イプシロン　2001. Vol. 43, 15-26

作図ツール Geometric Constructor 上で現れる様々な「関数」の分析

— 作図ツールと関数的な考えについて(1) —

愛知教育大学　**飯　島　康　之**

0．はじめに

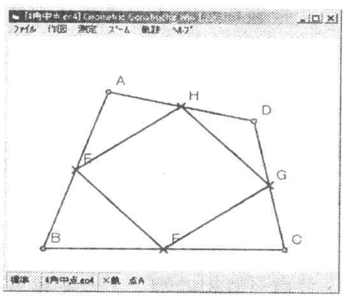
作図ツールは図形に対する関数的な考えを支援するための環境である。これは作図ツールを使う方々の共通認識の一つである。大まかな言い方をすれば，「きまればきまる」，「変われば変わる」という考え方を，より多くの場面で使えるようになる，あるいはそのような考え方が身につきやすくなるということだ。しかし，それが具体的にどういうことを指すのかについては，必ずしも共通認識が確立しているとはいいがたい。そこで，Geometric Constructor（以下ＧＣと略す）の場合を中心に，このことを明らかにしていきたい。

この作業は，いくつかの側面について考察する必要がある。本稿では，ＧＣにおける幾何的対象と作図データの扱い方の分析をまず行い，ＧＣを用いた数学的探究の中では，広い意味での３種類の関数が現れることを事例と共に述べ，分析する。

1．Geometric Constructor における幾何的対象と作図手続きの構造

1．1　Geometric Constructor の変形機能

ユーザーの目から見た場合，作図ツールＧＣの変形機能は次のようなことを可能にしている。つまり，変形可能な点（画面上では緑の○で示される点）を動かすと，それに応じて図形の他の部分が変化する。つまり，「きまればきまり，変われば変わる」。その現象のどこに注目するか，また何をしたいと思うかによって，様々な関数的な考えが関与すると言っていい。

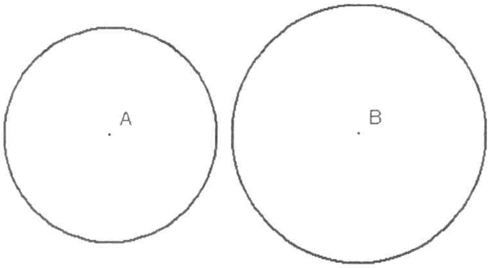


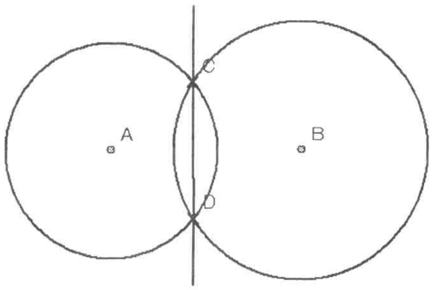
作られている図を動かすだけの立場でいえば，この程度の理解でもいいともいえるし，ユーザーとしての探究者がどのような行動をとるのかを臨床的に分析することが中心的な方法であるべきということかもしれない。しかし，それらの分析を行う前に重要なのは，作図ツールの設計の仕方によって，そのようなユーザーによる探究はかなりの部分を規定されるということだ。別の言い方をすれば，ユーザーの行為を想定し，ある部分を支援可能であるように，作図ツールそのものが設計され，実装されている。その分析なしには，妥当な解釈・分析は行えないと思う。そこで，本章では，まずＧＣでは何を幾何的対象として捉え，図

あるいは作図をどのように行っているのかを明らかにする。

1．2　Geometric Constructor における幾何的対象の種類

ＧＣにおいては，幾何的対象として，変数，点，直線，円の４種類を扱う。それぞれ属性を持っているが，特に直線に関しては，直線，線分，半直線を属性の一つとして扱っているので，これらは後から変更可能である。幾何的対象のデータはそれぞれの特徴を捉え，表現するためのデータを持っている。たとえば，点に関しては，ｘ，ｙ座標ももちろん不可欠だが，その他に名前，色，表示形式などもあるし，他の線や円の上に制限する可能性もあるので，その種類や対象を指定するための属性もある。また，特徴的なものの一つとして，「それは作図可能なのか」を示す変数もある。ＧＣで作図する図は，動かして調べるための図である。たとえば，２円の交点を考えるとき，通常は２つの交点がありうるが，位置関係によっては１点で接することもあるし，交わらないときもある。それら２点の交点を通る直線を引いている場合，図形を動かしたら不適切な直線になったり，エラーが生じるのでは困る。作図可能でないものに依存しているものは書けない。そのような状態を把握するための変数をもっているのである。





