イプシロン　1999. Vol. 41, 117-126

円の求積と等積変形

萬　伸介

宮城教育大学教育学部　数学教育講座

1. はじめに

平面内の図形（主に、円とその内部、多角形とその内部）を、その面積の値を変えることなく他の図形へと変えることは、小学校の図形学習においてよく行われる作業である。このような作業の多くは等積移動・等積変形と呼ばれるものである。そして、等積移動、特に、等積変形はある図形の求積の手段として用いられることが多い。小学校5年生に対して、「円が三角形に等積変形できる」ことが述べられている（[1]）。半径 r の円の円周の長さが $2\pi r$ であることを既知として、半径 r の "円" を、ある半径に沿って切り開き、底辺の長さが $2\pi r$ で、高さが r である "三角形" に等積変形できる（図. 1）。このことより、"円" の面積は、"三角形" の面積が $(2\pi r)\times r\div 2$ であることを用いて、πr^2 であると主張するのである。

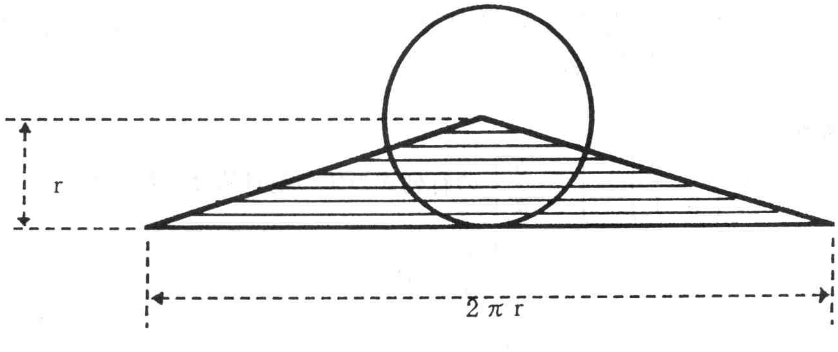

図. 1

しかしながら、「等積変形」はどの様なことから保証されるのかについて、著者は、教師向けの明確な記述を算数教育・数学教育の論文・書籍等で見かけることがなかった。更に、等積変形の明確な定義をも見かけることがなかった。等積移動・等積変形について「数学小辞典」（[4], p.407）は次のように記述している。

『面積を変えないで、形を変えること。例えば、…（中略）…　。等積移動というときには三角形なら他の形の三角形で面積が同じものに移すことを意味し、四角形を面積の等しい三角形に直す様な場合は等積変形という。』

また、「現代数学教育事典」（[3], p.533）は次のように記述している。

「… このように、平行線間の距離が等しいことを使って、面積の等しいちがった形の図形を作ることを等積変形という。」(「現代数学教育事典」の索引には等積移動の項目はない。最近は、等積移動を等積変形と一括しているようである。)

以上の記述から、等積移動・等積変換は二つの図形の面積の値が既知であるときに用いられているように思われる。一つの図形を他の図形に変えたとき、これら二つの図形の面積の値が等しいから等積移動・等積変形であるというならば、図形の求積の手段として等積移動・等積変換を用いることはできない。二つの図形の面積の値が既知であることを必要としないかたちでの等積移動・等積変形の定義が明確になされるならば、図形の求積の手段として用いることができる。等積移動・等積変形の定義を明確にする試みは別の機会に譲ることにする。

本論においては、等積変形をいくつかの等積写像の組と捉えることを紹介する。さらに、円とその内部から三角形とその内部への「等積変形」の具体例を紹介することを目的とする。これらの紹介の試みは、大学初年で講義される線形代数学・微分積分学の範囲にできるだけ限定して行うことにする。したがって、「面積」については、より専門的な立場からの議論には立ち入らないことにする。また、写像を具体的に記述するために、平面上に座標系を設定し、それに関する座標を用いる。平面上に座標系を設定せずに、定規・コンパスの使用によって移動・変形を行うことを否定するものではないことを明言しておく。本論では、三角形とその内部が表す図形を ”三角形” と表すことにする。三角形とは三つの線分からなる図形である ([2], p. 17) から、面積を議論するときには ”三角形” を考えなければならないのである。小・中学校の授業では、”三角形” を三角形と言うことを否定するものではない。同様に、円とその内部が表す図形を ”円” と表し、平行四辺形とその内部が表す図形を ”平行四辺形” と表す。

