イプシロン　2002. Vol. 44, 73-76

# $1/\sin^2\theta$ の展開とその応用

愛知教育大学 数学教育講座　　小 谷 健 司

## 1　$1/\sin^2\theta$ の展開公式の証明

最近出版された論文の中で，オーストリアの数学者 Hofbauer [1] は $\zeta(2)=\pi^2/6$ の非常に簡単な証明を与えている。この小論では，彼の手法を用いて $1/\sin^2\theta$ の展開公式の証明を与え，それを応用して，円周率 $\pi$ に関するさまざまな公式を導く。

**公式.** 実数 $\theta$ が $\pi$ の整数倍でないとき，次の等式が成り立つ：

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{(\theta-\pi)^2}+\frac{1}{(\theta+\pi)^2}+\frac{1}{(\theta-2\pi)^2}+\frac{1}{(\theta+2\pi)^2}+\frac{1}{(\theta-3\pi)^2}+\cdots. \tag{1}$$

**証明.** 式 (1) の両辺は周期 $\pi$ の周期関数であるので，変数の範囲が $0<\theta<\pi$ の仮定の下で証明しても一般性を失わないことに注意する。

関数 $f(\theta)=1/\sin^2\theta$ に対して，次の等式が得られる：

$$\begin{aligned} f(\theta)&=\frac{\cos^2(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)}{\left(2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\right)^2}=\frac{1}{2^2}\left\{\frac{1}{\sin^2(\theta/2)}+\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\right\}\\ &=\frac{1}{2^2}\left\{f\left(\frac{\theta}{2}\right)+f\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

上式を 2 回繰り返して使うと式 (3) が，$n$ 回使うと式 (4) が得られる：

$$f(\theta)=\frac{1}{2^4}\left\{f\left(\frac{\theta}{2^2}\right)+f\left(\frac{\theta+\pi}{2^2}\right)+f\left(\frac{\theta+2\pi}{2^2}\right)+f\left(\frac{\theta+3\pi}{2^2}\right)\right\} \tag{3}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left\{f\left(\frac{\theta+k\pi}{2^n}\right)+f\left(\frac{\theta+(2^n-k-1)\pi}{2^n}\right)\right\}. \tag{4}$$

関数 $f(\theta)$ は周期 $\pi$ の周期関数であるので，上式は次の形に変形できる：

$$f(\theta)=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left\{f\left(\frac{\theta+k\pi}{2^n}\right)+f\left(\frac{\theta-(k+1)\pi}{2^n}\right)\right\}. \tag{5}$$

実数 $0<x<\pi/2$ に対して，不等式 $\sin x<x<\tan x$ が成り立つ。これを変形して得られる不等式 $0<f(x)-1/x^2<1$ を式 (5) の右辺に適用すると，次の不等式が得られる：

$$0\ <\ f(\theta)-\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left\{\frac{1}{(\theta+k\pi)^2}+\frac{1}{(\theta-(k+1)\pi)^2}\right\}\ <\ \frac{1}{2^n}. \tag{6}$$

上式において $n\to\infty$ として，式 (1) が得られる。□

## 2 公式の応用

式 (1) の両辺に $\theta = \pi/4$ を代入し，$(\pi/4)^2$ をかけると，次の等式が得られる：

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{7}$$

式 (1) の無限級数の各項は正であるので，それは明らかに絶対収束している。絶対収束している関数項級数は項別微分可能である。式 (1) を項別微分したあと，両辺を $-2$ で割ると，次の等式が得られる：

$$\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = \frac{1}{\theta^3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(\theta - k\pi)^3} + \frac{1}{(\theta + k\pi)^3}\right\}. \tag{8}$$

上式の両辺に $\theta = \pi/4$ を代入し，$(\pi/4)^3$ をかけると，次の等式が得られる：

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}. \tag{9}$$

整数 $m > |\theta|/\pi$ を取ると，式 (8) のカッコ内の 2 項の和は，$m$ 番め以降がすべて同一の符号になり，それを 1 つの項と見なすと絶対収束していることがわかる。式 (8) を項別微分したあと，両辺を $-3$ で割ると，次の等式が得られる：

$$\frac{\sin^2\theta + 3\cos^2\theta}{3\sin^4\theta} = \frac{1}{\theta^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(\theta - k\pi)^4} + \frac{1}{(\theta + k\pi)^4}\right\}. \tag{10}$$