1．3　関数としての基本作図

たとえば，「線分ＡＢの垂直二等分線 ℓ」というものを考えてみよう。これは線分ＡＢに対して，直線を対応させる決め方であり，いわば $\ell = f(AB)$ という形で書ける対応あるいは関数といってよい。このように，いくつかの幾何的対象を元に，新たな幾何的対象を対応させる関数を，基本作図とＧＣでは考える。作図メニューの中で選択できるものが基本作図であり，たとえば，次のようなものがある。（ＧＣの作図メニューでは，それらが，点，直線など構成したい対象別に分類されている。）

３点→１点の例：外心，重心，内心，垂心，傍心(の一つ)，９点円の中心

２点→直線の例：２点を通る直線

1直線，1点→１直線の例：１点を通り，ある直線に平行な直線

２点→円：ある点を中心とし，ある点を通る円

線分→円：ある線分を直径とする円

１点→１点：複素数としての逆数

これらの基本作図として，どのようなものを含み，どのようなものを含まないかは，それぞれの作図ツールによって異なる。伝統的な意味での幾何での作図は，定規・コンパスによって作図

可能なもののみに限定されている。「角の3等分の不可能性」は，手続きを限定するから不可能なのであって，別の作図方法(紙を折る，器具を使うなど)を許容すれば可能になる。

たとえば，ＧＣでは角の3等分は「角のｎ等分」という基本作図を使えばできる。「ある点をある点を中心にしてｘ°回転」もできる。つまり，伝統的な意味での幾何での作図ではない。その理由の一つは，角の3等分を使うことによって調べたい対象，たとえばモーレーの定理があるからだ。そしてまた，「3点がきまれば，それらによってできる角の3等分線はきまる」し，「変われば変わる」からだ。つまり，関数的な見方から図形を分析できたならば，それは実現できる方がよいという考え方に基づいている。

１．４　基本作図を階層的に積み重ねたものとしての作図（マクロ）

たとえば，３角形の外心を例にとってみる。これは３点→１点という関数としてみることができる。しかし，たとえば定規・コンパスを使う場合には，一気にできるわけではない。定規・コンパスの基本作図を何回か積み重ねて行う必要がある。作図ツールの場合も同様であり，たとえば，ＧＣの場合，３点Ａ，Ｂ，Ｃに対して，次のような積み重ねで，外心Ｏを作ることができる。

２点を結び線分を作る：点Ａ，点Ｂ→線分ＡＢ
２点を結び線分を作る：点Ｂ，点Ｃ→線分ＢＣ
線分の垂直二等分線：線分ＡＢ→直線Ｌ１
線分の垂直二等分線：線分ＢＣ→直線Ｌ２
２直線の交点：Ｌ１，Ｌ２→点Ｏ

この５つの基本作図を階層的に積み重ねたものを，３点→｛２つの線分，２つの直線，１つの点｝という「新しい一つの基本作図」として考える場合，これを「マクロ」と呼ぶことが多い。新しい基本作図を「作る」ことをどう考えるかは，作図ツールあるいは一般のソフトを開発する上でも，重要なポイントである。３角形の外心の作図を定規・コンパスを使ってするときにも，我々は一つ一つの基本作図の手順通りに覚えていてそれを実行するわけではない。「外心は，３辺の垂直二等分線の交点が１点で交わる点だ」→「３直線が１点で交わるのだが，外心の作図をするだけなら２直線だけでいい」→「線分の垂直二等分点を作るには，まとまった手順があった。それを２回繰り返せばいい」というような思考をするだろう。ここでは，定規・コンパスの基本作図をいくつかまとめた「垂直二等分線の作図の仕方」が一つのマクロになっている。

ＧＣの場合も，当初（ＧＣ／ＤＯＳ）はマクロも実装していた。しかし，現在（ＧＣ／Ｗｉｎ，ＧＣ／Java）はその機能は削除し，必要な場合は「図形の追加」で代替するようにした。そして，その代わりに，学校数学の中で使うと思われる「まとまり」を可能な限り「基本作図」の中に盛り込むという選択肢を選んだ。「組み込み型マクロ」として動くもの（メニューで一つの操作をすると，いくつかの基本作図を実行するもの）もあれば，「基本作図」にしてしまっているものもある。

ソフト設計という意味では重要と思えるマクロ機能を外したのはなぜか。それは二つの理由に基づく。一つはたとえば垂直二等分線の場合，それは「きまればきまる」ものの代表例と考える

