めた分析は別の機会に譲り，本稿では，加法構造／乗法構造，順思考／逆思考，という枠組みに着目し，問題１～４に限定した正誤パターンをみることにした。

まず，上のスコアリング方法に基づく「正・誤」のラベリングを「○・×」とし，問題１～４の正誤を左から順番に並べていくことで，個々の被験者の問題１～４の正誤パターンを表すことにしよう。例えば，ある被験者が，問題１と３には正答し，問題２と４には誤答したとすると，この被験者の正誤パターンは「○×○×」と表されることになる。この表記法に基づき，各学年の個人の正誤パターンの度数を集計したものが表４である。なお，問題１～４までに議論を限定したとすると，正誤パターンは $2^4=16$ 通りとなるが，実際に現れたのは，表４の通り 13 パターンであった。

表４：学年毎の個人の正誤パターンの度数

		2年	3年	4年	5年	6年	総度数
Pattern 01	××××	2	3	0	0	0	5
Pattern 02	××○×	4	1	1	2	0	8
Pattern 03	××○○	0	2	0	0	0	2
Pattern 04	×○○×	1	0	0	0	0	1
Pattern 05	×○○○	0	1	2	2	1	6
Pattern 06	○×××	7	2	0	1	0	10
Pattern 07	○××○	1	0	0	1	0	2
Pattern 08	○×○×	15	9	2	4	0	30
Pattern 09	○×○○	4	5	5	1	0	15
Pattern 10	○○××	6	0	0	0	0	6
Pattern 11	○○×○	1	1	0	1	1	4
Pattern 12	○○○×	7	7	4	0	2	20
Pattern 13	○○○○	30	47	62	67	73	279

表４には，問題１（加法構造を持つ順思考問題）に誤答しているものや(Pattern 01～05)，総度数自体が少ないもの(Pattern 03,04,07,11)，問題１に対する不注意のミスと考えられるもの(Pattern 05)など，やや撹乱的な情報を含むと思われるパターンも見られる。また，Pattern 02,06,10 は学年進行に従って度数が減るのが速いのに比して(注 5)，Pattern 08,09,12 ではその度数の減り方が若干遅い，といった特徴なども見受けられる。

４．議論

表３を見ると，加法構造の問題に関して，順思考問題（問題１）では，第２学年で既に正答率が９割を越えている。ところが，順思考問題（問題１）と逆思考問題（問題３）の正答率の差には若干の開きがある。ただし，結局，第３学年頃までには逆思考問題も９割を越えて，その差は解消されている。この結果は，Riley *et al.*(1983)や Ishida(1987)の結果にかなり近いものである。

Riley *et al.*(1983)や Ishida(1987)で用いられた問題のカバーストーリーや数値は，本稿のものとはかなり異なるが，下の表５のように，問題構造毎に先行研究の結果と本稿の結果を比較してみると，それらが非常に似ていることが分かるだろう。ちなみに，Riley *et al.*(1983)と Ishida(1987)の順思考問題と逆思考問題は，それぞれ，8-5=X と X-5=3 のような構造を持っており，カバーストーリーは，ビー玉やキャラメルのやり取りである。

表５：先行研究の結果と本稿の結果との比較

	Riley *et al.*(1983)*		Ishida(1987)		本稿	
	順	逆	順	逆	順(14-7=X)	逆(X-5=9)
第２学年	1.00	0.70	0.97	0.76	0.910	0.782
第３学年	1.00	0.80	0.91	0.85	0.913	0.925

* Riley *et al.*(1983)の実験では，おはじきの使用が認められていた。

このように，加法構造の２問の正答率に関する学年間での変化は先行研究のものと似ており，それを追認するものでしかない。しかし，そこでの傾向を乗法構造の問題群における結果と対比させて見てみることは興味深いだろう。

加法構造の順思考問題（問題１）と逆思考問題（問題３）との間にある正答率の差は，第２学年では１割強あるが，第３学年ではほぼ解消されてしまう。そして，加法構造の２問の正答率に関する学年間の変化の傾向（第２学年で見られる順思考問題と逆思考問題との正答率のギャップは第３学年で解消されるという傾向）は，表３を見る限り，乗法構造の問題間にも同様に見受けられる。すなわち，乗法構造の順思考問題（問題２）と逆思考問題（問題４）との間にも，第２学年当初から正答率に若干の差が見られるが(注 6)，それは第３学年ではほぼ解消されてしまうのである。しかも，全体的な正答率が９割以上に達することによって（つまりは，天井効果に近い形で）差が消えるのではなく，第３学年では７割程度で拮抗している点には注目してもよいだろう。

こうした加法構造と乗法構造を横断して見られる傾向性を確認するには，もちろん，更なる検証が必要なのだが，そういった傾向性の原因について議論しておくことは，今後の研究課題を探る上でも重要なことであろう。

