イプシロン　2003. Vol. 45, 55-67

方程式学習の素地指導としての特設単元「２つの天秤と２種類の箱の重さ」の構成と実践

愛知教育大学　山田篤史

１．はじめに

筆者は最近，日本数学教育学会第85回全国算数・数学教育研究（愛知）大会の特別企画（公開授業）の一環として，愛知教育大学附属名古屋小学校の６年生に対して１時限分の授業を行った。幸いなことに，指導内容に関しては自由裁量であったため，筆者は本稿の【資料１】にあるような指導案を作成し，授業に望んだ。しかし，時間的な制約から，この特別企画（公開授業）には授業後の検討会がなかったために，教材内容や授業構成についての詳細な説明，さらには授業後の反省等をする機会を持つことが出来なかった。

本稿は，そういった授業後の検討会で行われる作業の一部をこの紙面で実現するために，この公開授業のための指導案作成に至るまでの筆者のアイデアの変遷，さらには実際の授業を行った上での反省と指導案の改善に向けての提案を，かなり独白的に記述することが目的である。なお，実際の授業を観察しておられない方にとって，授業後の反省の部分である第４節は読みにくいものになっている点はご容赦頂きたい。

２．教材構成に至るまでの問題意識

(1) 連立方程式の一般的な導入についての問題

現在，連立二元一次方程式は中学校２年生で導入されるが，そこでの学習は「連立方程式の解法」，すなわち「加減法」と「代入法」の習得が中心を占めることになる。しかし，この２つの方法の説明については，「一方の文字を消去するためにはどうしたらよいか」というかなり形式的側面からの要求のもとになされるのが一般的であろう。それは，この部分の多くの教科書の記述が，中学校１年生の「等式の性質を利用した方程式の解法」部分の教科書の記述とは対照的であることからも伺える。前者が先に述べたように，かなり形式的な意味付けの記述になっているのが一般的であるのに対し，後者では，天秤モデルを採用し，方程式の操作を具体的な意味付けのもとに説明しているのが一般的なのである。もちろん，連立方程式部分でそのような記述が採用される理由は容易に想像できる。例えば，天秤モデルでは，未知数が負の数である場合を取り扱えない上に，何より「加減法」の説明には都合が悪いことが決定的な理由であろう。

このように，教科書での連立方程式の解法に対する説明が形式的にならざるを得ない理由は理解できるにしても，(連立二元や一元の)一次方程式の解法の理解に天秤モデルが貢献できる側面は多くある。例えば，教科書の記述にあるように，「等式の性質」が天秤でのつり合いを保つ操作

に対応する形で理解できること，さらには「代入」の操作も「天秤の皿の入れ替え」のような天秤の操作の範疇で理解できること等がそれである。また，個人的な憶測ではあるが生徒たちの連立方程式の解法の好みが加減法に偏りがちである現状を考えると，天秤モデルによる「代入法」の説明は，そのカウンターバランスになりうるだろう。さらに，同値の概念が不十分なために連立方程式の解法におけるつまづきが生起しうるという指摘がなされることがあるが(臼井,2002)，天秤のつり合いは「等号」の同値性を意識させる上で有用なメタファーとしてよく知られる所であるし，「等号の左は式で右は答え」といった入出力モデル(e.g.,Fischbein,1989)に対する牽制をする意味でも，天秤モデルによる(連立二元や一元の)一次方程式の解法の説明・理解は十分な指導的価値を持つものと思われるのである。

このように，現在の連立方程式の指導がかなり形式的な技能獲得の側面に偏りがちである点については，以前より問題を感じていた次第であるが，こういった傾向は派生的な問題も生みだす。例えば，代入法や加減法の「手順・方法の理解」を容易に導くためか，教科書の連立方程式導入部の問題の多くは，方程式の一方が$x+y=8$のようなタイプになっている。そのようなx, yの係数が共に１のタイプがある場合，その連立二元一次方程式は，実際には容易に一元一次方程式で立式できることになり，連立方程式の必要性が実感できないのである。

(2) 算数から代数（数学）への移行の問題

日本の小中学校において，数・式・計算（所謂「代数領域」）における算数と数学との接続の問題がどれほど意識されているかについては不明である。ただし，研究レベルでのそれは，「初期の代数学習」に関わる問題として(e.g., Kieran,1989)，また，方程式に焦点化しても「算術から代数への移行」(e.g., Filloy & Rojano, 1989)や「算術と代数との間の認知的ギャップ」(e.g., Linchevski & Herscovics, 1996)の問題として，常に意識されてきた問題である。