のか，「定規・コンパスを何回か組み合わせて使うべきもの」と考えるのとどちらを重視したいかを考えると，前者を強調したいからである。ある学習場面では，「垂直二等分線の交点として外心ができる」ことを理解したい。そのとき，できることなら「垂直二等分線はある手続きの組み合わせで...」という背景は念頭から外したい。実際の思考の中ではそれらは機械的に無意識にできる段階になっている。「そういえばそうだったね」と思える段階になっている。しかし，コンピュータの場合はマクロはマクロの項目の中に追加され，明示的にそうなっているものを使うことになる。それは避けた方がいいと思った。さらに，この外心は「３点→１点」という基本作図としても組み込まれている。それは，オイラー線（三角形の外心・重心・垂心はいつも一直線上にあり，その直線をオイラー線と呼ぶ）などを学習する場合には，「三角形の外心，重心，垂心」を作図したい。外心，重心，垂心のそれぞれを「思考の単位に合わせて作図する」という意味では，「三角形の外心」，「三角形の重心」..という流れで作図できる方が適切と考えた。

もう一つの理由は，ＧＣ／ＤＯＳで実装したマクロは，自分も含めほとんど使った人がいないからである。また，カブリのようなマクロを使えるソフトでも，ユーザーの一人としての自分はマクロを作ったことはないし，むしろマクロとして使うべきもの(三角形の外心など)を思いついたとき，それがメニューの中にないことの不便さを強く感じた。マクロを作れることは，「ソフトの機能を広げられる」という意味で重要なことである。しかし，マクロとして作らなければならない，マクロ集から選ばなければならないという行為は，「基本作図を組み合わせると新しい基本作図ができる」という側面を重視したい場合には重要な行為となるが，「きまればきまる／変われば変わる」という関数的側面を重視したい場合には，障害になる。もちろん，新しい問題を考えるユーザーが数多く，マクロの必要性が高い場合は，「それでも実装すべき重要な機能」の一つだが，ＧＣは学校の授業の中で使うことを主に想定していて，ソフトの機能の学習に使える時間的な制約を考えるとマクロ機能は割愛した。

このような背景で，マクロという機能そのものはない。しかし，ＧＣを使う場合にも，ある学習段階では，垂直二等分線の交点として外心ができるという見方をし，その後の学習段階ではそういう組み合わせでできる「三角形の外心」も一つの基本作図として使えるという見方をする。基本作図を組み合わせて新しい作図の思考単位ができるという意味での「マクロの考え方」が背景にあることは重要だ。

１．５　計算の舞台裏における「さまざまな関数の積み重ね」

上記では，作図ツールの「基本作図」と「マクロ」の問題を扱ったが，幾何での（紙上での）作図を考える場合，それを実際に実行するものが定規・コンパスというレベルになるので，文字通りそれが「基本作図」に相当するのだが，作図ツールの場合はさらに舞台裏がある。たとえば，「２点を結んで直線を引く」という場合，「そこに定規を当てて線を引く」ことを実行するために，２点の座標を通る方程式を計算する。「∠ＡＢＣの二等分線」を計算する場合は，3点を元に二つの単位方向ベクトルを作る。その内積は $\cos\theta$ になるから，$\cos^{-1}$（２つの単位方向ベクトルの内積）を計算することで角度を得る。その角度の半分の大きさで，点Ａを点Ｂを中心に点Ｃの

方向に回転して点Ａ’を作る。そして，半直線ＡＡ’を結ぶ。

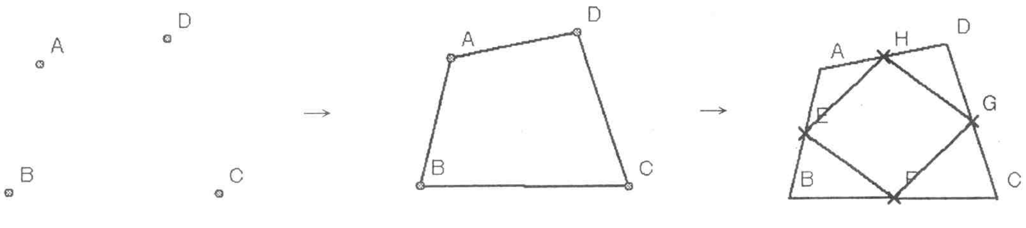
つまり，作図ツールの表面での「基本作図」は，作図ツールの実行ソースコードのレベルでは，上のような意味での思考単位・計算単位のことの組み合わせを実行している。さらに，その舞台裏では，そのような計算手続きの一つ一つをどうコンパイルするのか，また実際の実行では...というように，いくつものレベルがあって，それぞれが舞台裏を支えあっている。

