イプシロン　1999. Vol. 41, 81-95

作図ツールを用いた複素数に関する数学的探究

― ケーススタディを中心に ―

愛知教育大学　**飯　島　康　之**

0．はじめに

作図ツールは，平面図形に対する初等幾何的な構成・操作を実現しているソフトウェアである。しかし，初等幾何的な分野のみにその利用は限定されるわけではなく，図形に関数的な見方を導入したい場面の多くで利用することが可能である。さらに，平面を複素数平面として捉えると，複素数に関わるテーマを扱うこともできる。特に，平面から平面の対応を構成し，その変化の様子を観察することによって，写像としての観点からの探究が支援される。筆者が開発したGeometric Constructor（以下，本文ではGCと略す。本稿の探究はGC/Win１．３．１を使って行なった。）では，複素数の演算を作図メニューの中に盛り込んでいるため，それらに関する数学的探究を容易に行なえる。本稿では，そのような複素数に関する数学的探究の概要について述べる。

1．複素数の探究の背景と利用するＧＣの基本的な機能

1．1　代数的な側面が中心の現在の複素数指導

複素数は代数的にも，解析的にも，そして幾何的にも重要である。しかし，これまでの学校数学の中での位置づけを考えてみると，$x^2+1=0$の解の付加とそれによる代数的閉体という代数的側面が中心である。複素解析的な側面は大学レベルでないと扱えないが，幾何的な側面に関しては，高校レベルでも十分にアプローチ可能なことが多い。しかし，現行の教科書などでの複素数と幾何との接点の多くは，平面幾何的な内容を複素数によって表現し，複素数の式変形等によってそれを解決するということが多い。逆に言えば，写像や変換としての側面が薄いのである。

1．2　複素数平面から複素数平面への写像としての関数

一般に，実数値関数はｘｙ平面内のグラフとして描かれ，これによって，関数としての特徴を調べることができる。逆に，関数の定義域，値域を複素数に拡大したとき，そのグラフは４次元空間の中でないと描くことができない。しかし，定義域と値域をそれぞれ平面として併置し，定義域の中の点ｚに対して，その像ｆ（ｚ）がどのような振る舞いをするかを観察するならば，２次元の平面を２つ使うことによって扱える（２．１．３参照）。そして，その２つの平面を同一平面内に重ねて表現する方法ならば，GCのような作図ツールによって扱うことができる。その探究の流れの概略を次に示す。

1．3　GC による複素数の探究の基本

⑴　平面内に独立変数 z を取る。

⑵　いくつかの手続きを繰り返すことによって,注目したい写像 f （z）を構成する。

⑶　z と f （z）の軌跡を設定する。

⑷　z を所定の経路に沿って動かしたときの f （z）の軌跡等を観察する。

なお，この際に利用可能な手続きは，和・差・積・逆数・数式の利用によって表現される式（多項式・分数式等）と，幾何的な手続きによって構成される式（たとえば，共役複素数や反転など）およびそれらの組み合わせである。

1．4　GC による複素数の探究でよく使う機能

上記のもの以外によく使う機能を挙げておく。

⑴　拡大／縮小：単位円の近辺での挙動など，注目したい現象に対して座標系を適切な大きさにとるために，拡大／縮小機能（F 3/Shift+F 3）をよく使う。なお，意外なことだが，この機能がない作図ツールは多い。

⑵　点の動きの束縛：たとえば，単位円の像を調べる場合，z の動きをこの単位円上に束縛し，その像の軌跡を調べるのが最も典型的な手段である。このときには，この作図に前後して，単位円を作図しておき，点 z の動きをこの上に制限する。また，GC/Win 1．3．0 以降では，シフトを押しながら変形をすると，最も近い幾何的対象（線，円）の上にその点を射影するようにした。そのため，ある図形（たとえば正方形）の像を調べる場合には，シフトを押しながら点 z を動かすだけで，その図形の像の大まかな形を知ることができる。

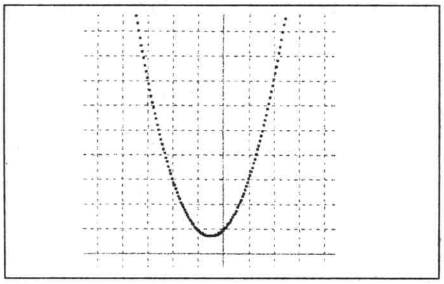
⑶　座標軸（直交座標系／極座標系）：また，座標系があると便利なことが多いが，GC/DOS では直交座標系を，また GC/Win では，直交座標系あるいは極座標系を表示することができる。

2．ＧＣを用いた複素数に関する数学的探究の実際

2．1　$z^2+z+1=0$ の解に関連して

2．1．1　出発点

中学校の範囲では，2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解はない。実際，$y=x^2+x+1$ のグラフを考えると，右のようになっているのだから，$y=0$ となることはない。定義域と値域を複素数に拡大したから，解があるというのだが，果たして $z^2+z+1=0$ の解はどこにあるのだろう。