日本においても，先の学習指導要領までは小学校５年生で「文字を含んだ式」の学習をしていたため，数年前までは代数のための素地指導は算数に位置づけられていた，と言えるのかもしれない。しかし，現行の学習指導要領では小学校で「文字」を扱わなくなったため，その意味では，代数の明示的な素地指導は極端に減ったと言ってよいことになる。確かに，先の学習指導要領で扱っていた文字を含んだ式に関する学習は，その方程式の解決が逆思考（手順の逆）を利用した算術的解法の範囲でなされるため，代数の素地指導と言えるかどうかについては議論の余地はある。しかし，いずれにしても中学校数学への接続が意識される指導内容が減ったことには変わりなく，この点で，現行の学習指導要領下では，小学校における代数領域の素地指導に関して多くを期待することはできないように思われるのである。

この種のカリキュラムの接続の問題は，中学校と高等学校の間では「中高一貫」，高等学校と大学との間では「高大接続」という形で議論されているし，一部ではそれらを具体化した教科書の類いも登場している。しかし，小学校と中学校との間の接続の問題は，学習指導要領改訂時の既存の学習内容のやりとりの問題に矮小化されて議論され，尚且つ，常にその範囲を出ていないように思われるのである。

3．教材化のきっかけから指導案作成に至るまで

(1) 教材化のきっかけ

前節(1)(2)のような意義や問題意識をかなり以前から感じておりながらも，天秤モデルで提示された連立方程式の解決を方程式の素地指導のための教材として小学校高学年に導入することの可能性について具体的に考えるようになったのは，筆者がある実験的な共同研究に参加したことがきっかけであった。

筆者は，平成11年度から13年度まで科学研究費の補助を得て実施された「潜在的な数学的能力の測定用具の開発的研究」(中原,2002)に，研究分担者として参加した。この研究は，ドイツKassel大学Blum教授とイギリスExeter大学Burghes教授を中心とする数学的能力の調査研究プロジェクト(KassExProject)の一部として実施された「数学的能力の発達・変容に関する国際比較研究」(中原,1998)の成果を踏まえ，国内の小中学生用の「潜在的な数学的能力」を測定するための測定用具を，KassExProjectとは独立に開発することを目的としてなされた研究である。ただし，独立の開発研究とは言いつつも，このKassExProjectの目的の１つが，「中学生の数学的潜在力と各領域における達成学力とを調査分析すること」にあったため，当然ながら「数学的潜在力」を測るための測定用具も用意されており，その測定用具が我々の研究開発の重要なレファレンスとなったのである。そして，そのKassExProjectの測定用具の１つとして図１のような問題があったため，我々はそれを参考にして図２のような問題を作成し，中学校１・２年生を被験者として何回かの調査を行った。

下の箱は，どれも同じ重さです。はかりは，
つり合っています。１箱の重さはいくらですか。

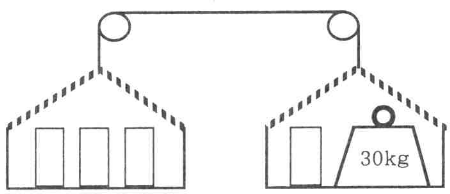


図１．KassEx Projectの日本版で使われた問題(中原,1998,p.80)

下の白い箱はすべて同じ重さで，黒い箱もすべて同じ重さです。図aと図bは
２つともつりあっています。白い箱と黒い箱の重さはそれぞれ何kgでしょうか。

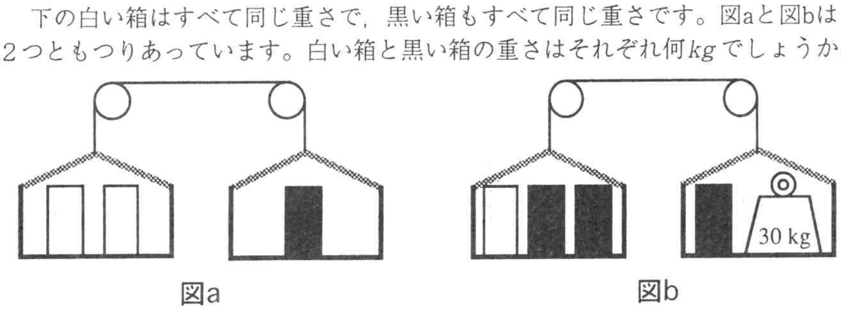


図２．「潜在的な数学的能力の測定用具の開発的研究」で作成された問題(中原,2002,p.123)

