イプシロン　2000. Vol. 42, 71-74

三角形の重心の導き方について

愛知教育大学　小 谷 健 司

1. 図1のように，三角形の3つの中線（頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分）は必ず1点で交わります。この点は三角形を密度の均一な板とみなしたときのつりあいの位置になります。すなわち，図2のように，この点に糸を付けてぶら下げたとき，ちょうど板が水平につりあうことになります。この事実から，この点はその三角形の「重心」と名付けられており，現在の学校教育では中学校2年生で教えられております。しかし，中学校の教科書（啓林館，東京書籍，大阪書籍，学校図書）を読んでみても，それが「重さの中心」であることの説明がなされておりません。もちろん，大学で学ぶ高度な数学の知識（重積分）を使えばそれを説明することは簡単です。しかし，中学校の学習内容であることを考えれば，中学生にも理解できるような説明が必要であると思い，それを目的にこのノートを書きました。

図 1

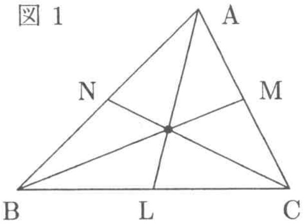
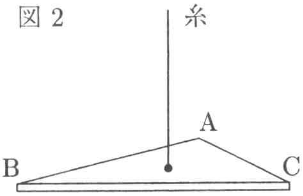


図 2



2. 平面図形を密度の均一な板だと考えます。この板の1点に糸を付けてぶら下げたとき，ちょうど板が水平につりあう点を**重心**と呼ぶことにします。

図3のように，面積比が3 : 1の図形 D_1 と D_2 をくっつけてできる図形 D の重心を考えます。それぞれの図形の重さは面積に比例するので，D_1 の重心 G_1 と D_2 の重心 G_2 に働く重さの比は 3 : 1 になります。これは，図4のように，てんびんの両端に重さの比が 3 : 1 のおもりが下がっているのと同じ状況ですので，図形 D の重心 G は線分 $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ を 1 : 3 に内分する点になります。したがって，重心は次の性質をもつはずです。

図 3

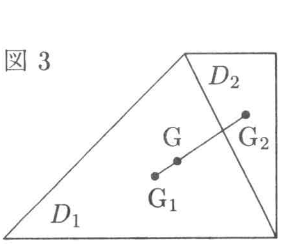
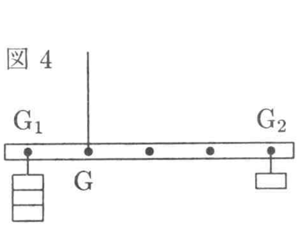


図 4



重心の性質 1． 図形 D が 2 つの図形 D_1 (面積 S_1) と D_2 (面積 S_2) に分割できるならば，D_1 の重心と D_2 の重心を結ぶ線分を $S_2 : S_1$ の比に内分する点が D の重心になる。

板を重心の位置から糸でつるしたものを持ち歩いても，場所によってつりあいが変わることはありません。また，板を裏返しにしても同じ位置が重心にななります。以上のことから，図形の重心は合同変換（平行移動，回転，裏返しの合成）を行っても保たれることがわかります。また，図 3 のてんびんのつりあいでは，重さの比が同じであれば，おもりの重さを変えてもつりあいは変わらないし，長さの比が同じであれば，$\mathrm{G_1G}$ と $\mathrm{GG_2}$ の長さを変えてもつりあいは変わりません。つまり，拡大・縮小をおこなっても保たれることがわかります。したがって，重心は次の性質をもつはずです。

重心の性質 2． 重心は相似変換によって保たれる。すなわち，ある相似変換によって図形 D_1 が図形 D_2 に写るならば，D_1 の重心は D_2 の重心に写る。

重心の性質 1, 2 は，中学生も無理なく受け入れることができる程度に自然な仮定だと思います。2 つの性質と中学生で勉強する程度の幾何学の知識を使うだけで，点対称な図形の重心や三角形の重心を求めることができます。

定理 1． 点対称な図形の重心は対称の中心である。また，線対称な図形の重心は対称軸上にある。

証明. 点対称な図形 D を対称の中心 S を通る直線で 2 つの図形 D_1 と D_2 に分割する。図形 D_1 は点 S のまわりに 180° 回転させることにより図形 D_2 に写る。したがって，図形 D_1 の重心 $\mathrm{G_1}$ も点 S のまわりに 180° 回転させることにより図形 D_2 の重心 $\mathrm{G_2}$ に写る。図形 D_1 と D_2 の面積は等しいので，図形 D の重心は線分 $\mathrm{G_1G_2}$ の中点，すなわち S になる。線対称な図形についても，同様に証明できる。 □

定理 2． 三角形の重心は中線の交点である。

証明. 三角形の頂点を A, B, C, 線分 BC, CA, AB の中点を L, M, N, 三角形 ABC の重心を G とする。三角形 ABC を，辺の中点どうしを結ぶことによって互いに合同な 4 つの三角形 ANM, NBL, MLC, LMN に分割し，これらの重心をそれぞれ $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{G_3}$, $\mathrm{G_4}$ と名付ける。平行四辺形 ANLM は線分 NM の中点 S に関して点対称なので，その重心は S になる。次に，線分 BL, LC の中点をそれぞれ $\mathrm{L_1}$, $\mathrm{L_2}$ とすると，線分 $\mathrm{G_1L_1}$, GL, $\mathrm{G_2L_2}$ は平行線なので，線分 $\mathrm{G_1G_2}$ の中点 P は線分 LG 上にある。三角形 NBL と MLC の面積は等しいので，2 つの三角形をくっつけてできる図形 NBCML の重心は P になる。