2．1．2　作図の概略

次のような手続きで，f （z）を作る。

⑴　平面内に独立変数 z （点A）を作る。

⑵　Aの２乗により，z^2（点B）を作る。

⑶　A＋Bにより z^2+z（点C）を作る。

⑷　１（点D）を作る。

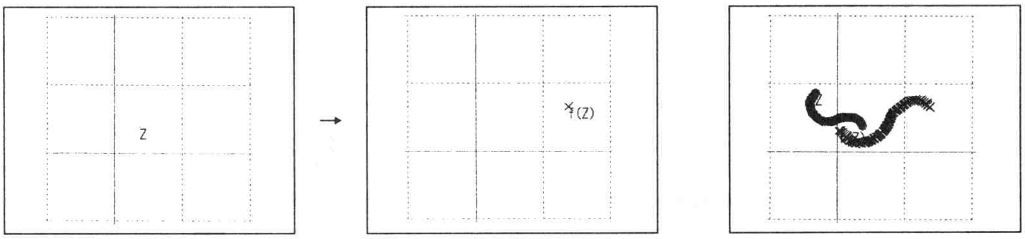
⑸　C＋Dにより z^2+z+1（点E)を作る。

そして，必要に応じて点の名前を変更し，その色を変更し（不要なものは「書かない」と設定する），そして軌跡の設定をする。

２．１．３　実数値関数の複素化

実数から実数への関数として $y=x^2+x+1$ を考えると，$y=0$ となる解はない。

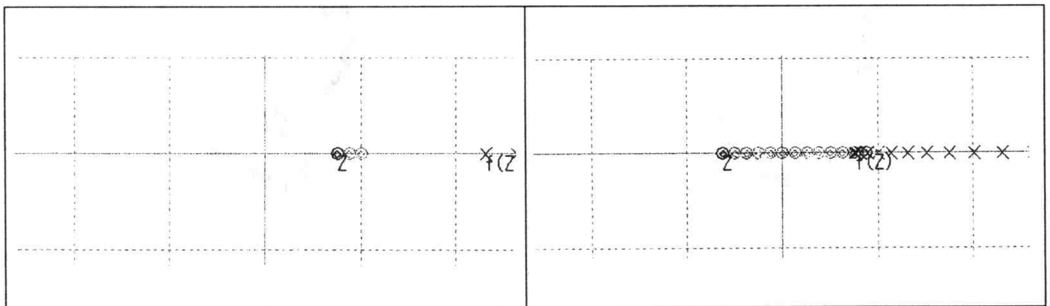
しかし，解の公式のルートの中が負になる場合，それを虚数とすれば解があるということは，関数の観点から考えると，「定義域を複素数C」に拡大することになる。同時に，値も複素数になりうることがあるわけだから，「値域も複素数C」に拡大することも必要になる。複素数Cは平面なので，実数のグラフのときのように二つを直交させて表示しようとすると，４次元になってしまうのでできない。そこで，定義域と値域を二つの平面を併置すると，次のような図となる。



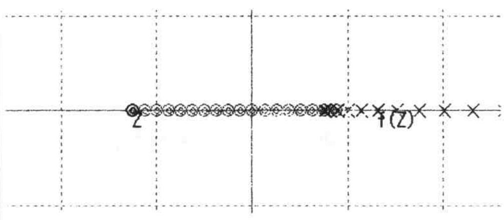
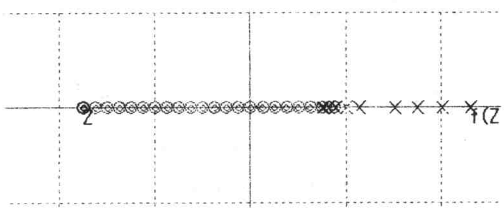
これを一つの平面上で重ねたのが，ＧＣにおける画面になる。この図の中の独立変数 z は平面内を動くときに，f（z）も平面内を動く。軌跡を残すと右図のようになる。一般に，曲線 γ 上を z が動けば，γ と f（γ）の二つの像を画面内で見ることができる。

２．１．４　「実数解なし」の現象

この方程式には実数解がないというのは，次のような現象として確認することができる。



$z=1$ からスタートして左方向へ。f（z）が顔を出した。	原点が近くなってきたのに，f（z）の動きが鈍くなってきた。

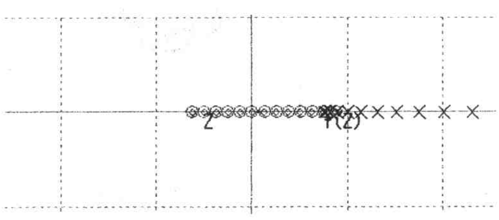
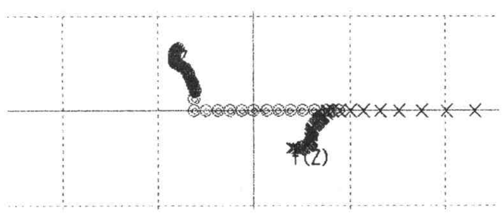
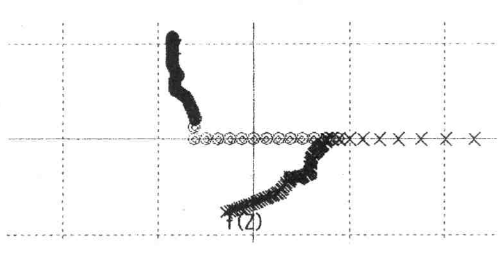
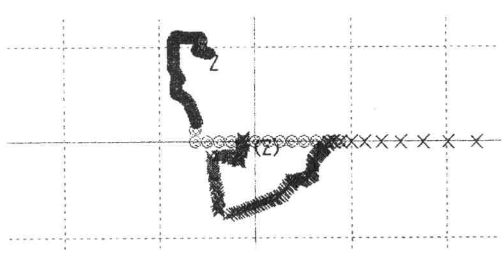
	
f（z）が右に引き返してしまう。	再びf（z）は画面から消え去ろうとしている。

2．1．5　試行錯誤的な解の発見

一般に，解を探すときに使う方法は，解の公式・因数分解によるより低次の方程式への帰着，適当と思われる数値の代入による発見などであるが，ＧＣの中でｚとｆ（ｚ）を表し，ｚを動かしたときのｆ（ｚ）の変化の様子を見ることができる環境の中では，