それらの結果についてここで詳述することは避けるが，４回行った調査のいずれにおいても平均して60～70%台の正答率が得られており，この問題（図２の問題）は，中学校１・２年生にとってはそれほど難しい問題ではない，という感触は得られた。もちろん，特定の中学校の１年生だけというように，被験者グループを限定すれば50%台の正答率のグループはありはしたものの，調査を重ねても平均的なデータでは「中学校１年生でも通過率が６，７割」という結果を示すことが多かったのである。

この実験結果は，筆者が教材化を考えるきっかけになったと言ってよいだろう。もちろん，図２の問題に対する小学生の正答率はどの程度あるのかという素朴な疑問はあったものの，上記の結果は小学校高学年であってもそれなりの正答率が得られるのではないか，という感覚を支えてくれたからである。確かに，上述の実験の被験者は中学校１，２年生であるし，中学校１年生の方程式の単元では「等式の性質」が方程式の天秤モデルで説明されるという重要な差異はある。しかし，授業という文脈で，基本的な方程式から導入し，具体的・操作的なイメージを基に解決を図る展開の中でそれが提示されれば，図２の問題は小学校高学年でも十分解決可能な問題と思われたのである。また，何より，中学校１年生の「等式の性質」に関わる学習事項が，天秤モデルの導入によりそのまま暗黙的な学習内容となりうるという点では，重要な意義をもつことになる。いずれにせよ，一度具体的な教材として定式化し，授業で取り扱ってみれば，前述のようないくつかの疑問に関する何らかの感触なり実感なりが得られるものであり，後は機会を待つだけであったのである。

さて，その機会はその後すぐに訪れることになった。というのも，第１節で述べたように，日本数学教育学会第85回全国算数・数学教育研究（愛知）大会の特別企画（公開授業）の１コマが与えられ，小学校６年生に対して１時限分の授業を行うことになったからである。授業自身は私が飛び込みで実施することになっていたため，授業の提案の核心が「指導技術」ということにはなり得ない（そもそも，小学生に対して授業を行うのは教育実習以来であるし，日頃から小中学生に対して授業を行っている訳ではないので，小学生が分かる単語だけを使って話せるかというレベルから怪しいのが実際である）。とすれば，必然的に「教材開発」を志向した授業提案をするしかなくなってしまう。しかし，既存のよく知られた教材を用いて授業を行うよりは，野心的に新しい教材を提案することの方が大会や特別企画の趣旨にも合致していると思われたし，偶々担当学年が小学校６年生であったため，前述のように，天秤モデルによる連立方程式解決（の素地指導）の教材化の可能性を探る機会になりうるとも思われたため，これを好機と【資料１】のような指導案を作成し，授業に臨んだのである。

(2) 指導案作成

ここまでの記述から分かるように，公開授業をすることが正式決定してから授業で扱う題材の意思決定に至るまでは非常に早かった。しかし，具体的な指導案作成に関しては難航した。というのも，授業展開の選択で，あるジレンマに陥ったからである。そのジレンマとは，授業展開を，素直な問題解決的なアプローチにするか，教材の全体構造を系列的に理解できるような教科書的なアプローチにするかという選択の問題である。

授業展開を素直な問題解決的なアプローチにするのであれば，導入問題は，【資料１】の指導案の問題４か問題５から入り，児童の解法の中から等式の性質に対応する天秤・重りの操作を引き出してまとめていくような授業展開になるだろう。これは，当該の授業目標を素直に具体化するものであるし，問題４からの導入であれば，一応，算術から代数への移行を踏まえたものにもなる。しかし一方では，問題４でさえも難しく感じる児童が多数出てくるのではないかという問題点や，何よりこれら数問の解決において，等式の性質をある程度網羅できるような天秤・重りの操作の体系を児童から引き出し得るかという問題を抱えることになる（問題数がある程度こなせるのであれば，児童に提示する問題を工夫すればよいので後者は問題なくなるであろう）。