もちろん，それらの舞台裏全体までを意識する必要はない。むしろ，舞台の上に上げるべきものと，舞台の下に隠すべきものとして何を選択するかが，作図ツールを含め，コンピュータで生成する環境の場合には重要なのである。

そして，ある意味で，作図ツールとは基本的には解析幾何が舞台裏にあり，具体的な場合について順次計算して結果を出してくれることを支えとして，舞台上の幾何的対象について「きまればきまる／変われば変わる」を調べたり，作図する環境なのである。

１．６　いくつかの点を出発点に基本作図を階層的に積み重ねたものとしての作図

実際の図形は一つの基本作図だけではできない。ＧＣの場合には，出発点として，「いくつかの点」が必要だ。それらの「いくつかの点」をまず出発点とし，その上に基本作図を階層的に積み重ねたものが，ＧＣにおける作図である。そして，その「いくつかの点」がいわば独立変数であり，その他の幾何的対象はすべて従属変数である。実際の図を動かすときも，この独立変数に相当する点が「緑の○」で表示され，「動かせる点」として表示される。他の対象は直接動かすことはできない。「動かせる点」をどう動かしたら，その対象が連動してどう動くかを調べるのが，ＧＣなのである。



１．７　Geometric Constructor における作図の形式的定義

以上のことを形式化すると，ＧＣにおける作図や図形の動的な扱いは次のように表現される。

定義１：幾何的対象とは，変数，点，直線，線分，半直線，円のいずれかを指す。

定義２：基本作図とは，n 個の幾何的対象を元に，ある幾何的対象を構成する手続きを指す。

すなわち，

$C:(O_1, O_2, \ldots, O_n) \to O$

定義３：作図とは，いくつかの点を元に，いくつかの基本図形の組み合わせによって，いくつかの幾何的対象を構成する方法をいう。すなわち，

作図 $C = (\{C_i\}, \{P_i\})$

ただし，C_i は，$\{P_i\}$ あるいは C_{i-1} までによって構成されたものを元にする。

定義4：図形とは，いくつかの点といくつかの作図およびそれによって構成される幾何的対象との組（$\{P_i\}$，$\{C_i\}$，$\{O_i\}$）をさす。なお，ここでのO_iはC_iによって構成される幾何的対象である。

定義5：図形の動的な扱いとは，図形（$\{P_i\}$，$\{C_i\}$，$\{O_i\}$）において，P_iの位置を変化させたときに，幾何的対象O_iに関する性質がどう変化するのか，あるいは変化しないのかを調べることをいう。

2．Geometric Constructor 上で現れる「関数」(1)：幾何的対象→幾何的対象

2．1　ＧＣ環境下での「きまればきまる」もの

関数の考えを広く「きまればきまる」「変われば変わる」ものととらえるとき，その対象は「数」に限定されるわけではない。ＧＣ環境下ではどのようなものがありうるのかを広く「関数」と呼ぶこととし，以下で順次分析していくことにする。記号を使う方が分かりやすいと思われるので，ϕ：Ａ→Ｂと表したときのＡ，Ｂという集合として，何がありうるのかという観点で考える。いわゆる関数は，実数などの数に対して数を対応させるものをさすことが多いが，その集合をGCの幾何的対象に広げた場合に現れるものをまず考察する。

2．2　ϕ：$R^2 \to R^2$（点Ｐ→点Ｑ）

作図ツールの最も基本的な対象は点である。ϕ：点→点を最初に考えよう。

たとえば，点Ａに対して点Ｂとの中点Ｍを考える。ある見方をすれば，これは「２点」の中点なので，２点の関数と考えることもできる。しかし，作図ツールでは１点を動かすことが多い。「点Ａを動かしたらどうなるか」という場面においては，点Ｂは「定点」と考える方が妥当である。

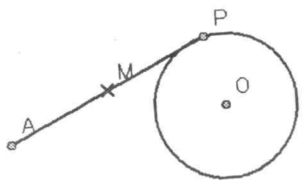
あるいは一般に，「この点を動かしたら，この図形の中のこの点はどうなる」という見方はすべて「ϕ：点→点」と言える。

ここでの点は，平面内の点である。２次元ユークリッド平面という意味で，「ϕ：$R^2 \to R^2$」と表しておこう。

2．3　ϕ：$R^2 \to R^2$（部分集合Ａ→Ｂ）

「点→点」の対応において，それを明示するだけで探究が終わることは少ない。作図ツールでは「Ｐをこう動かすと，Ｑはどう動く？」などを調べる。つまり，平面内でＰが動く集合Ａに対して，その像であるＱ＝ϕ（Ｐ）の集合としてのＢ＝ϕ（Ａ）を調べることが多い。直接，それを問題とする例としては，次のものが挙げられる。

