イプシロン　2004. Vol. 46, 77-84

二等辺三角形に内在する比例

― 小学校・中学校・高等学校における取り扱いの流れ ―

宮城教育大学　数学教育講座　萬　伸介
田端輝彦
森岡正臣

1．はじめに

小学校，中学校及び高等学校における二等辺三角形の取り扱いを調べる中で，既習事項を導入として生かしている箇所が意外に少ない。本論文では，二等辺三角形に内在する比例（関係）に注目し，それから推測することによって得られる事柄が次の段階での学習の導入となることを紹介する。

小学校第４学年で「確認」された二等辺三角形の性質は中学校第２学年で証明される。この証明された二等辺三角形の性質の一つを，比例の視点でとらえることが，高等学校の「数学Ａ」で学習する三角形の性質の導入となることを指摘する。このような視点からの指摘は新しいものか否かは判断しかねるが，数学教育の実践論文等で紹介されたことはないようである。

本論文の目的は，小学校，中学校そして高等学校において，一つの教材の流れを追う教材研究の一例を紹介することである。教科書等の表記の慣例に従い，特に，角∠Ａの大きさを同じ記号∠Ａで表し，辺ＡＢの長さを同じ記号ＡＢで表し，さらに，三角形△ＡＢＣ（とその内部）の面積を同じ記号△ＡＢＣで表すことにする。

2．小学校における二等辺三角形の取り扱い

小学校第４学年で初めて学習する二等辺三角形について，小学校学習指導要領解説　算数編において「辺の長さの相等関係に着目して，二辺が等しい三角形を二等辺三角形と呼ぶ」，「実際に紙を切り抜いて作った三角形を折ってみたりするなどの活動を通して，二等辺三角形では二つの角の大きさが等しい」（［１］ｐ.120）とその定義と性質を述べている。

これに対応する教科書ではどのような記述がなされているだろうか。以下では代表的な教科書の記述を分析してみる。「新しい算数４上」では，「２つの辺の長さが等しい三角形を二等辺三角形といいます」と二等辺三角形の定義が述べられている。そして，辺の長さを指示して，いろいろな二等辺三角形を描かせた後，二等辺三角形の三つの角の大きさを比べるために，一つの頂点を含む線を折れ線として片方側を他方側へ折り重ねて，二つの角が重なることを確認している。そして，「二等辺三角形では，２つの角の大きさが等しくなっています」と述べている（［４］ｐ.60，なお［５］ｐ.８にも同様の記述がある）。すなわち，二つの辺ＡＢ，ＡＣの長さが等しい二等辺

三角形ＡＢＣにおいて，点Ａを通る直線を折れ線として折り重ねて，辺ＡＢが辺ＡＣに重なり，角∠Ｃが角∠Ｂに重なることから，角∠Ｂの大きさと角∠Ｃの大きさが等しい，すなわち，∠Ｂ＝∠Ｃが成り立つことを示している。しかしながら，このときに底辺ＢＣが二等分されていることの指摘はなされないことに注意しなければならない。なお，「算数４年下」において，「次の二等辺三角形で，２つの角の大きさが，それぞれ等しくなっていることを，分度器を使ってたしかめてみましょう」（［５］ｐ.40）という作業をしている。再度の確認をしたことになり，適切なことだと思う(注1)。

３．中学校における二等辺三角形の取り扱い

中学校学習指導要領解説―数学編―によると，第１学年において，二等辺三角形は線対称な図形の代表的なものとして取り上げられている．そこでは，二等辺三角形を対称軸で切ると，ぴったり重なり合う二つの図形に分けることができる，すなわち，「対称軸によって合同な２つの図形に分けることができる」（［２］ｐ.77）としている。このことから，底辺が対称軸によって二等分されることを指摘している。さらに，角の二等分線の作図を考え，「角の二等分線が角の対称軸となることに気づかせることができる」（［２］ｐ.79）としている。