解を探すこと＝ｆ（ｚ）が原点に重なる場合を探すこと

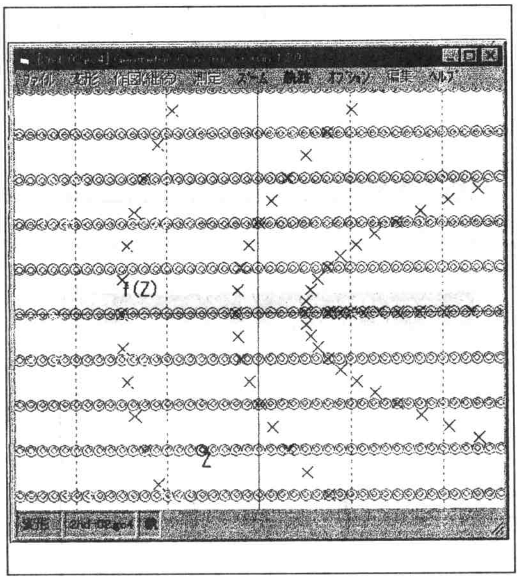
となる。そして，ｚに対するｆ（ｚ）の動きの様子を観察しながら，原点に重ねるにはどうしたらよさそうかを試行錯誤的に見つけるプロセスになる。解を発見するプロセスの一例を挙げる。

	
ｚ＝１からスタートし，取り敢えずｘ軸上をf（z）が最も左に行くあたりまで進んでみる。	左ではだめだから，少し上の方向にうろうろ
	
ありゃ,かえって離れてしまう。	かなりいい線に近づいた感じ。このあたりに解がありそうだ。

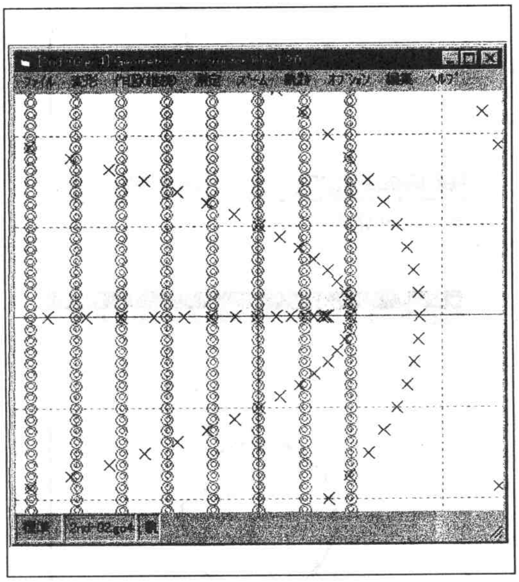
2．1．6　w＝f（z）の像の組織的調査

試行錯誤的に見つけるのは，公式で一律に解が与えられるのとは違った面白さがあるのは事実だし，公式がない方程式の場合にも使える方法ではあるが，他の解の可能性も残っていることから，次の段階として，より組織的に調べることが考えられる。以下では，実軸，虚軸に平行な直線群の像およびそれらを合わせた像と，単位円およびその同心円について調べた場合についてその結果をまとめてみる。もちろん，観点を変えれば，別の形での「組織的な調べ方」もありうるだろう。