右図の中での点Ｐを円周上を動かしたとき，ＡＰの中点Ｍの軌跡を求めよ。



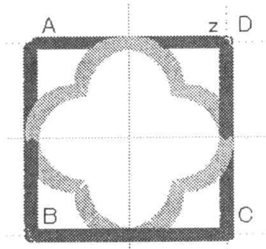
ここでは，平面内の部分集合あるいは幾何的対象としての円に対して，その像として何が対応しているかを調べている。「円を

他の図形に変えたらどうなる？」というのは自然な問いであり，直線や２次曲線など様々なものについて調べ，１／２の縮小（相似変換）であることがわかる。

「点→点」という対応は，平面内の変換であることを意識するならば，たとえば，アフィン変換の下で，円が何に写るのかなどを調べることも考えられる。ＧＣの場合，点が動いた跡の軌跡としてそれを調べることはできる。(それらの点の集合を新たな一つの幾何的対象として，次の作図等を行うことはできない。)

２．４　φ：Ｃ→Ｃ（ｚ→ｗ，Ω→Ω'）

平面はユークリッド平面と考える他に，複素数平面と考えることもできる。ＧＣでは，複素数に関する基本的な演算をメニューの中に含めているため，高校で扱う程度の多項式・分数式による関数を作図することができる。



また，この場合もたとえば分数変換によって直線は何に写るかというような探究や，正方形の領域の像がどうなるかなど，複素数平面の中の領域に関する写像について探究することも可能である。たとえば，右は w＝１／z によって正方形の像を調べた結果である。

２．５　φ：点→直線，円

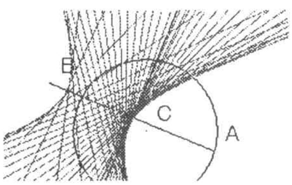
基本作図の部分でみたように，ＧＣでは「ＡＢの垂直二等分線 ℓ」というのは，ℓ を線分ＡＢの関数とみなす。あるいは，ℓ はＡ，Ｂの関数とみなす。そしてこのときも，たとえば点Ａだけを動かして調べる場合には，Ｂは定点として考えれば，

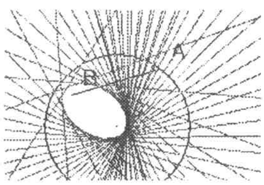
φ：Ａ→ ℓ

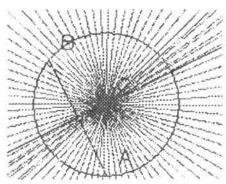
という点→直線と見なすことができる。直線の集合全体を一つの空間として考えるならば，2次元ユークリッド平面からその空間への写像があるということになるが，学校数学の範囲で考える場合には，直線の一つの要素と見なし，それがなす空間を考えることはまずない。むしろ，平面内の点の集合としての直線・円であろう。そういう意味では，通常の関数とは違う意味で，作図ツールで扱う「関数」の一つと見なすべきであろう。

２．６　φ：点が動く領域→直線，円などの通過する領域

上記のような対応を考える場合，「点Ａが動くと，AB の垂直二等分線はどうなるか」という探究が生まれる。それが特定の場所を通るのはどんなときかなどを調べる場合もあるが，たとえば，「Ａがある円上を動くとき，ℓ が通過する領域はどうなるか」を調べることもある。つまり，点Ａが集合Ω上を動くときの，{ℓ＝φ（Ａ）；Ａ∈Ω} の集合としての和を調べることになる。あるいは，{ℓ＝φ（Ａ）；Ａ∈Ω} は直線族をなすが，それに対応する包絡線を調べることが可能になる。以下には，Ａがいくつかの円を動くときにできる通過領域を何種類か示しておく。







3．Geometric Constructor 上で現れる「関数」(２)：図形→図形

３．１　φ：図形→図形

これまでの例は，幾何的要素→幾何的要素という意味での「関数」であった。それらは数学的な意味での関数・写像では，分かりやすい対象である。一方，これらは作図ツール利用の「典型的な例」ではない。作図ツールを使って考えるときは，点と点との対応等を意識化しながら考えるところからは始めない。出発点は図形である。たとえば，次の典型的な問題を考えてみよう。

問題１：四角形ＡＢＣＤのそれぞれの辺の中点をＥ，Ｆ，Ｇ，Ｈとする。このとき，ＡＢＣＤをいろいろな形にしてみよう。四角形ＡＢＣＤがどんな形のとき，四角形ＥＦＧＨはどんな形になるだろう。