さて一方では，確かに当該の授業の目標は「天秤モデルで示された連立二元一次方程式の解決」であった。しかし，この目標は，実際には，より高次の「等式の性質を利用した方程式の解決に対する素地指導」という目標を，方程式に対するメタファーに天秤を利用することでより具体的にしたものだという位置付けをも持っている。つまり，その高次の目標に照らして考えてみれば，ある特定の数問題を解ければよいというものではなく，その授業で出てきた天秤や重りの操作により一群の連立二元一次方程式が解けるような状態にしておく必要があると考えられるのである（少なくとも，指導案にはそれらが示唆されている必要はあろう）。そのためには，先にも述べたように，授業の一連の活動の中で，重要な等式の性質がある程度網羅される必要があろうし，教材の全体構造を示すためには「算術から代数への移行」を意識した問題の系列化を踏まえておく必要性もある。とすると，これらを実現する最も素直な方法は，教師側でそのような操作の体系が出揃い，算術から代数への移行を踏まえられるような問題群をあらかじめ系列化しておくことになる。これは，教材の全体構造を系列的に理解させるようなアプローチであり，言わば「教科書的アプローチ」とも言えるものであろう。

この教科書的なアプローチは，一方では，筆者が意図した教材の全体構造が見えやすく，等式の性質を網羅させやすいなどの利点をもつものの，他方では，問題解決的な授業の雰囲気を壊す嫌いがあるし，主要問題である上記図２のタイプの問題に辿り着くまでに時間がかかってしまうという問題を抱えてしまうことにもなる。結局，この２つのアプローチの選択は授業を行うクラスの実態に依存するため，必然的に情報不足である筆者は選択のジレンマに陥ってしまったのであろう。ただし，最終的にはどちらかに決定しなければならないため，教材の全体構造を示すという点を考慮して，【資料１】に見られるように教科書的なアプローチで指導案を作成した次第である。

４．授業の独断的評価と改善への提案

授業を単純に「成功／失敗」の２つで切り分けることには反対だが，私自身の授業全体がいずれであったかと問われれば，「失敗であった」と答えざるを得ないだろう。教材そのものの質や可能性については優れた点があるという確信は揺るいでいないが，「あの授業」については反省すべき点がいくつかあり，それを受けて改善点や注意点などをまとめておくことは，筆者の大きな責任だと感じている。

(1) アプローチ選択の誤り

筆者が敢えて，授業を「失敗」だと判断したのは，あのクラスの児童にとって，授業の前半3/4辺りまではかなり退屈であったということが大きい。その要因は，大きく見れば「教科書的なアプローチ」を選択したことが誤りであったとまとめることが出来るが，実際の授業に照らしてより細かく見てみれば２つのポイントを指摘できるだろう。

まず，授業の進め方としては，【資料２】に見られるようなワークシートを用意し，問題と板書事項を児童たちが書き込んでいくようなスタイルを採った。これにより，天秤や重りの操作の体系が記録として残り，しかもそれらが一目で把握できるようになったことは事実である。実際，問題５の説明の際に，それらの板書を参照しながら説明する児童もいた。しかし，授業のかなりの部分をこれらの筆記作業に費やしてしまったため，途中からは問題や板書事項を書き写すのを面倒に思う児童が出てきてしまったのも事実である。授業自体も問題６を提示するところで時間が来てしまい，その時点では「もっとやりたい」と発言する児童もいたが，結局，授業の多くの部分を彼らにとっては退屈な作業を強いる形になってしまったのは非常に反省すべきことだと感じている。このポイントは，実は，失敗の２つ目のポイントに繋がっている。

２つ目のポイントは，彼らの多くにとっては「問題５ですら簡単だった」ことであり，児童に対する筆者の見積もりの甘さである。当該のクラスに限らずとも多くの児童にとって前半の問題は自明のことであろう。それに対し，各問題の解決の鍵となる天秤・重りの操作を敢えて書き留めさせたのは，問題５の解決に際して使える操作を予め整理しておきふり返らせるためであった。問題５の解決に困難を感じる児童にとってこれは重要なことであろうが，問題５でも軽々と解決できてしまう児童にとっては，前半部分の苦労が後半部分で報われる作業にならないのである。前半部分で時間を使うよりは，むしろ問題５レベルの問題に数当たる中で，頭を使うことに時間を割き，等式の性質に対応する操作を漸次抽出していった方が，授業としてのドライブ感も出ただろう。例えば，問題５の１番目の天秤だけを提示し，「この２つの箱の重さは分かりますか？」と発問するやいなや，「分からないけれど，白が黒の２倍の重さだということは分かる」という趣旨の発言が出てきたほどであるから，「操作の体系は網羅できるだろうか」といった不安は完全な杞憂であったことになろう。