2. 等積写像

2行2列の実行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式の値の絶対値はそれぞれ

$$\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 1,$$

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = |ad - bc|$$

である。行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の二つの列ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で定まる平行四辺形とその内部が表す図形 ”平行四辺形” の面積の値が 1 であることと $\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 1$ であることが対応しているのである。これより、行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の二つの列ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ で定まる ”平行四辺形” の面積の値は

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = |ad - bc|$$

に等しいことがわかる。すなわち、2行2列の実行列の行列式の値の絶対値はその行列の二つの列ベクトルで定まる"平行四辺形"の面積の値に等しいのである。

ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ をそれぞれベクトル $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ に写像する平面 R^2 からそれ自身への線形写像を g とする。線形写像 g は任意の $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in R^2$ に対して

$$g\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 + bu_2 \\ cu_1 + du_2 \end{bmatrix}$$

と定義される写像である。そして、線形写像 g は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で定まる"平行四辺形 **A**"を $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ で定まる"平行四辺形 **B**"へ写像する。すなわち、

$$g(\text{"平行四辺形 }\mathbf{A}\text{"}) = \text{"平行四辺形 }\mathbf{B}\text{"}$$

である。したがって、先の議論より

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = \frac{Area(g(\text{"平行四辺形 }\mathbf{A}\text{"}))}{Area(\text{"平行四辺形 }\mathbf{A}\text{"})}$$

が成り立つ。

以上のことを基に、平面からそれ自身への等積写像の定義を与えることにしよう。先ず、平面 R^2 の領域 $\mathbf{D}$ から平面 R^2 への C^1-級写像 $f : \mathbf{D} \to R^2$ を考える。定義域（領域 $\mathbf{D}$ ）を含む R^2 には $u_1 - u_2$ 直交座標系が、値域を含む R^2 には $x_1 - x_2$ 直交座標系が設定されているとする。写像 f は $\mathbf{D}$ の任意の点 P を R^2 の点 $f(P) = (f^1(P), f^2(P))$ に写像する。ここに、f^1 と f^2 は共に $\mathbf{D}$ 上の C^1-級実数値関数である。関数 f^j （ $j = 1, 2$ ）の u_i に関する偏導関数を $\dfrac{\partial f^j}{\partial u_i}$ と表すことにすると、写像 f のヤコビ関数行列 J_f は2行2列の行列

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f^2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

である。したがって、写像 f の点 P におけるヤコビ行列 $J_f(P)$ は

$$J_f(P) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial u_1}(P) & \dfrac{\partial f^1}{\partial u_2}(P) \\[2ex] \dfrac{\partial f^2}{\partial u_1}(P) & \dfrac{\partial f^2}{\partial u_2}(P) \end{bmatrix}$$

である。$\mathbf{D}$ の任意の点 P に対して、ヤコビ行列 $J_f(P)$ によって線形写像 $F_{J_f(P)}: R^2 \to R^2$ が

$$F_{J_f(P)}\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = J_f(P)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in R^2$$

によって、一意に定まる。ここに、右辺の $J_f(P)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ は、2行2列の行列と2行1列の行列との積として得られる2行1列の行列を、R^2 の要素であるベクトルと同一視することを意味している。この $F_{J_f(P)}$ は、写像 f の点 P における微分写像とよばれるもので、df_P または $(f_*)_P$ と表現される場合もある。線形写像 $F_{J_f(P)}$ は写像 f の点 P における一次近似写像ともみなせる写像である。

定義：平面 R^2 の領域 $\mathbf{D}$ から平面 R^2 への C^1-級写像 f が等積写像であるとは、$\mathbf{D}$ の任意の点 P に対して、f の点 P におけるヤコビ行列 $J_f(P)$ の行列式の値の絶対値が1であるとき、すなわち

$$|\det J_f(P)| = 1 \qquad \forall P \in \mathbf{D}$$

が成り立つときをいう。

等積写像の定義には領域 $\mathbf{D}$ の面積の値が既知であることは要求されていないことを注意する。さて、C^1-級写像 $f: \mathbf{D} \to R^2$ を考える。R^2 の領域（あるいは、閉領域）$\mathbf{A}$ が $\mathbf{D}$ の部分集合であるとき、f の定義域を $\mathbf{A}$ に制限した写像 $f|_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \to R^2$ を f の $\mathbf{A}$ への制限写像という。もし $\mathbf{A}$ の面積の値 $Area(\mathbf{A})$ は、必要があれば広義積分を用いて、

$$Area(\mathbf{A}) = \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{1} du_1 du_2 = \iint_{\mathbf{A}} du_1 du_2$$