図 5

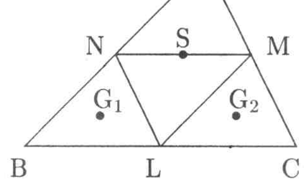
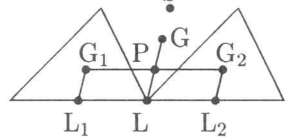


図 6



平行四辺形 ANLM と図形 NBCML の面積は等しいので，三角形 ABC の重心 G は線分 SP の中点になる。直線 GP は，線分 NM の中点 S と線分 BC の中点 L を通るので，直線 NB と MC の交点 A も通る。したがって，重心 G は直線 AL 上にあることが証明された。同様にして，重心 G が線分 BM, CN 上にあることも証明できる。 □

3. 定理 2 の証明の特長は，極限操作を使っていないところにあります。三角形の重心が 3 中線の交点になることは，古くはアルキメデスが説明していますが，その方法は「三角形を細く切り刻む」という極限操作を使ったものでした。文献 [1] 参照。

定理 2 と性質 1 を使うと，任意の多角形の重心を有限回の操作により求めることができます。一般の平面図形の重心を求めるためには，次のような極限操作に関する性質が必要になります。

重心の性質 3． 図形 D_n の重心を G_n としたとき，$n \to \infty$ のとき $D_n \to D$ かつ $\mathrm{G}_n \to \mathrm{G}$ ならば，図形 D の重心は G である。

定理 2 と性質 1，それに性質 3 の極限操作を用いると，座標平面上の図形 D の重心の座標 (x_g, y_g) を求める公式を導くことができます。

重心の公式
$$(x_g, y_g) = \frac{1}{S}\iint_D (x, y)\, dxdy, \qquad S = \iint_D dxdy.$$

逆に，この公式を用いて，性質 1, 2, 3 を導くこともできます。一般の平面図形の重心を定義する場合，たいていの教科書では，この式によって重心を定義しています。（というよりも，これ以外の定義は見たことがない。）この公式を眺めると，重心が「図形の各点の位置の平均」であることが理解できます。

4. 読者の中には，「重心という概念を三角形以外の図形に拡張することに数学的な意味があるのだろうか？」との疑問をもっている人もいるでしょう。そのような人たちのために，次の 2 つの定理を紹介したいと思います。

定理 3． 半平面 $\{(x, y) :\ x \geq 0\}$ 上の図形 D を，y 軸のまわりに回転してできる立体 B，すなわち $B = \{(x, y, z) :\ (\sqrt{x^2+z^2}, y) \in D\}$ の体積は，図形の面積 S と図形の重心の移動距離 ℓ の積になる。

定理 4． 平面図形 D を底面にもつ柱を，その上面と底面を通らない平面で切ったときの下の立体 B，すなわち $B = \{(x, y, z) :\ (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq ax + by + c\}$ の体積は，図形の面積 S と切り口の図形の重心の底面からの高さ h の積になる。

これらは，重心の公式と重積分の知識があれば，簡単に証明することができます。定理 3 は Pappus-Guldin の定理とも呼ばれ，その証明は，例えば [3] にあります。定理 3, 4 を使うと，次のような問題を簡単に解くことができます。

例題 1． 円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

解． 定理 3 より，$\pi \times 4\pi = 4\pi^2$.

例題 2． 半円 $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geq 0)$ の重心を求めよ。

解． 重心の座標を $(0, y_g)$ とすると，定理 3 より，$\frac{1}{2}\pi \times 2\pi y_g = \frac{4}{3}\pi$. したがって，重心は $(0, \frac{4}{3\pi})$ である。([2])

例題 3． 3 点 A(0, 0, 0), B(2, 1, 0), C(1, 3, 0) を底面の頂点とする三角柱を，3 点 A′(0, 0, 5), B′(2, 1, 3), C′(1, 3, 4) を通る平面で切ってできる五面体 ABC–A′B′C′ の体積を求めよ。

解． 定理 4 より，$\frac{1}{2}(6-1) \times \frac{1}{3}(5+3+4) = 10$.

5. 余談ですが，英語では「重心」の呼び方として，centroid, barycenter, center of gravity などいろいろあるようです。(似たような言葉として，質量中心 center of mass というのもある。) 初等幾何学の教科書では，centriod が使われることが多いようです。この言葉には「重さの中心」の意味が入っていないので，我々日本人が抱く「なぜこの点が重さの中心になるの？」という疑問を，英語国民はもたないかも知れません。

参考文献

[1] H. S. M. コクセター「幾何学入門」明治図書.

[2] R. P. ファインマン「ファインマン物理学 I 一力学」岩波書店.

[3] 水野克彦編「基礎課程解析学」学術図書.