この問題における思考の対象は，「四角形ＡＢＣＤが変われば，四角形ＥＦＧＨが変わる」である。あるいは，「四角形ＡＢＣＤがどんな場合でも，四角形ＥＦＧＨは平行四辺形」である。つまり，ここで「関数」として考えているのは，

　　φ：四角形ＡＢＣＤ→四角形ＥＧＦＨ

であり，この図形について「きまればきまる」，「変われば変わる」を調べることである。しかも，これは「図形」なので，位置，形，関係性，量など様々な属性がある。それらを分類し，すべて列挙するというのはあまり適切でないと思う。そのため，いくつかの特徴的な例を挙げながら考えることにしたい。

３．２　φ：形→形

上記の問題１の場合，四角形ＡＢＣＤの形(長方形，ひし形，長方形等)に対して，四角形ＥＦＧＨの形がどう対応するかが，一つの調べ方になる。後述するように，この問題に対してさらにその本質を考えるには，形だけにこだわるのでは物足りないとも言える。しかし，たとえば，次に示すように，四角形に対して四角形が対応しているとみなせる問題も，教科書等の中にもかなりあるし，意識的にそのような問題を生成することもできる。三角形の５心なども，三角形→１点とみなすと，四角形→１点はないかなど，いろいろと見方を広げることができる。そのような意味においても，四角形→四角形，三角形→三角形，三角形→１点などという形の関数として図形をみなすということは，意味のあることと言える。

３．３　φ：形→関係性，量など

形を変えることによって変わるのは，形だけではない。たとえば，さきほどの問題でも，中にできている4つの三角形の関係性について，合同・面積相等などに関してＡＢＣＤの形が「きまればきまる」し「変われば変わる」。つまり，従属変数に相等するものとしては，図形の属性として，関係性や量など，様々なものがありうると言える。

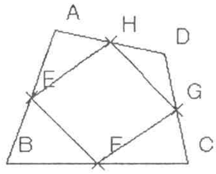
３．４　φ：位置→形，関係性，量など

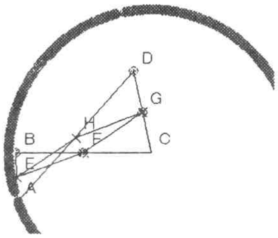
複数の点を動かすことができる場合でも，動かす点を一つに制限することによって，結果が成り立つのはＡをどこに置く場合だろうという種類の問題を生み出すことができる。例をいくつか

挙げよう。

(1) 位置→形の例

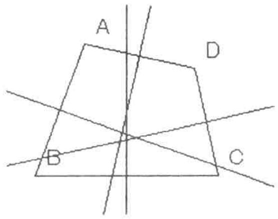
次の図において，点Aをどこにとったら，四角形ＥＦＧＨはひし形になるか。(答えは右側の図。図下同じ。)

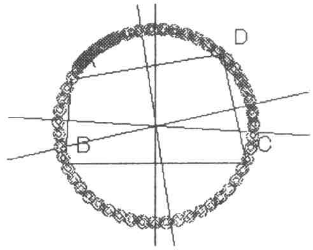




(2) 位置→関係性(共点性)の例

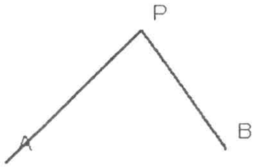
次の図において，点Aをどこにとったら，４つの辺の垂直二等分線は一点で交わるだろうか。

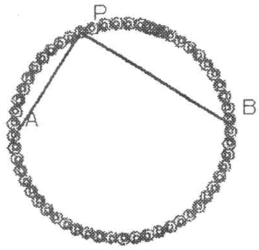




(3) 位置→関係性(共点性)の例

次の図において，点Ｐをどこにとったら，∠ＡＰＢ＝90° になるだろうか。





３．５　独立変数としての位置と形の特徴

ここまで，図形→図形に関わるものとして，二つの独立変数，形と位置について考察した。この二つの変数の特徴について触れておきたい。

まず，位置に関しては多くの場合「１点の動き」に制限することによって生まれる調べ方である。つまり，元々の問題状況として，１点だけを動かすのが自然な問題であれば別だが，最初の問題をどう定式化するかという部分に，数学的探究全体としての特徴があると言っていい。しかし，位置を調べる形に定式化されれば，その点を平面内全体を動かすことによって，すべての場合を調べることができる。(もちろん，作図ツールで調べられるのは，限られた範囲内の有限個の点にすぎないが，全体的な傾向を把握することは可能である。)