いずれにしても，筆者が「教科書的なアプローチ」を採ったことは，今回の授業の失敗の主要因であったように思われる。導入問題として，いきなり問題５から入ってもよかったであろうし，問題３（これは問題５の２番目の天秤と同じ算術的方程式の構造である）あるいは問題４から入ってもよかったであろう。また，筆者が授業の中でアプローチを変えられなかったことも指摘しておく必要はあろう。問題は，その場でいくらでも用意できるものでもあるし，むしろ教師が黒板で問題を作ることで，児童の意識は「問題はむやみに作れるものでもなさそうだ」とか「自分でも問題を作ってみよう」だとかいった意識が生まれるかもしれない。方程式の天秤モデルというシチュエーションからの問題作りはかなり挑戦的な課題であるが，指導案の「まとめ」の段階にも記しておいたように，児童に取り組ませてみたい課題なのである。

(2) 課題の明確化への配慮

授業終了後に，ある授業観察者から「子どもが課題を捉えきれていなかった」という指摘があった。詳細に議論する余裕と時間がなかったため真意を捉えきれていないかもしれないが，通常の授業では，授業の最初に本時の課題が黒板に板書され，課題の全体像を確認する所から始まるものであり，子ども自体もそのような学習スタイルに慣れているのだが，筆者の授業ではその種の確認は口頭で述べられただけであったし，次々に問題が提出されていくばかりで，最後までパズルをしただけと捉えている児童もいたのではなかったか，という指摘であったと思われる。

一応，指摘の一部には反論を試みてみよう。まず，教師から提示される一連の問題群が方程式の特殊なモデルになっていることを児童が知っている訳ではないため，児童にとっての本教材がパズルの類いにしか感じられなかったとしても，本質的な問題はそこにあるわけではない。実際，天秤のつり合いを保つための重りの操作がイメージ化される機会を提供できているのであれば，高次の目標（すなわち，等式の性質を利用した方程式の解法の素地指導）の観点から見て，目標は達成されていると考えてよいだろう（この点は，「しきつめ」が変換幾何に繋がっていくことを児童が知らなくてもよいことなどを想像すればよい）。さらに，問題１を提出した後に児童に配布した【資料２】のワークシートに見られるように，少なくともワークシートには教師側が提示している課題は明示されていたことも事実である。

こういった反論はあり得るものの，この授業観察者の筆者の授業に対する不満足感はむしろこれらの点にはなく，今にして思えば「児童が問題を提示されて抱く課題意識と，教師側が意図した課題意識とに，最後まで齟齬があったのではないか」，つまりは，「前半部分で筆者が押さえておきたかった事項を，児童は最後まで重要に思えていなかった」という点にあったのではなかろうかと思われるのである。現在のカリキュラムの多くの部分は，大局的に見たときに，重要で多くの場合それこそが面白い概念形成・技能獲得・問題解決を成し遂げるため，その道具立ての準備（そしてそれは多くの場合退屈である）に長い時間を費やすことが普通である。しかし，１時間の特設単元として企画された如何にも問題解決的な本授業において，この種の教科書的なアプローチを採ってみると，その違和感は大きなものとして映ったのであろう。

結局，この問題もアプローチの選択の問題に帰着してしまうことになった。そこで最後に，前小節からの議論を踏まえ，問題解決的なアプローチを志向し，「児童が問題場面に対峙して抱く課題意識を，教師側が意図した課題意識に引き寄せる工夫」を加味した導入部分の指導案について提案をしておくことにする。問題解決的なアプローチを採用する場合，導入問題をどのような問題にするかは非常に難しいのだが，基本的には，【資料１】の問題４のタイプのものから入り，これに問題５の１番目の天秤のタイプを加え，これを問題４のタイプの結果を利用して解決を図るという流れがよいのではないかと思われる。導入部分とそれに続く問題提示の部分の指導の流れは，改訂された指導案例として，下の図３に示しておいた。

この図３の指導の流れは，問題Ａにおいて代数的方程式タイプの解決を押さえつつも，問題Ｂにおいて「箱が２種類のときには，天秤がつり合っていても重さがわからない場合がある」ことを踏まえるため，児童の課題意識を即座に連立方程式タイプの解決に向けられるように思われる。

その直後は，問題Cのような，必然的に箱の置き換えが必要になるようなタイプの解決がよいと思われる。さらにその後に関しては，幾つかの等式の性質に対応する天秤・重りの操作を押さえるために解決の仕方に着目させて同種の問題を数問取り扱ってもよいし，それらは簡単に押さえるだけで連立三元一次方程式タイプの問題に移行してもよいかもしれない。