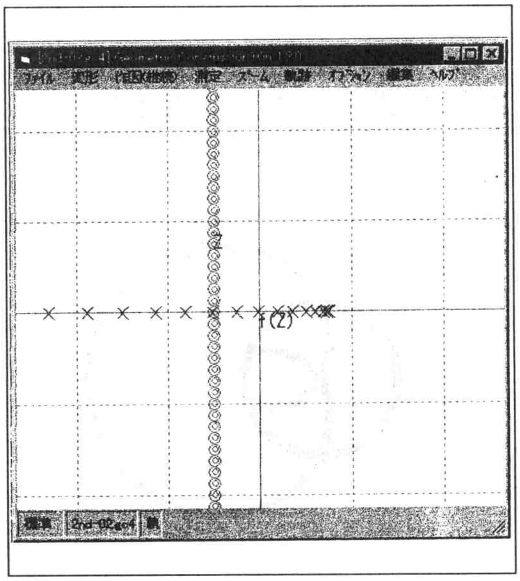
(1)　実軸に平行な直線群の像



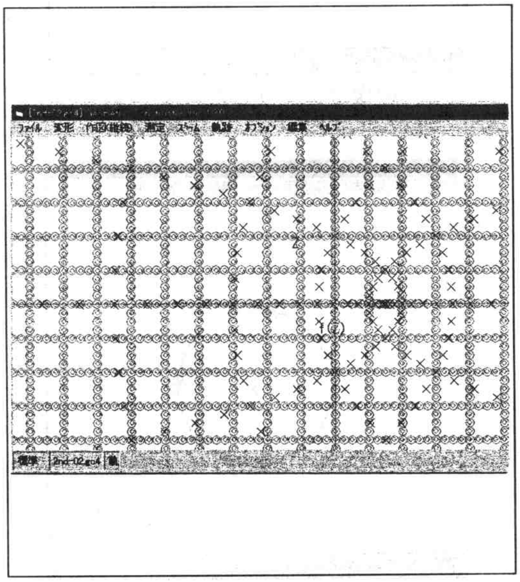
(2)　虚軸に平行な直線群の像



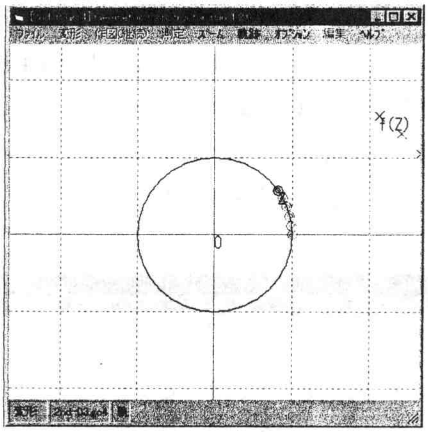
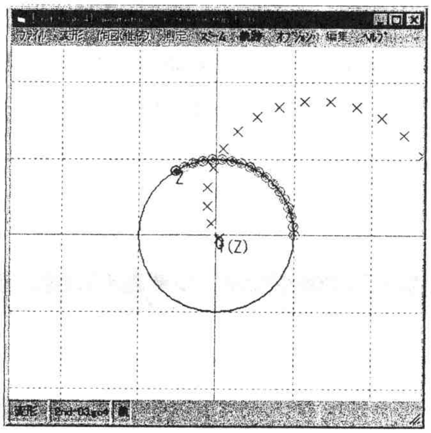
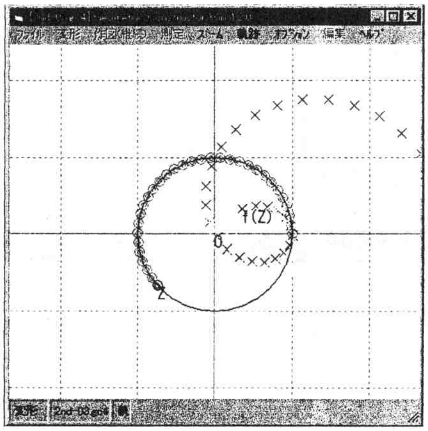
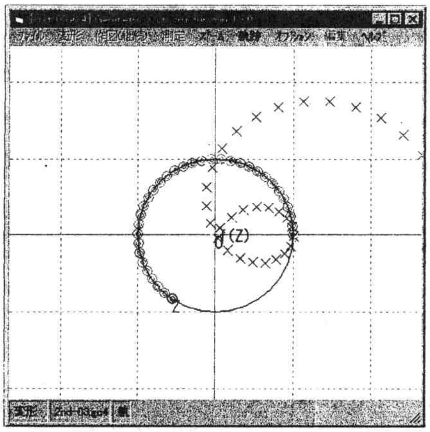
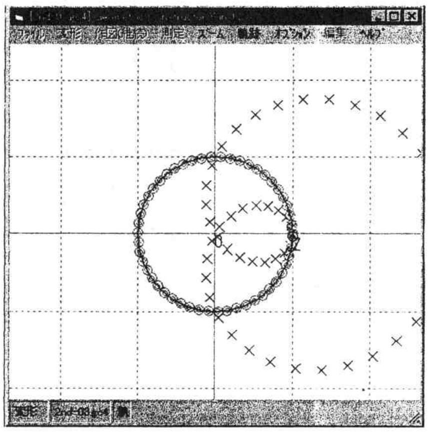
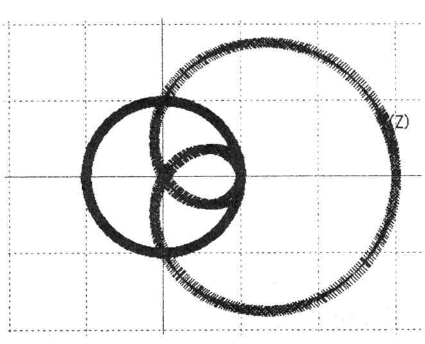
(3)　直線 x ＝0.5の像（像が実軸上の半直線）