第２学年では，「それらの性質（二等辺三角形の角や辺についての性質，平行四辺形の角や辺についての性質）を論理的に筋道を立てて正しい推論を行って調べることができるようにする」（［２］ｐ.88）が重要なねらいの一つである。三角形の決定条件をもとに，「三角形の合同条件を直感的，実験的に認めさせ，それらを推論の根拠として用いる」（［２］ｐ.90）ということをうけて，三角形の合同条件を用いて二等辺三角形の性質を証明することになる。そして，二等辺三角形の性質（底角が等しい）は，円周角が中心角の二分の一であることの証明に用いられる（［２］ｐ.93）。以下，対応する代表的な教科書の記述を分析する。「新しい数学２」においては，小学校で二等辺三角形の底角が等しいことを確認したことを導入としている。一方，「数学２年」においては，小学校で確認したと明言せずに，二等辺三角形の等しい辺が重なるように折ってみて何がわかるかを問としている。そして，それら二つの教科書においては，三角形の合同条件（２辺とその間の角がそれぞれ等しい）を用いて

定理　二等辺三角形の底角は等しい。

定理　二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分する。

の二つの定理を証明している（［８］ｐ.115－ｐ.116，［９］ｐ.108－ｐ.110）。更に，三角形の合同条件（一辺とその両端の角がそれぞれ等しい）を用いて

定理　三角形の２つの角が等しければ，その三角形は等しい２つの角を底角とする二等辺三角形である。

も証明している（［８］ｐ.118－ｐ.119，［９］ｐ.111)。ＡＢ＝ＡＣである二等辺三角形△ＡＢＣの頂角∠Ａの二等分線をひき，底辺ＢＣとの交点をＤとする。このとき，∠Ｂ＝∠Ｃ，ＢＣ⊥ＡＤ，ＢＤ＝ＣＤが証明されている。もちろん，この時点では，△ＡＢＤと△ＡＣＤの面積が等しいということの指摘はない。「新しい数学２」においては，これらの記述の十数ページ後に，「平行線と面積」という項目のなかに，「△ＡＢＣでＭはＢＣの中点です。このとき，面積の等しい三角形をみつけ，そのことを式で表しなさい」（［８］ｐ.136問１）との記述がある。これは，二等辺三角形と限定しない一般的な三角形ＡＢＣについての記述である。

中学校学習指導要領解説―数学編―では，第３学年で，三角形の相似条件を「初期の段階では直観的に，そして学習が進むにつれて論理的に理解できるようにし，演繹的な推論の一つの根拠として位置づけ，これを的確に適用できるようにする」（［２］ｐ.97）としているが，特に二等辺三角形を取り上げることはない。従って，頂角の大きさが等しい二つの二等辺三角形は相似であることは記述されていない。

中学校第１学年の段階で，「小学校で学んできた基本的な図形を対称性の観点からとらえる」（［２］ｐ.76）ことを意識して，二等辺三角形の底辺が頂角の二等分線によって二等分されることをはっきりと気づくために，具体例をノートに描いて確認しようとする作業も必要であろう。著者の一人は，実際に，適当な角∠ＸＡＹをノートに描き，半直線ＡＸ，ＡＹ上にＡからの距離が10㎝の点Ｂ，Ｃをそれぞれとり，この二点を結ぶ。続いて∠ＸＡＹの二等分線をコンパスを用いて描き，線分ＢＣとの交点をＤとする。そして，線分ＢＤとＣＤの長さを測ると，線分ＢＤの長さは2.85㎝，線分ＣＤの長さは2.95㎝となり，等しくならない。他の場合にも等しくならないことを確認している。これらは，描くことと測定すること等に誤差が存在することに起因している。従って，「気づかせる」ということは大変難しいことである。これ故，第２学年での「証明をする」ということの重要性が認識できるのであろう。