まず，加法構造の２問に関して第２学年の時に見られた正答率の差が第３学年で解消されるという傾向は，第一には，第２学年で加法構造の逆思考問題を明示的に学習することから来るものであると推測されよう。米国での学習状況は確認できないが，少なくとも我が国では，第２学年終了時までに加減の意味に関して加法構造を網羅する形で学習し，その中で，問題場面の時間的経過や操作を考えて，「手順を逆向きにたどる」(菊地,1995)，あるいは「逆向きに考える」という方略を（多分に暗黙的ではあるが）学習する。こうした加法構造に関する学習の現状は，ここで議論している２問の加法構造問題の正答率に見られる学年間での傾向性を，最もよく説明する

要因となる。ただし，低学年段階で，逆思考問題の意味論的理解を支援するこの種の思考方略を，全ての児童が乗法構造の問題にも使える形で獲得できているかについては，さらに議論が必要である。

例えば，表３だけしか見ないならば，第２学年におけるその種の思考方略の学習・獲得が，第３学年における乗法構造の順思考問題と逆思考問題の正答率の差の解消に繋がった，と推測することができるかもしれない。また，表４の Pattern 10 を見ると，この「順思考だけはできる」というパターンが第３学年以降では急速に少なくなっているので，そこに逆思考方略が機能していることを読み取ることができるかもしれない。しかし，より高学年までその頻度が持続する Pattern 12 (注 7)を中心に，順思考問題に正答しているパターンだけを見てみれば，低学年においては，加法構造の問題と乗法構造の問題で逆思考方略の機能の仕方が異なることを予見させるパターンがあることに気づくだろう。具体的には，順思考問題に誤答している Pattern01～09 を除き，Pattern 10～13 を対象にして，逆思考問題の正誤に関してクロス表を作ってみると，低学年では乗法構造の逆思考問題が相対的に困難であり，学年進行と共に，両方の逆思考問題が出来るという傾向が見出せるのである（表６）。

表６： 順思考問題の正答者の逆思考問題の正誤パターン（第２～４学年）

第２学年

		乗法		計
		○	×	
加法	○	30	7	37
	×	1	6	7
計		31	13	44

第３学年

		乗法		計
		○	×	
加法	○	47	7	54
	×	1	0	1
計		48	7	55

第４学年

		乗法		計
		○	×	
加法	○	62	4	66
	×	0	0	0
計		62	4	66

加法構造の問題も乗法構造の問題も，学習当初や未習時には逆思考問題の方が難しいと思われるのだが（実際，本稿の調査時に，第２学年では，加法構造の逆思考問題や乗法構造の問題は未習であり，表３もそういった傾向を示している），こうした問題文における意味論的差異に伴う困難性は，「手順を逆向きにたどる」「逆向きに考える」といった思考方略ばかりでなく，加法構造・乗法構造の理解によっても影響を受けるはずである。低学年での Pattern 08 の頻度の高さが示すように，乗法構造に対する理解（特に，本稿の問題では，乗法的なオペレーター，すなわち，言語的には馴染みがあるが，「分割」や「割合」の素朴概念と見ることも出来る「半分（にする)」，にまつわる理解・経験の差）は無視できないものなのであろう。

最後に，興味深い結果として，第３学年でも７割，第２学年でも４割５分の児童が，乗法構造の逆思考を解決できたということには，注目してもよいだろう。第２学年では，わり算は未習であるし，加法構造の逆思考問題も未習であったのだが，かなりの児童は，各自が持っている「半分」にまつわる知識を使って問題を解決することができている。この「半分」という乗法的なオ

ペレーターは，分割という操作の最も素朴なものであるし，当該問題文の中では割合の素朴概念と見ることもできよう。もちろん，問題がフォーマルな算数の問題とは言い難い面もあるため，純粋に「インフォーマルな知識」に関わる先行研究との比較は出来ないであろうが，今後，この分野（例えば，割合，分数など）で，児童のインフォーマルな知識に基づく指導を考えようとする場合には，十分参考にされてよい結果だと思われる。

5．まとめと今後の課題

本稿では，加法構造と乗法構造の逆思考問題について，小学校第２学年から第６学年までを被験者にして行った調査に関して報告し，またその結果に基づく手短な議論を２点ほどした。その１つ目は，第２学年の結果に見られる加法構造の問題間の正答率のギャップが第３学年では解消されるという傾向が，同学年間での乗法構造の問題群の正答率間においても見られる，という点である。ただし，これについての確証は，さらなる検証を待たなければならない。２つ目は，乗法構造の問題では「半分」というやや特殊な乗法的オペレーターが使われているものの，第２学年の児童でも４割５分程度が逆思考問題を解決できた，という点である。

今後の課題としては，上記の２つの論点に関して，児童が問題解決に際して使った方略についての分析を含めて議論することであろう。

注

(注 1) 例えば，同じ比の第二用法を用いる問題ではあっても，時間的な順序を逆に辿らなければならない問題の方が正答率は落ちるという結果もある。例えば，上谷(印刷中)は，下の２問を，２つの小学校から構成される独立な２群の６年生(9 月中旬)に解かせてみたところ，以下のような結果を得ている。