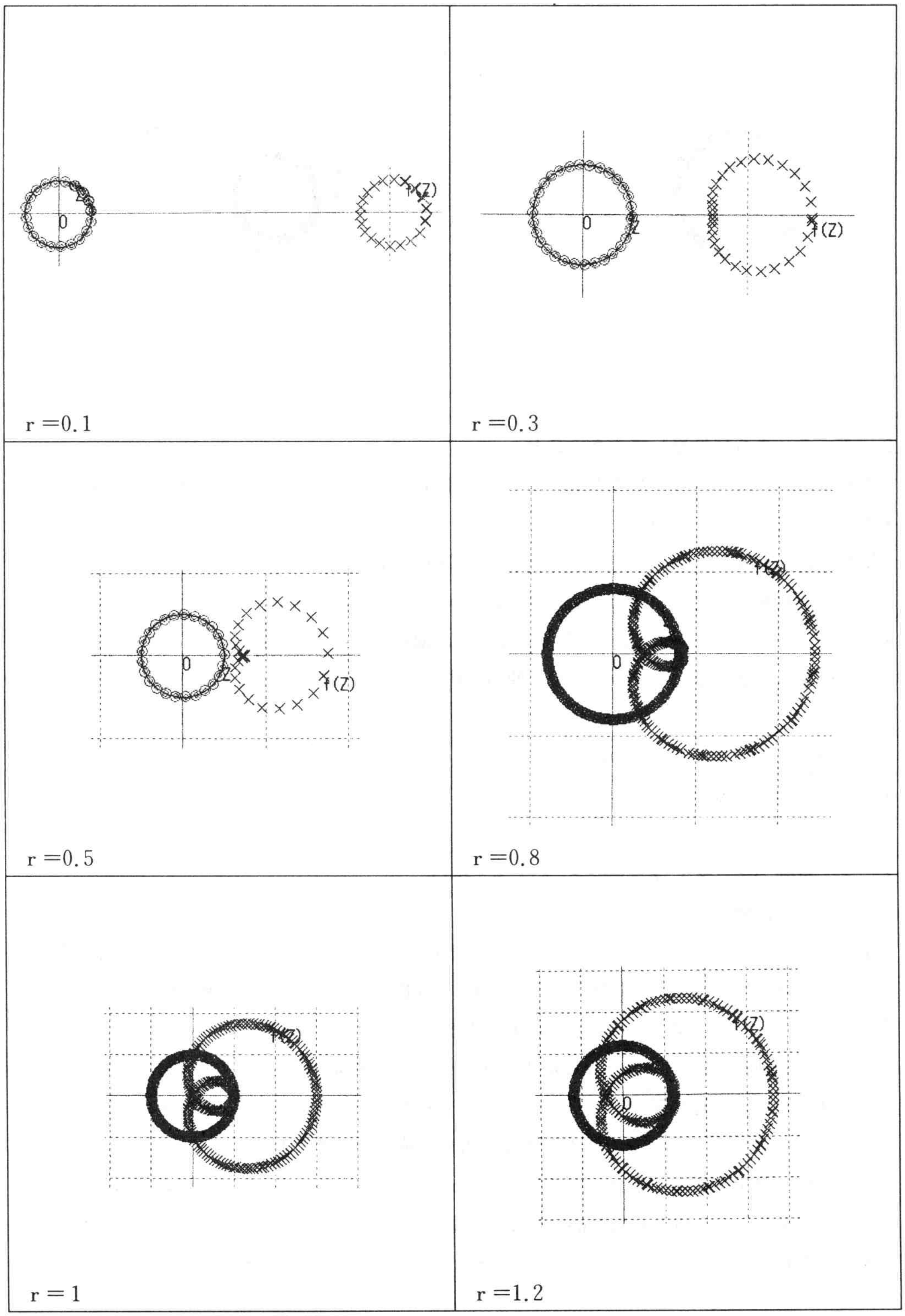
(4)　実軸，虚軸を重ねてみる（直交座標系の像）

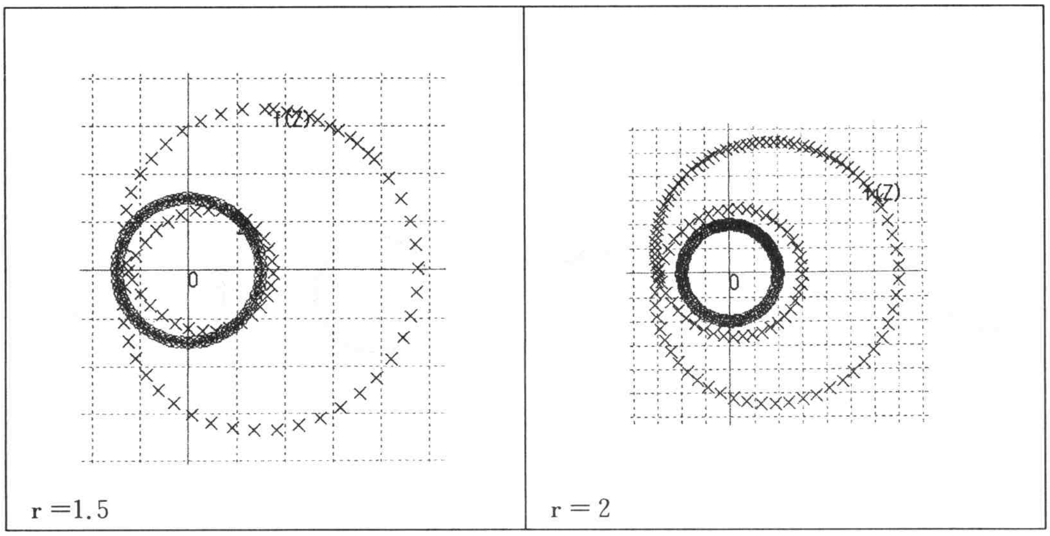


(4)単位円の像の動き

 z＝1を出発点にして。	 z＝ωでf（z）＝0になる
 f（z）の像はクルッと回って	 z＝—ωで再びf（z）＝0 になる。
 1周終了。	 より細かく軌跡を残して，画面拡大。

(5) その同心円の像





2．1．7　さらに注目してみたいこと

これらのことからさらに探究を進める上で，注目しそうなことをいくつかあげてみる。

- なぜ放物線が出てくるのか。
- 値が実数になるところ（f^{-1}（R））が直交するのはなぜか。
- 二つの放物線群は直交しているように見えるが，そうなのか。
- 円の変化の中で，「2重」と「1重」およびその臨界点には何か意味はあるのか。
- 円の中身も考慮すると，r＝1を境に原点が内部／外部になっているが，それは意味があるのか。
- 式の係数を変えるとどうなるか
- 2次式でなくなるとどうなるか

2．2　点列 $\{z, z^2, z^3, ...\ z^n\}$ について

2．2．1　出発点

1のn乗根つまり $z^n=1$ の解の集合は単位円をn等分して並んでいることは，高校の教科書の中でも取り上げられている内容である。「調べる課題」というよりは，「確認する内容」という感じがする。それを「調べる課題」に変えてみることを考えてみた。

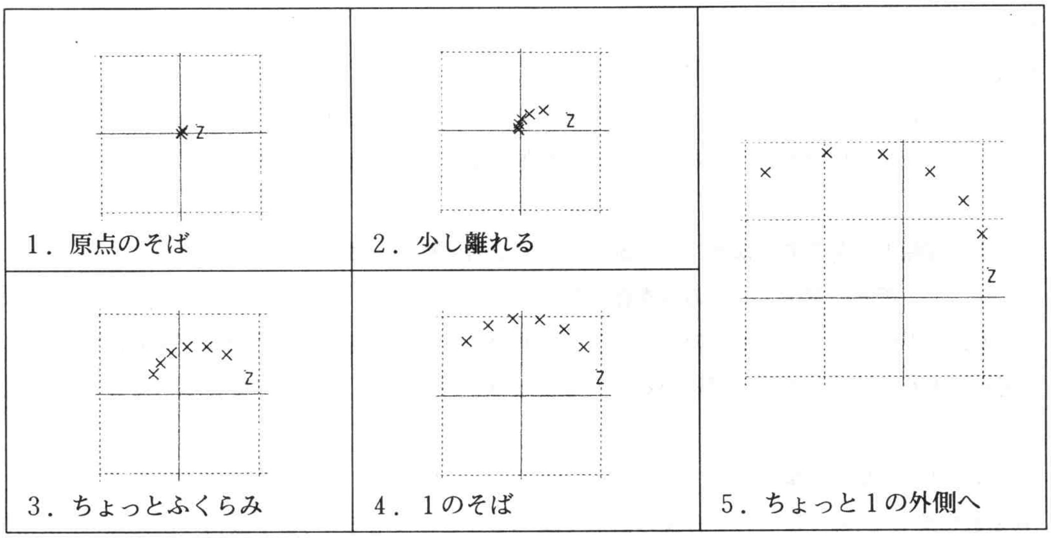
まず，zを動かして $z^7=1$ となる場所を探そうという課題を考えた。「7」という数値には特別な意味はない。実際に動かして調べてみると，それなりに面白いが，$z^3=1$ あるいは，上記で取り上げた $z^2+z+1=0$ のときとあまり大きな違いが出てこない。