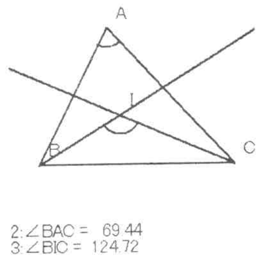
これに対して，「いろいろな形」について調べてみるというのは，問いとしてはかなりの場面

に通用する自然な問いである。しかし，位置の場合と違って，「どのような形について調べるべきか」ということに対する完全な答えはない。たとえば，四角形の場合，多くの場合に通用する分類として，「正方形，長方形，菱形，平行四辺形，台形，凸四角形」があり，それらの結果を観察し，さらに詳しく調べるとしたら，どういう形について考えると妥当かを考えることになる。上記の問題の場合であれば，対角線の性質について考えることが本質的となるが，場合によっては，等脚台形，たこ形，円に内接する四角形，円に外接する四角形など，様々な候補がありうる。

さらに，それらの形について，すべての場合を調べられるというわけではない。たとえば四角形の場合であれば，4つの独立な点があれば，かなりの自由度がある。その自由度の中で，条件を満たすいくつかの場合を調べてみることに限定される。ただ，現実の探究においては，たとえば特別な平行四辺形にしか成り立たないような場合は，いくつかの平行四辺形を調べたときに，すべて偶然成り立つというようなことはありえない。しかも，動かしながら調べる場合には，かなりの個数について調べるのと同値であり，それらの平行四辺形についていつでも成り立つ結果は，すべての平行四辺形において成り立つという実験的な証拠を得るにほぼ等しいということに支えられている。

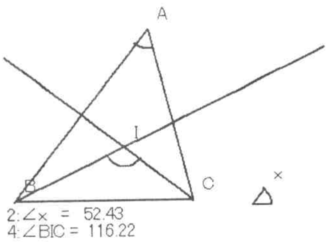
3．6　φ：量→形，関係性，量など

形の中に，長さ，角度，面積などの量が現れることから，「ある量が変われば，○が変わる」ということに注目することもある。特に量→量の場合には，いわゆる関数そのものを扱うことになる。次はその一つの例である。



右図において，x＝∠ＢＡＣ，y＝∠ＢＩＣとするとき，yをxの式で表せ。

この問題例の場合の場合，xは独立変数そのものではない。点Aを動かすことによって変えることはできるし，そのときのxとyの関係を調べることはできるが，たとえば，xをぴったり10°にするとか，0°にするというようなことは非常に難しいか，ときにはできない。つまり，このような場合の関数は，独立変数と従属変数という意味での関数であるよりは，関数関係であることの方が多い。



もちろん，右の図のように，作図の仕方等を工夫することによって，独立変数を操作するような図を作ることもできないわけではない。たとえば，右側のxを動かすと，直接頂角の大きさを操作できるようになっている。しかし，それはかなり意図的に作られたものに限定されると言える。

4．Geometric Constructor 上で現れる「関数」(3)：命題→命題

4．1　「きまればきまる」ものの一つとしての命題

所与の図の中にどんな関数関係が見いだせるかに，これまでの考察の主眼があった。一方，数

学的探究の中では，問題状況から問題を定式化したり，一度解決した問題を変え，新しい問題を作ることなどがある。そして，作図ツールを使う一つの目的に，そのような活動を支援することがある。そのような活動も，ある意味では「きまればきまる」「変われば変わる」ものの一つと見なすことができる。何が変わるのかに関しては，議論の分かれるところかもしれないが，ここではそれを命題ととらえ，「命題→命題」という意味での関数として分析してみたい。

４．２　条件変えによる新しい命題の生成

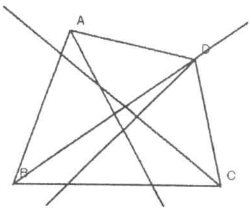
関数として最もとらえやすいのは，命題の条件変えによる新しい命題の生成である。たとえば，「四角形の4つの辺の中点を結べば，平行四辺形ができる」という命題の中の，「4つの辺の中点」を変えることによって，ＡＢＣＤを元にして，様々なＥＦＧＨの作り方が考えられる。そして，実際にそれを作図し，様々な結果を調べることができる。いくつかの結果を以下に例示しよう。

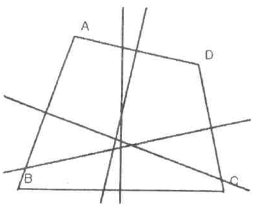
⑴　四角形の4つの角の二等分線の交点によって，四角形ＥＦＧＨができる。（ＥＦＧＨはいつも円に内接する四角形）