４．二等辺三角形に内在する比例

二等辺三角形をいろいろな視点で見ると，比例（関係）を見てとることができる。例をいくつか紹介する。△ＡＢＣでＡＢ＝ＡＣとする。そして，頂角∠Ａの二等分線をひき，底辺ＢＣとの交点をＤとする。このとき，三角形の合同条件（二辺とその間の角がそれぞれ等しい）より△ＡＢＤ≡△ＡＣＤが成り立つから，ＡＢ：ＡＣ＝１：１かつＢＤ：ＣＤ＝１：１であり，更に，△ＡＢＤ：△ＡＣＤ＝１：１であり，∠ＢＡＤ：∠ＣＡＤ＝１：１である(注2)。これより

定理１　△ＡＢＣでＡＢ＝ＡＣとする。頂角∠Ａの二等分線をひき，底辺ＢＣとの交点をＤとする。このとき，

ＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＣＤ

が成り立つ。

という定理が得られる。更に

系　△ＡＢＣでＡＢ＝ＡＣとする。項角∠Ａの二等分線をひき，底辺ＢＣとの交点をＤとする。このとき，

ＡＢ：ＡＣ＝△ＡＢＤ：△ＡＣＤ，　ＢＤ：ＣＤ＝△ＡＢＤ：△ＡＣＤ

が成り立つ。

という結果も得られる。

二等辺三角形に内在する比例が一般の（二等辺とは限らない）三角形にどのように伝播するかを容易に推論できるものとして，我々は上記**定理１**及び**系**の場合に注目する。

上記以外にも，

∠ＢＡＤ：∠ＣＡＤ＝ＢＤ：ＣＤ，∠ＢＡＤ：∠ＣＡＤ＝△ＡＢＤ：△ＡＣＤ

ＡＢ：ＡＣ＝∠Ｃ：∠Ｂ

等の比例（関係）も成り立つことが容易にわかる。これらの場合，例えば，半直線ＡＸ上にＡからの距離が12㎝の点Ｂをとり，半直線ＡＹ上にＡからの距離が６㎝の点Ｃをとり，この二点を結び三角形△ＡＢＣを作る。続いて∠Ａの二等分線をコンパスを用いて描き，線分ＢＣとの交点をＤとする。そして，線分ＢＤとＣＤの長さを測ると，線分ＢＤの長さは5.1㎝，線分ＣＤの長さは2.7㎝と測定された。従って，一般の三角形△ＡＢＣにおいてはＢＤ：ＣＤ＝１：１及び△ＡＢＤ：△ＡＣＤ＝１：１が成り立たないことは容易に推測される。また，ＡＢ：ＡＣ＝∠Ｃ：∠Ｂが成り立たないことも容易に推測される。

５．「数学Ａ」の平面図形の導入としての役割

三角形の性質は，高等学校学習指導要領解説　数学編理数編によると，「数学Ａ（１）平面図形」において学習することになる（［３］ｐ.79）。その内容については，中学校での学習内容を基にしたものである。すなわち，「中学校での学習内容を基にして直接扱える程度の三角形の性質として，辺の長さと角の大きさとの関係，内角・外角の二等分線と辺の比などを扱う」（［３］ｐ.80）ということに注意しなければならない。従って，中学校での学習内容を授業の導入部とすることも必要と思われる。代表的な二社の教科書「数学Ａ」の記述を分析してみる。ある社の「数学Ａ」の第３章平面図形　第１節三角形の性質，１三角形の辺と角，Ａ三角形の辺と角の大小関係の項の最初で，中学校で次のことを学んだこととして「二等辺三角形の２つの底角は等しい。２つの角が等しい三角形は，等しい２つの角を底角とする二等辺三角形である」（[11]ｐ.86）と述べ，三角形の辺の大小と角の大小の関係を調べている。その後，三角形の二辺の和と差，線分の内分点・外分点，と進む。そして，次のＤ三角形の角と二等分線の項で，「中学校で学んだ平行な直線と線分の長さの比」に関した結果を記述（[11]ｐ.91）した後，内角の二等分線と比に関する定理（以下で示す定理）を証明している（[11]ｐ.92）。一方，他社の「数学