であるという立場に立つとする。ここに、$\mathbf{1}$ は $\mathbf{A}$ 上の定値関数でその値が1である関数を表す。すると、$f|_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ の面積の値は、重積分の変数変換の公式より、

$$Area(f|_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})) = \iint_{f|_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})} dx_1 dx_2 = \iint_{\mathbf{A}} |\det J_f|_{\mathbf{A}}|\, du_1 du_2$$

である。ここに、$\det J_f$ はヤコビ関数行列の行列式として与えられた $\mathbf{D}$ 上の連続関数であり、$|\det J_f|_{\mathbf{A}}|$ は $\det J_f$ の $\mathbf{A}$ への制限写像（制限関数）である。$\mathbf{D}$ の任意の点 P に対して、$|\det J_f(P)| = 1$ ならば $|\det J_f|_{\mathbf{A}}| = 1$ であるから

$$\begin{aligned} Area(f|_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})) &= \iint_{\mathbf{A}} |\det J_f|_{\mathbf{A}}|\, du_1 du_2 \\ &= \iint_{\mathbf{A}} du_1 du_2 \\ &= Area(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、$|\det J_f(P)| = 1$ （$\forall P \in \mathbf{D}$ ）ならば

$$Area(f|_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})) = Area(\mathbf{A})$$

となる。このことが等積写像の条件として $|\det J_f(P)| = 1$ （ $\forall P \in \mathbf{D}$ ）を設定している理由である。

3．等積写像の例

平面からそれ自身への「変換」、「等長変換」の定義を述べてから等積写像の例をいくつか紹介する。

定義：平面 R^2 から平面 R^2 への写像 $f : R^2 \to R^2$ に対して
(i) 写像 f が平面 R^2 の変換であるとは、f が全単射写像であるときをいう。このとき、変換 f の逆写像 f^{-1} が存在する。この f^{-1} を f の逆変換という。
(ii) 写像 f が平面 R^2 の等長写像であるとは、f が任意の 2 点の間の距離を保つ、すなわち、$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \quad \forall P, \forall Q \in R^2$ が成り立つときをいう。このとき、実は、f は平面 R^2 の変換となることが示されるので、等長写像 f は平面 R^2 の等長変換であるともいう。

例 1．平面の等長変換「恒等変換」、「線対称変換（鏡映）」、「回転」、「平行移動」、「並進鏡映」はすべて平面 R^2 の等積写像（等積変換）である。

例 2．定数 a, b, c, d, m, n $(|ad - bc| = 1)$ に対して、写像 $f : R^2 \to R^2$ を

$$f(u_1, u_2) = (au_1 + bu_2 + m, cu_1 + du_2 + n)$$

すなわち

$$\begin{cases} x_1 = au_1 + bu_2 + m \\ x_2 = cu_1 + du_2 + n \end{cases}$$

と定義する。この写像 f は C^1- 級写像であり、そのヤコビ関数行列 J_f は

$$J_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

である。よって、$|\det J_f(u_1, u_2)| = 1 \quad \forall (u_1, u_2) \in R^2$ であるから、f は平面 R^2 の等積写像である。また、写像 f が全単射であることが容易に示されるから、f は平面 R^2 の等積変換である。この写像 f は直線を直線に写像し、三角形を三角形に写像する。例えば、3 点 $O = (0, 0)$、$A = (1, 0)$、$B = (0, 1)$ で作られる三角形 $\triangle OAB$ は、この f によって、$O' = (m, n)$、$A' = (a + m, c + n)$、$B' = (b + m, d + n)$ で作られる三角形 $\triangle O'A'B'$ に写像される。このことより、写像 f は n 角形（[4], p.32 ）を n 角形に写像することがわかる。n 角形は単純な多角形である。f は等積アフィン変換と呼ばれるものである（[4], p.5, p.408）。等積移動（1 参照）も等積アフィン変換の一例である（著者による「等積移動・等積変形 – 等積写像の視点から –」で示されている）。