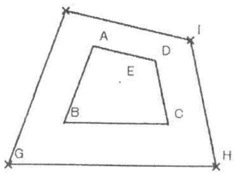
⑵　四角形の4つの辺の垂直二等分線の交点によって，四角形ＥＦＧＨができる。（ＥＦＧＨは角に特徴がある四角形）

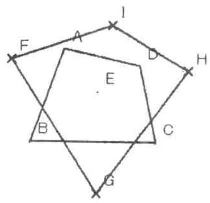
⑶　四角形の内点Ｐがあるとき，Ｐを4つの頂点に関して点対称移動した点を結ぶことによって，四角形ＥＦＧＨができる。（ＥＦＧＨはＡＢＣＤを２倍に拡大した四角形）

⑷　四角形の内点Ｐがあるとき，Ｐを4つの辺に関して線対称移動した点を結ぶことによって，四角形ＥＦＧＨができる。（ＡＢＣＤの形によって，ＥＦＧＨはいろいろな特徴を持つ）









４．３　「形→形」の背景にある関係性の明確化

命題→命題という意味で考えたとき，最も明確なのは，上記の条件変えだが，数学的探究を幅広く観察するならば，それ以外のものも目に止まる。実際，数学的探究は漠然とした状況から生まれ，次第に定式化されていく。ある図形についてどんなことが言えるかを考えるとき，暫定的な枠組みとして，「形→形」の対応の様子を調べ，その結果を元に，次になにをするかを考えることはよくあることである。

たとえば，前述の例の場合には，最初は，次のような対応表が暫定的な結果と言える。

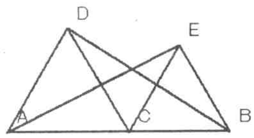
ＡＢＣＤ		ＥＦＧＨ
正方形	→	正方形
長方形	→	菱形
菱形	→	長方形

四角形→平行四辺形

どうしてそうなるかを考察する中で，対角線に関する条件が鍵を握っていることが分かる。そして，それをより明確に反映した命題あるいは対応として，次のものが得られる。

ＡＢＣＤ		ＥＦＧＨ
ＡＣ＝ＢＤ，ＡＣ⊥ＢＤ	→	正方形
ＡＣ＝ＢＤ	→	菱形
ＡＣ⊥ＢＤ	→	長方形
四角形	→	平行四辺形

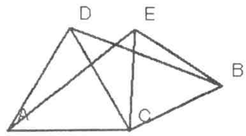
このような探究は，形に関する命題をより本質的な性質を明確化するものと言えるだろう。



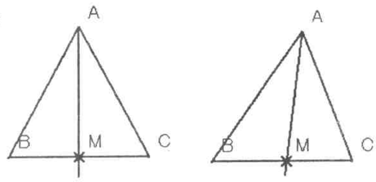
4．4　不要な条件の明確化や一般化

たとえば，次の問題を考えてみよう。

問題　線分ＡＢ上に点Ｃをとり，直線ＡＢの同じ側に，２つの正三角形ΔＡＣＤ，ΔＢＣＥをつくるとき，ＡＥ＝ＤＢであることを証明しなさい。



この問題の場合，その証明を考えてみると，３点Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上にあるという条件あるいは∠ＤＣＥが60°という条件は，使われていないことが分かる。その結果，次の図のような場合でもＡＥ＝ＤＢが成り立つことや，正三角形でなくても成り立つ場合があることなどが分かる。



4．5　命題の精緻化

たとえば，三角形ＡＢＣの∠Ａの二等分線とＢＣとの交点をＭとする図を考えてみよう。

この図について，「ＡＢ＝ＡＣならばＢＭ＝ＣＭ」「ＡＢ≠ＡＣならばＢＭ≠ＣＭ」という命題も確かに正しいのだが，さらに次のような補助線を追加する等によって，より精緻化された命題として，「ＢＭ：ＣＭ＝ＡＢ：ＡＣ」を得ることができる。同様のことは三平方の定理に関して，直角三角形では等号はなりたたないという段階から，それを精緻化したものとして余弦定理を得る場合についてもいえる。

5．まとめと今後の課題

本稿においては，作図ツールＧＣを使ったときに現れる関数的な考え方を分析するための出発点を確立することを目的として，まずＧＣにおける幾何的対象と作図手続きの構成の仕方を明らかにした。そして，幾何的対象→幾何的対象，図形→図形，命題→命題という３つの異なる観点からどのような関数が発生しうるのかを分析した。

それらの具体的な分析を行いながら，関数的な考えとの関わりおよびその指導のあり方等を明らかにすることは，今後の課題である。