A」の第３章平面図形　１節三角形と比において，中学校で学習した「三角形と比，中点連結定理」（[10]　p.80）を述べた後，例題の証明を示している。次に内分と外分を説明し，ついで三角形の内角と外角の二等分線というところで，一切の説明なしに直ぐに，内角の二等分線と比に関する定理（以下で示す定理）を証明している（[10]　p.83)。すなわち

定理２　△ＡＢＣの∠Ａの二等分線と対辺ＢＣとの交点をＰとするならば，点ＰはＢＣをＡＢ：ＡＣに内分する。すなわちＢＰ：ＰＣ＝ＡＢ：ＡＣが成り立つ。

を示し，平行線を引き，三角形と比を用いた証明を与えている（[10]　p.83，[11]　p.92)。この定理の導入として，中学校で学習した「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を二等分する」という定理を用いることは，「中学校での学習内容を基にする」ということからも適切なことだと考える。しかしながら，二社とも導入として直接的に用いていない。
実際，△ＡＢＣでＡＢ＝ＡＣとし，頂角∠Ａの二等分線をひき，底辺ＢＣとの交点をＰとする。定理１よりＡＢ：ＡＣ＝ＢＰ：ＣＰが成り立っていたことを確認する。そして，一般の（二等辺とは限らない）三角形の場合に，比例（関係）ＡＢ：ＡＣ＝ＢＰ：ＣＰが成り立つのかどうか考えよう，と話を進めることができる。比例（関係）が成り立つか否かを判断するためには，具体的な三角形を実際に描いて調べる作業も必要とするだろう。教育の場面としては，高校生のみならず中学生や大学生に対しても実施できる作業であろう。著者の一人は，実際に以下のような作業をした。

適当な角∠ＸＡＹをノートに描く。このとき

(1)　半直線ＡＸ上にＡからの距離が12cmの点Ｂをとり，半直線ＡＹ上にＡからの距離が６cmの点Ｃをとり，この二点を結び三角形△ＡＢＣを作る。続いて∠Ａの二等分線をコンパスを用いて描き，線分ＢＣとの交点をＰとする。そして，線分ＢＰとＣＰの長さを測ると，線分ＢＰの長さは5.1cm，線分ＣＰの長さは2.7cmと測定された。12：６＝２：１であるが5.1：2.7≠２：１，よって12：６≠5.1：2.7である。すなわち，市販の物差しでの測定によると，ＡＢ：ＡＣ≠ＢＰ：ＣＰである。

(2)　半直線ＡＸ上にＡからの距離が12cmの点Ｂをとり，半直線ＡＹ上にＡからの距離が10cmの点Ｃをとり，この二点を結び三角形△ＡＢＣを作る。続いて∠Ａの二等分線をコンパスを用いて描き，線分ＢＣとの交点をＰとする。そして，線分ＢＰとＣＰの長さを測ると，線分ＢＰの長さは3.6cm，線分ＣＰの長さは3.1cmと測定された。12：10＝６：５であるが3.6：3.1≠６：５，よって12：10≠3.6：3.1である。すなわち，市販の物差しでの測定によると，ＡＢ：ＡＣ≠ＢＰ：ＣＰであるが，誤差を考慮するならば，3.6：3.1は６：５と推測できる。

(3)　半直線ＡＸ上にＡからの距離が９cmの点Ｂをとり，半直線ＡＹ上にＡからの距離が６cmの点Ｃをとり，この二点を結び三角形△ＡＢＣを作る。続いて∠Ａの二等分線をコンパスを用いて描き，線分ＢＣとの交点をＰとする。そして，線分ＢＰとＣＰの長さを測ると，線分ＢＰの長

さは3.1㎝，線分ＣＰの長さは2.15㎝と測定された。９：６＝３：２であるが3.1：2.15≠３：２，よって９：６≠3.1：2.15である。すなわち，市販の物差しでの測定によると，ＡＢ：ＡＣ≠ＢＰ：ＣＰであるが，誤差を考慮するならば3.1：2.15は３：２と推測できる。