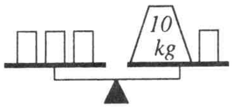
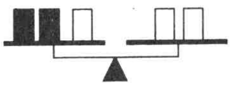
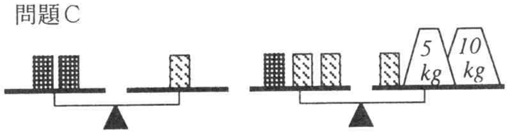
	主な学習活動と指導内容	指導上の留意点
導入	**1．問題場面の導入** **○天秤モデルの導入と共に，つり合い状態における箱の重さがどのようにしたら求められるかを課題として提示し，クラス全体で解決する。** 問題A 「どうしたら箱の重さがわかりますか？」  **2．連理方程式タイプの問題への移行** **○天秤モデルの導入と共に，つり合い状態における箱の重さがどのようにしたら求められるかを課題として提示し，クラス全体で解決する。** 問題B 「この２つの箱の重さはわかりますか？」  （具体的な重さが分からないことを確認し） 「白い箱は，問題Aの白い箱と同じだとしたら，２つの箱の重さは分かりますか？」 **3．課題の明確化** **○天秤がつり合っている時の箱の重さの求め方を考えることを確認する**	**・つり合っていたら２つの皿の重さは同じ** **・重さを箱の数で割ればよい** **・両方から同じ箱/重さは取り除いてよい** ことなど，等式の性質に対応する操作に関する発言は適宜採り上げ，フラッシュカードを黒板に掲示して確認しておく。 「白い箱が問題Aの箱と同じなら分かる」という趣旨の発言があった場合は採り上げる。 １つ１つの操作を確認しつつ，求め方を説明させる。
展開	**4．展開の問題の自力解決** 問題C 	

図３．問題解決的なアプローチにおける導入部分の指導案例

５．おわりに

本稿の目的は，筆者が最近行った教材開発を志向した公開授業を例にして，この公開授業のための指導案作成に至るまでの筆者のアイデアの変遷，さらには実際の授業を行った上での反省と指導案改善に向けての提案を，独白的に記述することであった。ただし，教材開発とは言っても，方程式の天秤モデルは中学校１年生の教科書では馴染みのものであるから，教材開発と言えるかどうかは本来は疑わしいのかもしれない。また，本稿で提示した「重さが未知のいくつかの箱と重さが既知の重りがつり合っている天秤」というシチュエーションが，数学的なシチュエーションとしてどれほどの豊かさを秘めているかについては，まだまだ検討の余地もある。もちろん，個人的には幾つかの問題意識もあり，それらを小学生用の教材として扱えば，それなりに面白く，価値もあるものだと思えたが故に，公開授業の題材として具体化したのである。ところが，前節で述べたように，筆者の授業（指導案）がある面では成功的ではなかったことも事実であった。本稿では，改善案を示しておいたが，これも一例でしかないため更なる検証が必要となろう。この教材に関する更なる検討は別の機会に譲ることにするが，本稿で扱った教材・指導案を基に授業を試みてみようと思われた方がおられたなら，是非とも一報を下されば幸いである。

引用・参考文献

臼井要介(2002).「中学校数学における連立方程式のつまずきに関する研究：加減法，代入法のconceptionに着目して」.『筑波数学教育研究』,第21号,105-106.

中原忠男(1998).『数学的能力の発達・変容に関する国際比較研究』.平成7年度～平成9年度科学研究費補助金(基盤研究(B)(1),課題番号:07308020)研究成果報告書.

中原忠男(2002).『潜在的な数学的能力の測定用具の開発的研究』.平成11年度～平成13年度科学研究費補助金(基盤研究(B)(1),課題番号:11558025)研究成果報告書.

Filloy,E. & Rojano,T.(1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics,* ***9*** (2), 19-25.

Fischbein,E.(1989). Tacit model and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics,* ***9*** (2), 9-14.

Kieran,C.(1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S.Wagner & C.Kieran(Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp.33-56). Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld,A.H.(1987). Confessions of an accidental theorist. *For the Learning of Mathematics,* ***7*** (1), 30-38.