例 3．写像 $f : R^2 \to R^2$ を

$$f(u_1, u_2) = (2u_1 + (u_1)^2 + u_2 + 1, u_1 + (u_1)^2 + u_2)$$

と定義する。この写像 f は C^1- 級写像であり、そのヤコビ関数行列 J_f は

$$J_f = \begin{bmatrix} 2+2u_1 & 1 \\ 1+2u_1 & 1 \end{bmatrix}$$

である。よって、$\det J_f(u_1, u_2) = 1 \quad \forall(u_1, u_2) \in R^2$ であるから、f は平面 R^2 の等積写像である。また、写像 f が全単射であることが容易に示されるから、f は平面 R^2 の等積変換である。

4．等積変形の定義

等積変形についての「数学小事典」([4], p.408) の記述は

『面積を変えないで、図形の形を変えること。たとえば図（図. 2）のようにして、五角形はこれと面積の等しい四角形に直すことができる。五角形 $ABCDE$ において、AD に平行に E を通る直線をひき、CD の延長との交点を F とする。AF を結べば、四角形 $ABCF$ はもとの五角形と面積が等しい。』となっている。

このことより、図. 2において、"五角形 $ABCDE$" を "四角形 $ABCD$" と"三角形 $\triangle ADE$" の二つに分け、"三角形$\triangle ADE$" に等積移動 h（1、3 を参照）を施し、"四角形 $ABCD$" に恒等変換 id を施すことが等積変形の一例であることがわかる。

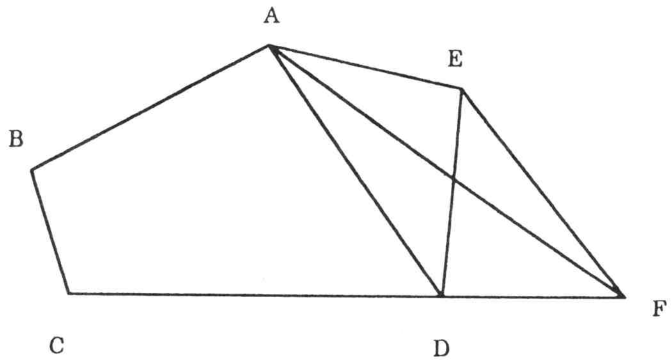

図. 2

このことを考慮して、等積変形の定義を以下のように与える。

平面 R^2 内の C^1-級曲線弧 C とは、C^1-級写像 $C:[0,1] \to R^2$ の像 $C([0,1])$ であるとする。そして、平面内の有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}}$ の境界 $\partial\overline{\mathbf{D}}$ は有限個の C^1-級曲線弧 からなるとする。すなわち、$\partial\overline{\mathbf{D}} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$ 。次に、有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}}$ を、いくつかの C^1-級曲線弧によって、有界閉領域 $\overline{\mathbf{D_1}}$、$\overline{\mathbf{D_2}}$、$\cdots$、$\overline{\mathbf{D_k}}$ に分割する。ただし、$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D_1}} \cup \overline{\mathbf{D_2}} \cup \cdots \cup \overline{\mathbf{D_k}}$ であり、各閉領域の内部である開領域 $\mathbf{D}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ に対して $\mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}_j = \emptyset \quad i \neq j$ が成り立っている。このとき、

定義： 有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}}$ の分割 $\{\overline{\mathbf{D_1}}, \cdots, \overline{\mathbf{D_k}}\}$ に関わる等積変形とは、次の四つの性質をみたす等積写像の組 $\{f_i|_{\overline{\mathbf{D}_i}} \ (i = 1, \cdots, k)\}$ をいう。

(1) 各 $f_i : U_i \to R^2$ は C^1-級等積写像で、各 U_i は $\overline{\mathbf{D}_i} \subset U_i$ をみたす開集合である。

(2) $\bigcup_{i=1}^{k} f_i|_{\overline{\mathbf{D}_i}}(\overline{\mathbf{D}_i})$ は有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}'}$である。