以下，このような作業を行うことによって，描くことや測定すること等に誤差があることを考慮するとして，一般の三角形の場合に，比例（関係）ＡＢ：ＡＣ＝ＢＰ：ＣＰが成り立つと推測することができないか，と生徒に問いかけることができる。これは高等学校数学科の目標「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極杓に活用する態度を育てる。」（［３］ｐ.22）を具体化する一例である。二等辺三角形についての比例（関係）からの推測をうけて，先の定理（**定理２**）の主張が成立するであろうと推論するのであると生徒に説明する。そして，推論が正しいことを示すために**定理２**を証明するのである，と話を進めることができるのである。従って，突然に定理が出現したのではなく，小学校，中学校と学習してきた流れの中にある定理であることを生徒に伝えることができる。そして，**定理２**から三角形の外角の二等分線の場合へと発想を進めることができる。すなわち，

定理３　△ＡＢＣの項点Ａにおける外角の二等分線と対辺ＢＣの延長との交点をＱとするならば，点ＱはＢＣをＡＢ：ＡＣに外分する。すなわちＢＱ：ＱＣ＝ＡＢ：ＡＣが成り立つ。

という定理（［10］ｐ.84，［11］ｐ.92）が成り立つことを示すことができる。ただし，二社ともに証明は問としている。

次に，前述の作業と三角形の面積は「（底辺の長さ）×（高さ）÷２」より，二等辺三角形についての比例（関係）から，一般の（二等辺とは限らない）三角形の場合に，比例（関係）ＡＢ：ＡＣ＝△ＡＢＤ：△ＡＣＤやＢＤ：ＣＤ＝△ＡＢＤ：△ＡＣＤが成り立つと推測できる。そして，容易に次の**定理４**が成立することが証明できる。

定理４　△ＡＢＣの∠Ａの二等分線と対辺ＢＣとの交点をＤとするならば，ＢＤ：ＤＣ＝△ＡＢＤ：△ＡＣＤが成り立つ。

旧高等学校学習指導要領（平成元年３月改正）の下での二社の「数学Ａ」でのこの定理の記述を調べる。すると，平面幾何　面積比の項で，小学校で学んだことや三角形の面積の公式に言及した後，三角形の面積について次のことが成り立つと記述している。すなわち，「底辺が等しい三角形の面積の比は，高さの比に等しい」，「高さが等しい三角形の面積の比は，底辺の比に等しい」（［12］ｐ.115），「高さが一定ならば，面積はその底辺の長さに比例し，底辺が一定ならば，面積はその高さに比例する」（［13］ｐ.127）。しかしながら，現高等学校学習指導要領の下での「数学Ａ」では取り扱われていない。

小学校第５学年においては，三角形の面積の項で底辺ＢＣが共通で頂点Ａが底辺に平行な直線上のどこにあっても三角形ＡＢＣの面積は等しいことを説明しましょう，と記述している（[６] p.11，[７] p.７)。このことを中学校第２学年においては，「平行線と面積」の項で「底辺が同じで高さが等しいから面積が等しい」と記述している（[８] p.136－p.138，[９] p.128－p.132)。しかしながら，**定理４**については，先に指摘したように，中学校の教科書でそっとふれられている程度である（[８] p.136問１)。先程，現「数学Ａ」では取り扱われていないことを指摘したが，「数学Ⅰ」の「図形と計量」の項では，三角比を用いた三角形の面積の公式の応用として取り扱われている。すなわち，ある社の「数学Ⅰ」では次のように記述している。△ＡＢＣの∠Ａの二等分線と対辺ＢＣとの交点をＤとするとき，三角比を用いた三角形の面積の公式を適用して△ＡＢＤ：△ＡＣＤ＝ＡＢ：ＡＣを導き，次に公式「(底辺の長さ）×（高さ）÷２」を適用して△ＡＢＤ：△ＡＣＤ＝ＢＤ：ＤＣを導いている。そして，これら二つの式からＡＢ：ＡＣ＝ＢＤ：ＤＣが得られる（[14] p.130－p.131)。他社の「数学Ⅰ」には直接的な記述はないが，△ＡＢＣの∠Ａの二等分線と対辺ＢＣとの交点をＤとするとき，△ＡＢＤと△ＡＣＤの面積を用いて，ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣが成り立つことを証明せよ，との問題が示されている（[15] p.148)。勿論，小学校，中学校で学んできたことがらとの関連についてはふれられていない。「相似」に関わる事項以外で三角形の面積比を取り扱うことがほとんどないことは，比例という視点から思うとき，残念なことである。三角形の面積比は一社の「数学Ａ」の「チェバの定理」の証明（[10] p.88）で用いられているが，「チェバの定理」の指導は高等学校学習指導要領解説（[３]）では特に明示されていない。