そこで少し発想を変え，集合としての $\{z, z^2, z^3, ..., z^n\}$ にしてみた。zが動くと，点列が変化する。これはなかなか面白いことに気がついた。そこで得られたのは次の問題である。

問題： zを動かすと $\{z, z^2, z^3, ...\ z^n\}$ にどんなことが起きるか

2．2．2　原点から少しずつ離したときの様子

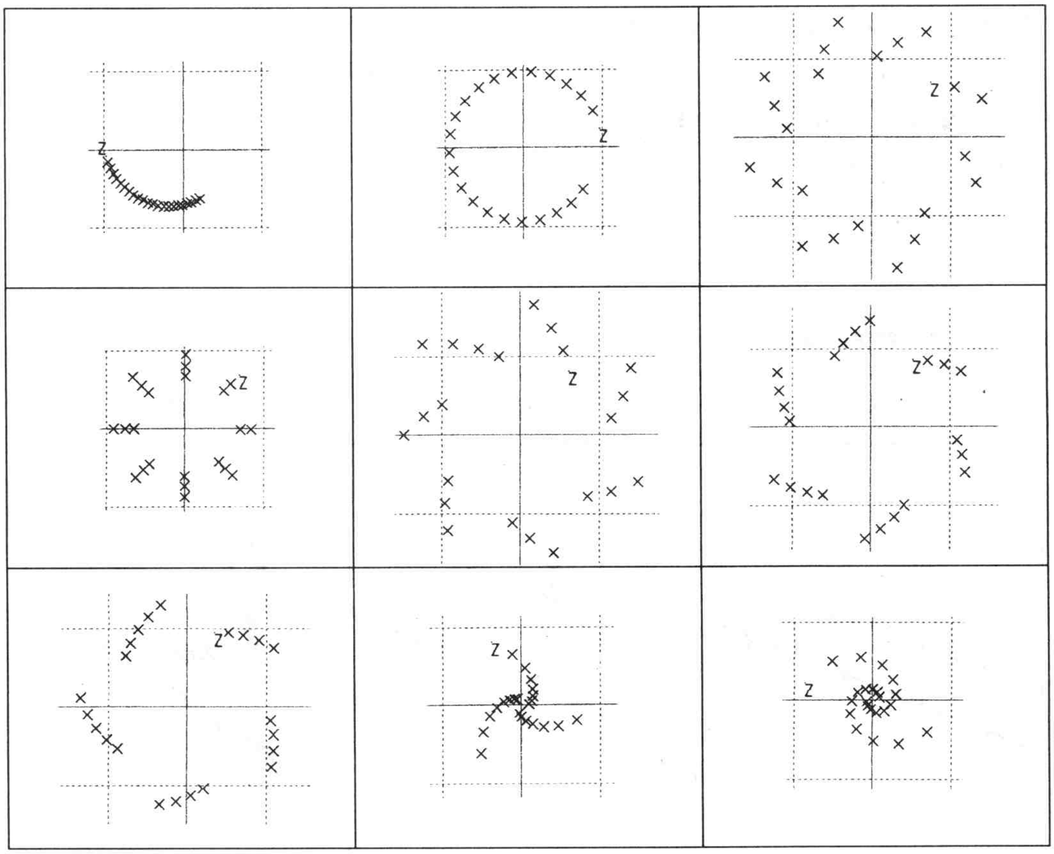
原点から少しずつ離していくと，次のような様子を観察することができる。



1．原点のそば　2．少し離れる　3．ちょっとふくらみ　4．1のそば　5．ちょっと1の外側へ

2．2．3　単位円のそばを動かしたときの様子

単位円のそばを動かすと，様々な様子を観察できる。その中のいくつかを挙げておく。



これらの図を眺めると，zの位置によって，次のことなどが変化することが分かる。

- いくつのかたまりに分かれるか
- 右回り，左回り，放射状
- 内巻き，外巻き（吸収型，発射型）

なお，これらは偏角と絶対値に関する考察でまとめることができるが，それらを学習した生徒にとって，上記の現象を説明するのは適切な課題になるのではないだろうか。

2．3　写像の不変要素の探究(1)：写像としての四則演算の特徴

2．3．1　平面の写像としての複素数関数

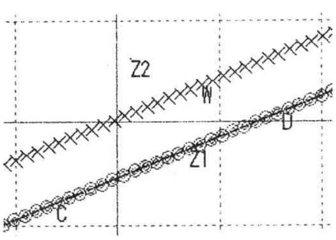
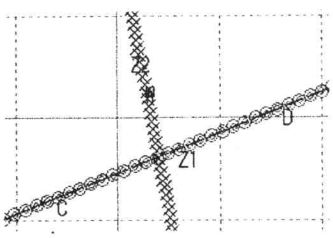
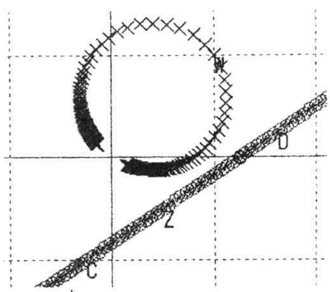
複素数は平面をなす。平面上の点に対して，平面上の点を対応させるきまりがあれば，平面内の図形，平面全体などがどう写るかを調べることは，「写像」としての性質を調べることになる。