(3) $\{f_1|_{\overline{\mathbf{D}_1}}(\overline{\mathbf{D}_1}), \cdots, f_k|_{\overline{\mathbf{D}_k}}(\overline{\mathbf{D}_k})\}$ は有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}'}$を有限個の C^1-級曲線弧 によって分割して得られた閉領域の集合である。

(4) $f_i|_{\mathbf{D}_i}(\mathbf{D}_i) \cap f_j|_{\mathbf{D}_j}(\mathbf{D}_j) = \emptyset \quad (1 \leq i \neq j \leq k)$ が成り立つ。

この定義によると、上記の"五角形 $ABCDE$" に対して、等積写像の組

$$\{id|_{\text{"四角形 } ABCD\text{"}}, h|_{\text{"三角形}\triangle\, ADE\text{"}}\}$$

は "五角形 $ABCDE$" の分割 {"四角形 $ABCD$", "三角形△ ADE"} に関わる等積変形である。このように多角形を境界とする有界閉領域の "小多角形" 分割に対しては、具体的に等積写像を示すことが容易である。しかしながら、"円" 等のより一般的な有界閉領域およびその分割によって得られる小閉領域に対して、それらの境界（いくつかの曲線弧）まで込めて単射で C^1-級である写像を定めることは一般に難しい。そこで、C^1-級曲線弧は面積 0 の集合であることに注目して、有界閉領域および小閉領域の境界を強く考慮することなしに、等積変形の概念を少しゆるめて次のような概念を考える。

定義： 有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}}$ の分割 $\{\overline{\mathbf{D}_1}, \cdots, \overline{\mathbf{D}_k}\}$ に関わる広義の等積変形とは、次の四つの性質をみたす等積写像の組 $\{f_i|_{\mathbf{D}_i} \ (i = 1, \cdots, k)\}$ をいう。

(1) 各 $f_i : U_i \to R^2$ は C^1-級等積写像である。ここに、各 U_i は $\mathbf{D}_i \subset U_i$ をみたす開集合である。

(2) $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{f_i|_{\mathbf{D}_i}(\mathbf{D}_i)}$ は有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}'}$である。

(3) $\{\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)}, \cdots, \overline{f_k|_{\mathbf{D}_k}(\mathbf{D}_k)}\}$ は有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}'}$を有限個の C^1-級曲線弧 によって分割して得られた閉領域の集合である。

(4) $f_i|_{\mathbf{D}_i}(\mathbf{D}_i) \cap f_j|_{\mathbf{D}_j}(\mathbf{D}_j) = \emptyset \quad (1 \leq i \neq j \leq k)$ が成り立つ。

この広義の等積変形の具体例は円の求積に関連して次で与えられる。

5. 円の求積と等積変形

"円" に広義の等積変形を施して "三角形" に写像することを説明する。広義の等積変形の明確な表示を与えるが、逆三角関数（余弦関数 cos の逆関数 arccos については微分積分学関係書籍を参照）を用いなければならない。

平面 R^2 内の有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}}$、$\overline{\mathbf{D}'}$ を次のように定める。正定数 r に対して

$$\overline{\mathbf{D}} = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid (u_1)^2 + (u_2 - r)^2 \leq r^2\}$$

$$\overline{\mathbf{D}'} = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq x_2 \\ x_2 \leq \frac{1}{\pi}x_1 + r, \quad x_2 \leq -\frac{1}{\pi}x_1 + r \end{array} \right\}.$$

有界閉領域 $\overline{\mathbf{D}}$ は中心 $(0,1)$ 、半径 r の "円" であり、$\overline{\mathbf{D}'}$ は底辺の長さが $2\pi r$、高さが r の "三角形" である。今、C^1-級曲線弧

$$C = \{(u_1, u_2) \in \overline{\mathbf{D}} \mid u_1 = 0, \ 0 \leq u_2 \leq 2r\}$$

によって $\overline{\mathbf{D}}$ を二つの小有界閉領域

$$\overline{\mathbf{D}_1} = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid (u_1)^2 + (u_2 - r)^2 \le r^2,\ \ u_1 \le 0\}$$

$$\overline{\mathbf{D}_2} = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid (u_1)^2 + (u_2 - r)^2 \le r^2,\ \ u_1 \ge 0\}$$