[1] たろう君の学校の今年の児童数は，650 人です。10 年前は今年の 130%にあたる児童がいました。10 年前の児童数は何人ですか。

[2] はな子さんの学校の 10 年前の児童数は 850 人でした。今年は 10 年前の 70%にあたる児童がいます。今年の児童数は何人ですか。

	正答率
[1] (N=79)	0.861 (n=68)
[2] (N=75)	0.950 (n=71)

比率の差の検定をする限り $\chi^2(1)= 3.2297$，p 値=0.072 と，5%水準で有意差は無いものの，有意傾向は確認できる。

(注 2) 「半」と「分」という漢字自体も，小学校第２学年で学習するものである。

(注 3) この種の解答は第２学年に多いが，この調査時期に，第２学年の被験者のクラスでは，まだ加法構造の逆思考問題を扱う単元に入っていなかったことを考慮に入れる必要があるかもしれない。もし「式は問題場面を記述するものだ」という理解をしているとすると，「14-5=9」という式の部分に関しては，問題場面を理解しているとも言えるだろう（もちろん，その理解自体に問題はなく，むしろ，現行カリキュラムでは未知数を明示的に取り扱わないことや，「式は 9+5=14 と書きなさい」と指導されてしまうことの方が問題かもしれない)。その意味では，「14-5=9，答え．9」や「14-5=9」という式だけの解答を「誤答」とするのは，やや厳しく感じられるかもしれない。しかし，一方では，「問題が求めているものは何か？」という点を押さえているか，という観点から見ると，この種の解答は不注意と言わざるを得ないし，「問題場面を本当に理解しているのか？」という観点から見ても微妙な面があるだろう。むしろ，この種の解答を巡っての問題は，「明示的に逆思考問題の指導を受けていない児童が逆思考問題に遭遇した場合，式をどのようなものとして使うか，あるいは問題場面をどのように式表現するか」といった新たな研究課題の文脈で議論されるべきだと考える（注４も参照のこと)。

(注 4) 例えば，問題３では，「しき　14-5=9，　かんがえかた　9+5=14 だから 14-5 にした」という解答などが典型で，一貫してこのような説明が入れられている場合には「正答」としている。

(注 5) 上でも述べた通り，Pattern 02 は問題１に誤答しているため，実際には個別に質的な分析をした方がよいだろう。

(注6) 第２学年における順思考問題と逆思考問題の正誤に関して McNemar検定を行ったところ，加法構造の問題間には５％水準で有意差はあったが($p=0.044$)，乗法構造の問題間には５％水準で有意差は無く($p=0.066$)，有意傾向しか無かった。そのため，第２学年における乗法構造の順思考問題と逆思考問題の正答率の間の差については，更なる調査検討が必要となる。

(注 7)より高学年までその頻度が持続するパターンは，他にも Pattern 08,09 がある。Pattern 08 は，乗法構造の両方の問題に正答できていない訳であるから，結局のところ乗法構造に対する理解の欠如が問題となるのだと思われる。また，Pattern 09 は，個別に解答を見てみても，本稿のやや特殊なスコアリングに影響を受けているものではない解答がほとんどであるため，やや特殊な傾向であると思われる。

文献

伊藤武(1970).「問題の意味と問題構成」(pp.127-156). 川口廷,中島健三,中野昇,原弘道(編集),『算数教育現代化全書　第９巻　問題解決』. 金子書房.

上谷伸二(印刷中).「数学教育におけるメンタルモデルに関する研究(III)：割合概念に対する子どものメンタルモデルの様相」. 日本数学教育学会,『第 37 回論文発表会論文集』. 岡山大学.

川口廷(1970).「問題の意味と問題構成」(pp.55-92). 川口廷,中島健三,中野昇,原弘道(編集),『算数教育現代化全書　第９巻　問題解決』. 金子書房.

菊池兵一(1995).「若干の一般的方略を総合する一視点としての「逆向きの考え」」. 日本数学教育学会(編),『日本の算数・数学教育 1995:数学学習の理論化へむけて』(pp.99-109).産業図書.

前田雅利(1999).『小学校算数におけるかけ算・わり算文章題の難易レベルに関する研究』. 兵庫教育大学大学院学位論文.

Christou,C. & Philippou,G.(1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* ***29*** (4),436-442.

Charles,R., Lester,F., & O'Daffer,P.(1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ishida,T.(1987). On relative difficulties of addition and subtraction word problems: A basic study to construct "Teaching-Learning Principles" in mathematics education. 西日本数学教育学会『数学教育学研究紀要』, 第 13 号, 1-7.

Pothier,Y. & Sawada,D.(1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education,* ***14*** (4),307-317.

Riley,M.S.,Greeno,J.G.,& Heller,J.I.(1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H.P.Ginsburg(Ed.), *The development of mathematical thinking*(pp.153-196). New York: Academic Press.

Riley,M.S. & Greeno,J.G.(1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction,* ***5*** (1), 49-101.

Watson,J.M.(1994). A diagrammatic representation for studying problem-solving behavior. *Journal of Mathematical Behavior,* ***13*** (3), 305-332.

・本研究は，平成 14～16 年度科学研究補助金（若手研究(B)；課題番号 14780099）の交付を受けて進められた。