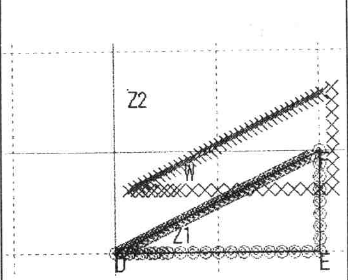
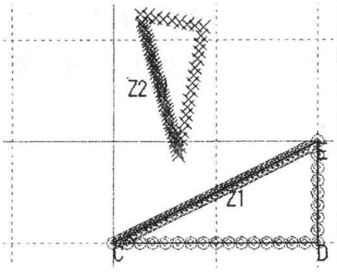
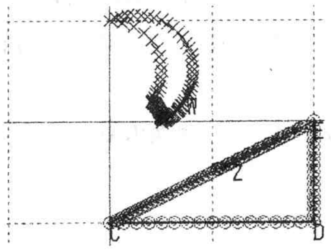
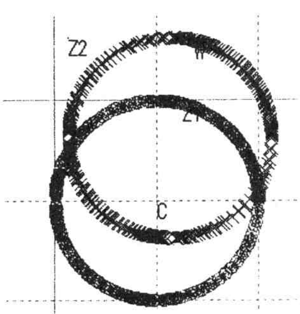
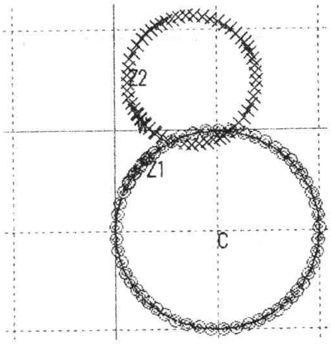
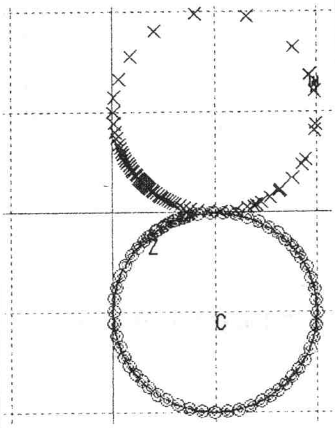
2．3．2　演算と対象

複素数に関して，様々なものを写像の観点で調べることができるが，まず最初の出発点は四則演算であろう。なお，「差」に関しては「ａ－ｂ」は「ａ＋（－ｂ）」と考えられるので，「和」の一部として考えればよい。また「商」に関しては，「ａ／ｂ」は「ａ＊（１／ｂ）」と考えられることと，ＧＣでは「逆数（１／ｚ）」があるので，「逆数」を考えればよいだろう。そういう意味で，最初の演算は，「和」，「積」，「逆数」とする。調べてみる対象と観点を挙げておく。

対　象	調べる不変要素
直線	直線性
直角三角形	直線性／長さ／角／比
円	円であること／２次曲線

2．3．3　結果の概要

和	積	逆数
		

和	積	逆数
		
		

上記の結果をまとめると，次のようになる。

ここから，複素数の和や積は既知の変換を実現する演算として理解できると同時に，逆数は新奇な変換であり，直線・円を円に写す，これまでにない特徴を持つ変換であることが分かる。これらから，以下のような課題が生まれる。

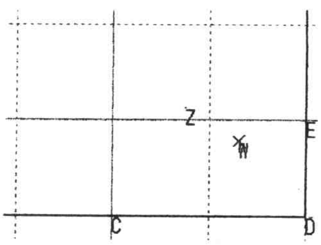
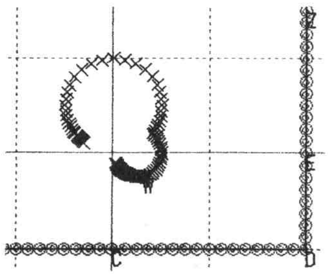
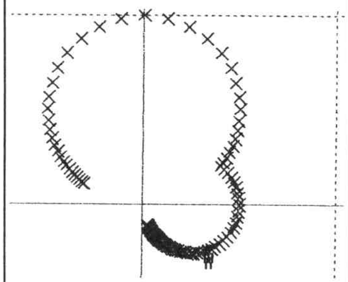
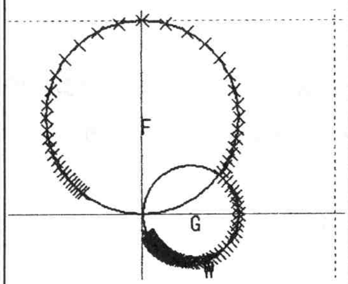
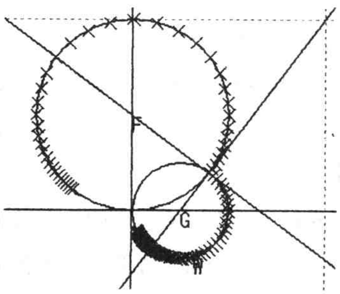
- 「逆数」の変換がどういう特徴を持つのか，もっと明らかにする。
- 「逆数」の変換と同じ特徴を持つのはどのような演算の集合かを明らかにする。
- 複素数の別の式はどのような特徴を持つのか明らかにする。

	変換の特徴	直線	円	直角	比
和	平行移動	直線	円	直角	保たれる
積	拡大＋回転	直線	円	直角	保たれる
逆数	？	円	円	直角？	保たれない

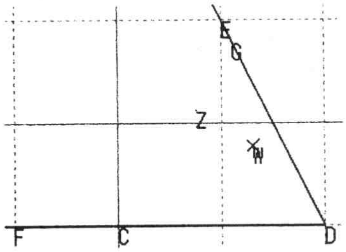
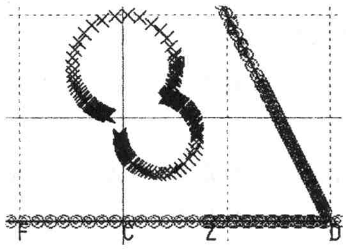
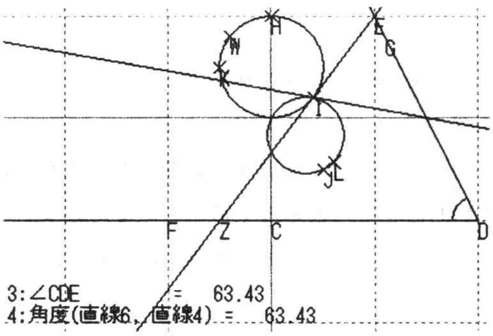
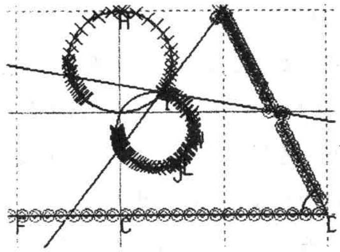
2．4　写像の不変要素の探究(2)：逆数における角の保存