に分割する。このとき、$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}_1} \cup \overline{\mathbf{D}_2}$ である。そして

$$\mathbf{D}_1 = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid (u_1)^2 + (u_2 - r)^2 < r^2,\ \ u_1 < 0\}$$

$$\mathbf{D}_2 = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid (u_1)^2 + (u_2 - r)^2 < r^2,\ \ u_1 > 0\}$$

であるから $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2 = \emptyset$ が成り立つ。二つの開集合

$$U_1 = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid u_1 < 0\}, \quad U_2 = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid u_1 > 0\}$$

をとると、$\mathbf{D}_1 \subset U_1$、$\mathbf{D}_2 \subset U_2$ である。写像 $f_1 : U_1 \longrightarrow R^2$ を

$$\begin{aligned} & f_1(u_1, u_2) \\ & \quad = \left(-\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}\ \arccos\left(\frac{r - u_2}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \right),\ r - \sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2} \right) \\ & \qquad \forall (u_1, u_2) \in U_1 \end{aligned}$$

と定義すると、f_1 は U_1 上 C^1-級であり、

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}\ \arccos\left(\dfrac{r - u_2}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \right) \\ x_2 = r - \sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2} \end{cases}$$

である。この写像 f_1 によって、各開曲線弧（曲線弧から端点を除いた集合）

$$\{(u_1, u_2) \in R^2 \mid (u_1)^2 + (u_2 - r)^2 = k^2,\ \ u_1 < 0\}$$

は開線分（線分から端点を除いた集合）

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 \mid -\pi k < x_1 < 0,\ \ x_2 = r - k\}$$

に写像される。ここに、k は $0 < k < r$ をみたす定数である。そして

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= -\frac{u_1}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \arccos\left(\frac{r - u_2}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \right) + \frac{r - u_2}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} &= -\frac{u_2 - r}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \arccos\left(\frac{r - u_2}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \right) + \frac{u_1}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} &= -\frac{u_1}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} &= -\frac{u_2 - r}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2 - r)^2}} \end{aligned}$$

であるから、U_1 上において $\det(J_{f_1})=1$ が成り立つ。同様にして、写像 $f_2 : U_2 \longrightarrow R^2$ を

$$\begin{aligned} & f_2(u_1,u_2) \\ &= \left(\sqrt{(u_1)^2+(u_2-r)^2}\arccos\left(\frac{r-u_2}{\sqrt{(u_1)^2+(u_2-r)^2}}\right),\ r-\sqrt{(u_1)^2+(u_2-r)^2}\right) \\ & \qquad \forall (u_1,u_2)\in U_2 \end{aligned}$$

と定義すると、写像 f_2 によって、各開曲線弧（曲線弧から端点を除いた集合）

$$\{(u_1,u_2)\in R^2 \mid (u_1)^2+(u_2-r)^2=k^2,\ 0<u_2\}$$

は開線分（線分から端点を除いた集合）

$$\{(x_1,x_2)\in R^2 \mid 0<x_1<\pi k,\ x_2=r-k\}$$

に写像される。ここに、k は $0<k<r$ をみたす定数である。そして、f_2 は U_2 上で、C^1-級であり、 $\det(J_{f_2})=1$ が成り立つ。ここで、逆余弦関数 arccos の可微分性を保証するためには考える領域から u_2 軸に対応する部分を除く必要があったことを注意しておく。更に、

$$\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)} = \left\{(x_1,x_2)\in R^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} -\pi r\le x_1\le 0 \\ 0\le x_2\le \frac{1}{\pi}x_1+r \end{array}\right\}$$

$$\overline{f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)} = \left\{(x_1,x_2)\in R^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} 0\le x_1\le \pi r \\ 0\le x_2\le -\frac{1}{\pi}x_1+r \end{array}\right\}$$

である。そして

$$\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)} \cup \overline{f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)} = \overline{\mathbf{D}'}$$

であり、$\{\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)},\ \overline{f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)}\}$ は $\overline{\mathbf{D}'}$ の C^1-級曲線弧 $\{(x_1,x_2)\in\overline{\mathbf{D}'} \mid x_1=0,\ 0\le x_2\le r\}$ によって二分された分割である。また、

$$f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)\cap f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)=\emptyset$$

$$Area(\overline{\mathbf{D}'}) = Area(\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)}) + Area(\overline{f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)}) < \infty$$