【資料１】

第６学年　算数科　学習指導案

〈題材名〉　２つの天秤と２種類の箱の重さ

授業者　愛知教育大学　山田篤史
授業学級　愛知教育大学附属名古屋小学校　６年１組

１．本時の目標

天秤モデルで表された連立二元一次方程式を，方程式の操作に対応する箱の操作を駆使して解くことができる

２．指導計画

２つの天秤と２種類の箱の重さ(１時間完了)

３．本時の主張

(1) 方程式の天秤モデルと小学校における教材化の位置付け

方程式及びその解法は，算数から数学への移行に際する高いハードルになる。数学においてそれが極めて形式的に導入される場合には，特にそうなるだろう。この事態をできるだけ回避し，特に等式の性質を利用して方程式を解く際の有意味な状況を作りだすために，天秤モデルが利用されることがある。例えば，中学校の一次方程式の領域では，多くの教科書で天秤モデルが採用され，式の操作に対する操作的イメージを構築できるような配慮がなされている。ただし実際には，方程式の学習に際して天秤モデルを採用することについて，賛否両論があるのも確かである（例えば，Vlassis(2002)に簡単にまとめられている）。

しかし，等式の性質を使った方程式の解き方を理解するために天秤モデルを使うのではなく，天秤モデルにより提示された（構造的には方程式の）問題の操作的解決そのものを教材とし，それを方程式の学習の素地指導として位置付けることも可能であろう。そこではむしろ，「等式の性質の利用」や「代入」といった方程式の形式的操作に対する具体的かつ操作的イメージを式の形式的操作に対する素地として形成する機会を与えることが重要になる。そして，それは，小学校段階での導入が可能だとも考えられよう。

本時は，そういった可能性，すなわち，天秤モデルを採用し，方程式の解法に関わる学習の素地指導を目的とした特設単元の可能性を探るための試みである。ただし，児童への提示問題としては，連立二元一次方程式に相当する所まで発展させる点が特徴となる。

(2) 連立二元一次方程式の教材化

前述のように，中学１年の一次方程式の領域では，現在の多くの教科書で天秤モデルが登場する。しかし，中学２年の連立方程式の領域では天秤モデルは影を潜め，買い物場面などに基づいて立式した後は，式の形式的操作に基づく解法の説明が主流になっている。制約が厳しい教科書の記述としてはそのような形にならざるを得ないのだが，両学年の内容は，共通した操作の体系と問題解決場面を使用できる部分もあるため，素地指導の教材としては一つの単元として構想も可能である。具体的には，一般的な解き方の技能獲得に関わる目標を当面の目標から外し，方程式の天秤モデルを，前述のような方程式の素地指導の題材，さらには具体的な問題解決場面と見て扱うのであれば，ある程度高度な方程式の内容であろうとも小学生対象に教材化が可能だと思われるのである（もちろん，未知数が常に正の数になるような配慮はする）。例えば，飯田他(2002)によれば，天秤モデルで提示された

$(2x=y)\&(x+2y=y+30)$ という連立方程式型の問題に対し，中学１年生で0.79の正答率が得られている(N=135)。中学１年生という条件ではあるものの，何ら導入を施さずに解決させた場合でも，約８割の正答率が得られている点は，注目に値するだろう。

この結果を踏まえ，しかも簡単な一次方程式から導入を図るのであれば，小学６年生が対象であろうとも，連立二元一次方程式に相当するレベルまで学習活動を組織化することができるのではないかと思われる。むしろ課題は，その学習活動を具体化するための問題群をどのように構成するかである。

(3) 背景的目標の確認と教材構成の枠組み

本時の具体的目標は，天秤モデルで表された方程式を，方程式の操作に対応する箱の操作を使って解く，ということであった。しかし，本時の授業構成は，方程式学習の素地指導という位置付けを持っている。そのため，「等式の性質の利用」や「代入」といった式の操作に対応する操作的イメージを掴ませることには注意を払いながらも，実際に児童が取り組む問題の系列に関しては，算数から数学への移行を意識したものにする必要があろう（また，記号の使い方にも注意を払う必要があるため，児童の中にアイデアの萌芽が見られ，時間的な余裕があれば，天秤を略記する時に等号を導入し，等号の「つりあい的な意味」「対称律的な意味」の導入を図ることも目論んでいる）。