2．3での結果の中で，逆数が他の演算と比較して特殊な写像であるにも関わらず，他の演算と共通した不変要素（の候補）として存在するのが，円を円に写すという性質と，直角を直角に写すという性質である。直角を直角に写すというのは，2．1．6においても，2次関数が直交座標系を直交する放物線群に写していたように，多くの複素写像に共通する性質である。そこで，ここでは，逆数について，この角の保存についてどのような探究がありうるかを素描しておきたい。

2．4．1　直角の像

		
まず半直線で直角を作る。	角の像を描く	拡大してみる。
		
像に重なる円を追加	接線を追加	

2．4．2　鋭角の像

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>まず半直線で直角を作る。</td><td>角の像を描く</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>像の円の候補を作図し測定</td><td>確認</td></tr>
</table>

2．4．3　まとめとさらなる探究の可能性

以上の結果から，和・積だけでなく，逆数においても角は保存されることが推測される。すると，合成関数においても保存されることを考えれば，ａｚ＋ｂ，（ａｚ＋ｂ）／（ｃｚ＋ｄ）においても保存されることになる。さらに平面の変換群で角を保存するのは合同変換群（および拡大・縮小）くらいで，アフィン変換においてはもう保存されないのだから，角の保存は複素数の写像において一つの特徴的なことであることが分かる。すると，逆に，「角を保存する写像」というのは，どの程度一般的かなどに探究が進むのは一つの必然的な方向性と言えるだろう。

あるいは，ａｚ＋ｂという一次式で保存されることと，角は局所的な量であることと，局所的な性質を保存するような近似が微分であり，微分では一次式で近似することなどからの探究の方向性もあるかもしれない。

３．まとめと今後の課題

本稿では，ＧＣを使った複素数の探究とはどのようなものかを，ケーススタディを中心に行なった。詳細な分析にはより多くの事例が必要だが，本稿で取り上げた事例を元に，ＧＣを使った複素数の探究によって，どのような活動が可能になったかを簡単にまとめておく。また，今後の研究課題として残されていることをまとめておく。

３．１　作図ツールの導入によって可能になる活動

⑴　ｆ（ｚ）＝０となるようにｚを動かしてみる

これまで，ｆ（ｚ）＝０に対して，それを代数的に解くという方法が中心であった。それに対して，実際に様々なｚを取ることが可能になった。しかもｚの変化に対するｆ（ｚ）の変化の様子を観察して試行錯誤的に探索可能になった。そのため，「代入したら０になる値を見つける」というだけでなく，ｚの動きに対するｆ（ｚ）の変化の様子そのものに着目する契機を与えることになる。

⑵　軌跡の利用と曲線の変化の観察

ｚの動きに対するｆ（ｚ）の動きを観察する上では，必然的に軌跡を利用することになる。そして，そのような軌跡として登場する様々な曲線への入り口が提供されることになる。２．１．６でも見られるように，円のような単純な図形を２次式で写像する程度であっても，通常高校では扱わない曲線も現れてくる。それらを代数的にきちんと処理するところまで要求すると，かなり難しいことになるが，それらを観察したり，いくつかの性質に着目する範囲においては，大きな可能性を提供してくると言えるだろう。

⑶　不変量を調べる

ｚの動きに対するｆ（ｚ）の変化を調べるとき，ｚがある図形上を動く場合には，写像において，図形の性質がどう保存されているか，あるいは，平面の変換とみたときに，何を不変量とする変換なのか等を意識化することが，今までよりも自然な形で現れてくる。特に複素数の場合には，演算自身が変換（平行移動，拡大・縮小，回転移動）としての意味を持っているが，さらに，１次式による変換（ａｚ＋ｂ），１次変換（(ａｚ＋ｂ）／（ｃｚ＋ｄ)）などの特徴を考えたり，角の保存に注目して，等角写像あるいは共形変換（角が保存される変換）に考察を進めることが自然な流れであることが実感できると言えよう。

⑷　写像・変換に関する概念の導入

上記の事例のみでは少ないかもしれないが，作図ツールが写像や変換をより直接的に扱える環境を提供していることは確かである。そして，数式処理による考察の場合と比較して，変換，合成，逆，不変量などに関する考察をより容易に行なえると言えるだろう。現在のカリキュラムでは，写像や変換に関する概念は非常に少ないが，それらの概念の導入するために作図ツールを利用したり，あるいは，それらの概念を用いてさらなる数学的探究を進める可能性は本稿のケース

スタディで確認できたと言えるのではないだろうか。

3．2　今後の課題

⑴　発問方略

本稿では，教科書等で扱われている複素数の内容に関して，教科書などとは少し違った観点で課題を提示し，それに対する数学的探究の様子を素描した。このような問題を生成するための方略については，まだきちんとまとめるところまで至っていない。

⑵　他の環境における数学的探究との比較による特徴の明確化

本稿では，いくつかの事例を素描したが，同様の問題に関して，他の作図ツールあるいは他の環境ではどのような数学的探究が生じるのかは明らかにしていない。それらとの比較を行いながら，特徴を明確化する必要がある。

⑶　カリキュラムへの影響

前節でも，写像・変換概念との関わりについて言及したが，既存のカリキュラムの中でどのように利用する可能性があるか，また総合学習など教科書の制限を受けないカリキュラムの中で扱える可能性があるか等についての分析は明らかになっていない。今後の大きな課題の一つである。