が成り立つ。従って、$\{f_1|_{\mathbf{D}_1}, f_2|_{\mathbf{D}_2}\}$ は”円” $\overline{\mathbf{D}}$ の分割 $\{\overline{\mathbf{D}_1},\overline{\mathbf{D}_2}\}$ に関わる広義の等積写像の組である。これより、”三角形” $\overline{\mathbf{D}'}$ に対して、$Area(\overline{\mathbf{D}'})=\pi r^2$ であり、

$$\begin{aligned} Area(\overline{\mathbf{D}'}) &= Area(\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)} \cup \overline{f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)}) \\ &= Area(\overline{f_1|_{\mathbf{D}_1}(\mathbf{D}_1)}) + Area(\overline{f_2|_{\mathbf{D}_2}(\mathbf{D}_2)}) \\ &= Area(\overline{\mathbf{D}_1}) + Area(\overline{\mathbf{D}_2}) \\ &= Area(\overline{\mathbf{D}_1}\cup\overline{\mathbf{D}_2}) \\ &= Area(\overline{\mathbf{D}_1\cup\mathbf{D}_2}) \\ &= Area(\overline{\mathbf{D}}) \end{aligned}$$

より $Area(\text{"円"}) = Area(\overline{\mathbf{D}}) = \pi r^2$ を得るのである。

6．おわりに

平面内の図形 $\overline{\mathbf{D}}$ に等積変形を施すことは、図形 $\overline{\mathbf{D}}$ をいくつかの小閉領域に分割し、各小閉領域（あるいは、それらの境界を除いた小領域）を定義域とする等積写像の組を考え、各小閉領域（あるいは、小領域）に各等積写像を施すことである。このとき、図形 $\overline{\mathbf{D}}$ の面積の値は、各小閉領域（あるいは、小領域）の各等積写像による像（あるいは、像とその像の境界）の和集合の面積の値に等しい。また、平面内の二つの図形 $\overline{\mathbf{D}}$、$\overline{\mathbf{D}'}$ に対して、同数のそれぞれの小閉領域への分割が存在して、図形 $\overline{\mathbf{D}}$ の各小閉領域（あるいは、小領域）から図形 $\overline{\mathbf{D}'}$ の小閉領域（あるいは、小領域）への等積写像の組が存在するならば、図形 $\overline{\mathbf{D}}$ と $\overline{\mathbf{D}'}$ の面積は等しい、すなわち、$Area(\overline{\mathbf{D}}) = Area(\overline{\mathbf{D}'})$ である。

平面内の図形の求積においては、面積の値が既知である図形との間に等積写像（あるいは、等積写像の組）が存在することを確認しなければならない。半径 r の円の円周の長さが $2\pi r$ であることを既知として、"円" の求積のために前述（5．円の求積と等積変形）の "三角形" を考えたとき、「なぜ二つの図形の面積の値が同じなのか？」という質問に対して丁寧に説明することは、小学校・中学校・高等学校いずれにおいても、大変な難しさがあると思われる。教師に数学の十分な準備を要求することになると思われる。簡単に「等積変形して」とは言えないと思うのである。したがって、小学校・中学校において "円" の求積の説明に際しては、円をいくつかの直径によっていくつかの扇形に分割し、それらを並べ替えて（より正確に述べると、それらに等長変換を施して、あるいは、等長変換からなる等積写像の組を考えて）長方形様あるいは三角形様の図形を得る方法を用いるのが適当なことであろうと思う。高等学校においては、"円" をいくつかの同心円によっていくつかの円環を作り、各円環の面積の値が二つの長方形の面積の値の間にあることを用いる方法も適当なことであろうと思う。

最近、「等積移動」という表現を見ることが少なくなり、「等積変形」と一括して表現しているようである。このように、微妙な表現が、特に、初等教育の中から消えて行くことについての種々の意見交換は必要であろう。

引用・参考文献

[1] 猪狩貞志、極限の考えにふれた円の求積、新しい算数の授業（明治図書）173、22-24、1999年

[2] 小平邦彦「幾何のおもしろさ」、岩波書店（1985年、1993年）

[3] 遠山　啓　編「現代数学教育事典」、明治図書（1965年、1975年）

[4] 矢野健太郎　編「数学小辞典」、共立出版（1968年、1990年）