これらの目標を考慮し教材の系列を構成するが，その枠組みとしてはFilloy & Rojano(1989)の方程式に対する「算術的」と「非算術的」の区別を利用する。「算術的」方程式とは，等号の一方にしか未知数が存在せず，逐次的な逆演算を辿れば解に到達できるタイプのことをいう(例えば，$2x+7=13$)。一方，「非算術的」方程式とは，等号の両辺に未知数が存在し，未知数同士の代数的操作が必要なタイプである(例えば，$5x+4=3x+12$)。

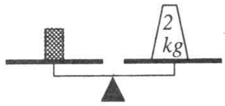
この２つの区別に，一元一次方程式と連立二元一次方程式の区別を考えれば，下のような図式ができ上がるだろう。時間的な余裕があれば，A→B→C→Dという授業進行を想定するが，本時では，時間的な制約からA→B→Dという系列で問題群を構成し，本時の目標である連立二元一次方程式の解決を目論むことにする。

	一元一次	連立二元一次
算術的	A	C
非算術的	B	D

４．本時の展開

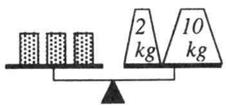
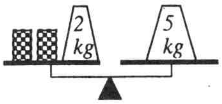
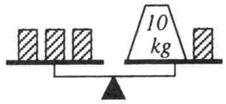
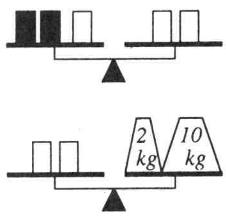
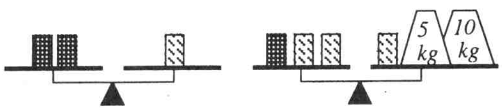
<table>
<tr><th></th><th>主な学習活動と指導内容</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>導
入

5分</td><td>１．問題場面の導入
○天秤モデルの導入と共に。つり合いの状態における重さの同値性を確認する

問題１
「箱の重さは分かりますか？」
「なぜ重さが分かりますか？」


２．課題の確認
○課題を明確化し，本日の学習課題として把握する
「天秤がつり合っているときの箱の重さを求めよう」</td><td>実際の天秤で問題を提示する。
「つり合っていたら２つの皿の重さは同じ」ことを確認し板書する。

「不明な箱の重さを求める」こと，特に「求め方」を強調する。</td></tr>
<tr><td>展
開</td><td>３．クラスでの問題解決
○各問題解決で使われる等式の性質に対応する操作をクラス全体で確認しつつ，問題解決を進める</td><td></td></tr>
</table>

	○提示される問題（一元一次方程式）は，算術的方程式から非算術的方程式へと移行する 問題２ 「どうしたら箱の重さがわかりますか？」  問題３  問題４ 	問題２以降は，模造紙に問題をかいておく。 「(同じ箱が揃っていたら)重さを箱の数で割ればよい」ことを確認し板書する。 「両方から同じ重さを取り除いてよい」こと 「両方に同じ箱がある時は，同じ数を取り去ればよい」ことを，それぞれ確認し板書する。
35分	４．連立二元一次方程式の導入とその解決 ○非算術的方程式を含む連立二元一次方程式の問題に関して，自力解決により，様々な解き方を考える 問題５ （１番目の天秤だけを提示し） 「この２つの箱の重さは分かりますか？」 （具体的な重さが分からないことを確認し）「２番目の天秤があれば，分かるでしょうか？」 	解き方を発表させる中で，天秤に記号をふること，さらに時間的余裕があれば等号を導入し，解き方の系列を記述する。 「同じ重さのものは置き換えてよい」ことを確認し板書する。
まとめ 5分	５．板書事項の確認と追加の問題 ○解き方の一部として定式化されている板書事項を確認し，それを使って別な問題を解いてみる 問題６ 	解けてしまった児童には，別解を考えさせ，問題づくりをさせる。

５．引用文献

飯田慎司他(2002).「潜在的な数学的能力の測定用具の開発的研究(1)」.全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 8, 187-199.

Filloy,E. & Rojano,T.(1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, ***9*** (2), 19-25.

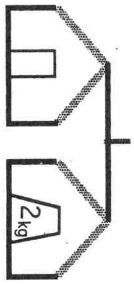
Vlassis,J.(2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, ***49*** (3), 341-359.

【資料２】

算数　8月6日(水)　名前

■天びんで箱の重さを求めよう

(1)



天びんがつりあっていたら、

(2)

点線の上側に問題をかいておこう

(3)

点線の上側に問題をかいておこう

(4)

点線の上側に問題をかいておこう

(注)問題５以降のワークシートについては問題２～４に準ずる形なので省略する。