上式の両辺に $\theta = \pi/4$ を代入し，$(\pi/4)^4$ をかけると，次の等式が得られる：

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}. \tag{11}$$

一般的に，任意の整数 $n \geqq 2$ に対して，次の公式が成り立つ：

$$1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(-\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(-\frac{1}{11}\right)^n + \cdots = \frac{(-\pi)^n}{2^{2n}\cdot(n-1)!} f^{(n-2)}\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{12}$$

ただし，$f(\theta) := 1/\sin^2\theta$ である。証明は読者に委ねる。

## 3 変数が正の偶数のときのゼータ関数の値

**ゼータ関数**とは，次の式で定義される関数のことである：

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots. \tag{13}$$

定義より，次の等式は明らかである：

$$\zeta(s) - \frac{1}{2^s}\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots. \tag{14}$$

式 (7), (11) に上の公式を用いると，次の等式が得られる：

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{8}\div\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}\,,\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{96}\div\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{\pi^4}{90}\,. \tag{15}$$

一般的に，任意の整数 $n \geqq 2$ に対して，次の公式が成り立つ：

$$\zeta(2n)=\frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2^{2n}-1)\cdot(2n-1)!}f^{(2n-2)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\,. \tag{16}$$

証明は読者に委ねる。このように，変数が正の偶数 $2n$ のとき，ゼータ関数は $\pi^{2n}$ の有理数倍になることがわかるが，正の奇数のときどうなるのかはわかっていない。

## 4 微妙な計算

絶対収束している関数項級数は項別積分可能である。したがって，式 (1) は項別積分することができる。すなわち，

$$\int_\theta^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_\theta^{\pi/2}\left\{\frac{1}{(x+k\pi)^2}+\frac{1}{(x-(k+1)\pi)^2}\right\}dx\,. \tag{17}$$

上式を計算すると，次の等式が得られる：

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\theta+k\pi}+\frac{1}{\theta-(k+1)\pi}\right\} \tag{18}$$

$$=\frac{1}{\theta}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\theta-k\pi}+\frac{1}{\theta+k\pi}\right\}\,. \tag{19}$$

上の関数項級数は絶対収束していないので，不用意に順序交換や項別積分できないことに注意すべきである。式 (19) の両辺に $\theta=\pi/4$ を代入し，$\pi/4$ をかけると，次の等式（**Gregory の公式**）が得られる：

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}\,. \tag{20}$$

整数 $m>|\theta|/\pi$ を取ると，式 (19) のカッコ内の 2 項の和は，$m$ 番め以降がすべて同一の符号になり，それを 1 つの項と見なすと絶対収束していることがわかる。したがって，式 (19) は項別積分することができる。すなわち，

$$\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{1}{x}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\pi/2}^{\theta}\left\{\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{x+k\pi}\right\}dx\,. \tag{21}$$

上式を計算すると，次の等式が得られる：

$$\log\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\log\left|1-\left(\frac{\theta}{k\pi}\right)^2\right|+\log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)\right\}-\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{22}$$

変数 $x>0$ に対して不等式 $\log(1+x)<x$ が成り立つので，次の等式が得られる：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\,. \tag{23}$$

上式は，式 (22) の正の項の和が有限であることを表している。式 (22) の左辺は有限であるので，右辺の無限級数は絶対収束していることがわかる。絶対収束している無限級数は順序交換可能である。したがって，式 (22) は順序交換することができる。すなわち，

$$\log\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left|1-\left(\frac{\theta}{k\pi}\right)^2\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right) - \log\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{24}$$

上式において $\theta \to 0$ として，次の等式が得られる：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right) = \log\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{25}$$

上式の両辺の $e$ を底とする指数を取ると，次の等式（**Wallis の公式**）が得られる：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{(2n+1)}\right\} = \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

次に，式 (24) に式 (25) を代入し，式 (24) の両辺の $e$ を底とする指数を取ると，次の等式（$\sin\theta$ についての **Euler の無限積**）が得られる：

$$\sin\theta = \theta\left(1-\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{\theta}{3\pi}\right)^2\right)\cdots. \tag{27}$$

この等式に $\theta = \pi/2$ を代入すると，再び Wallis の公式が得られる。Euler の無限積は $1/\sin^2\theta$ の展開公式と兄弟姉妹，Wallis の公式は $\zeta(2) = \pi^2/6$ と親戚だったのである。

## 参考文献

[1] J. Hofbauer, A simple proof of $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots = \pi^2/6$ and related identities, Amer. Math. Monthly **109** (2002), 196–200.