６．おわりに

二等辺三角形に内在する比例（関係）は，小学校では「確認」され，中学校では「証明」される。二等辺三角形に内在するある比例（関係）は一般の三角形においても成り立つことが，中学生においても推測できる。勿論，高校生においても推測できるものである。高等学校の平面図形を扱う「数学Ａ」及び図形と計量を扱う「数学Ⅰ」において，小中学校で「確認」，「証明」された，二等辺三角形に内在するある比例（関係）を導入として用いることを意識し，実行する必要を強く主張したい。小学校及び中学校で学習した事柄を高等学校において導入として用いることが可能な教材は，二等辺三角形に限らず他にもある。小学校，中学校で学習した事柄を高等学校において確認すること，すなわち，以前に学習したことを後で機会あるごとに繰り返して概念や事実の定着をはかることは数学の学習において重要なことである。これは，高等学校学習指導要領解説で「中学校での学習内容を基にする」（[３] p.80）と述べていることにも合致する。

以上，二等辺三角形に内在する比例（関係）を例として，数学の中にもいろいろな事柄が鎖のように連なって小学校から中学校そして高等学校へという流れを提示することを試みたのである。今後の課題としては，実際の授業での提示と発問等の試みの工夫という点である。なお，本論文の概要は［16］として発表済みである。

注

1）［５］ p.40の記述について次のことを指摘する。二つ並んだ二等辺三角形の一方は次のページとの開きの部分に近く印刷されているので，分度器の中心を一番右側の頂点に合わせるのが難しいと感じた。図のレイアウトに考慮が必要であろう。

2）実際には，ＡＢ＝ＡＣ，ＢＤ＝ＣＤ，△ＡＢＤ＝△ＡＣＤ，∠ＢＡＤ＝∠ＣＡＤ等と記述される。

引用文献

［１］小学校学習指導要領解説　算数編，文部省，平成11年５月
［２］中学校学習指導要領（平成10年12月）解説－数学編－，文部省，平成11年９月
［３］高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編，文部省，平成11年12月
［４］新しい算数４上，東京書籍，平成13年１月20日検定済，平成14年２月発行
［５］算数４年下，啓林館，平成13年１月20日検定済，平成14年５月発行
［６］新しい算数５下，東京書籍，平成13年１月20日検定済，平成14年７月発行
［７］算数５年下，啓林館，平成13年１月20日検定済，平成14年５月発行
［８］新しい数学２，東京書籍，平成13年３月10日検定済，平成14年２月発行
［９］数学２年，啓林館，平成13年３月10日検定済，平成14年２月発行
［10］数学Ａ，東京書籍，平成14年３月10日検定済，平成15年２月発行
［11］数学Ａ，数研出版，平成14年３月10日検定済，平成15年１月発行
［12］数学Ａ，東京書薄，平成５年１月31日検定済，平成８年２月発行
［13］数学Ａ，数研出版，平成５年１月31日検定済，平成８年１月発行
［14］数学Ⅰ，東京書籍，平成14年２月10日検定済，平成15年２月発行
［15］数学Ⅰ，数研出版，平成14年２月10日検定済，平成15年１月発行
［16］萬伸介，田端輝彦，森岡正臣，吾妻一興，瓜生等，山田春樹；二等辺三角形が教えることがら－内在する比例に注目して－，日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会論文集，平成15年10月，509頁－510頁