イプシロン　1997. Vol. 39, 9-27

「数学さがし」の数学科授業の創造

数学授業研究会[注1)]

愛知教育大学　志水　廣

玉置　崇　森上　一美　鈴木　良隆　清水　文雄

井上　正英　中谷　眞人　斉藤　泰伸　鈴木　正則

1　はじめに

平成7年8月，自分の授業に対して不満や疑問，問題意識を抱いている愛知県の数学科教師が集まり，数学の授業論について語る会「数学授業研究会」を結成した。この会では，愛知教育大学の志水廣先生を助言者として，2ヶ月に1回程度，定例会を設けて，各自の授業実践を持ち寄り，議論を重ね，誰もがまねしたくなるような魅力ある数学科授業の創造を合い言葉に活動を進めている。

2　現場教師の悩み・ジレンマ

(1)　教える立場からの問題点

ア　求められる数学的な資質を考える

昨今の情報化社会の急速な発展には目を見張るものがあり，今後，数学教育が担っていく役割は一層重要になってくると私たちは考えている。そこで，求められる数学的な資質を洗い直し，迫りくる21世紀に生きる子供に身につけさせていかなくてはならない数学的な力を右のように考え，それらを養っていくような授業の創造が急務であると考えている。

* *情報を主体的に活用して問題を解決する能力*
* *多様な価値を認め、柔軟に捉える思考力*
* *数学的な見方・考え方を総合的に発揮する創造力*

求められる数学的な資質

イ　マンネリ化した指導スタイルと子供社会とのギャップ

現在の中学生は，テレビゲーム世代の申し子である。テレビゲーム世代に共通しているのが，人と関わりを持つことが苦手で，自分のスタイルで生活していきたいという価値観である。そんな世代の子供たちの意識は授業においてもみられる。例えば，表面上のおもしろさに左右され，根気強く追究するおもしろさを味わうことが少ないとか，独りよがりの学習態度である。

また，現在の中学生気質では，教え込みの授業で，行儀よく説明を聞いているというマンネリ化した授業スタイルは通用しない。そこで，興味・関心を喚起させるような手だてを講ずるわけであるが，その場限りの意欲化で終わってしまうことが多く，学びのエネルギーとしての関心・意欲の育成が図られずに終わってしまうことがある。

(2) 学ぶ立場からの問題点

ア 数学嫌い，数学離れ

昨年末，国立教育研究所は国際教育到達度評価学会が実施した第３回国際数学・理科教育調査を発表した。それによると日本の中学生の数学の成績は国際的に上位ではあるが，論理的思考に欠け，数学嫌いは国際平均値を上回っていることが報告された[注2)]。この傾向は日々教壇に立つ私たちが痛切に感じていることである。教壇から感じる生徒の数学に対する意識はおそよ次の３つであると思われる。

- 数学はおもしろくなく，むずかしいもの，苦手である。
- 計算ができればよい，問題を解く解き方を覚えればよいというやり方主義
- 数学を学ぶ必要感や現実性・有用性が感じられない，わからない。

このような生徒の数学に対する意識を改革していくような授業を進めていくのが数学教師の責務であると考えている。

イ 学習内容に新鮮さが感じられない

現在の中学生のほとんどが学習塾へ行っており，授業での学習内容は，塾ですでに学習済みのものであって，新鮮さに欠けるものとなってしまっていることがある。そのため，授業に対する関心が薄く，授業が新しい知識の発見の場とならずに，生徒にとって退屈な時間となってしまうことがあり，学習姿勢も独りよがりなものとなり級友との関わりの希薄な授業となることもある。

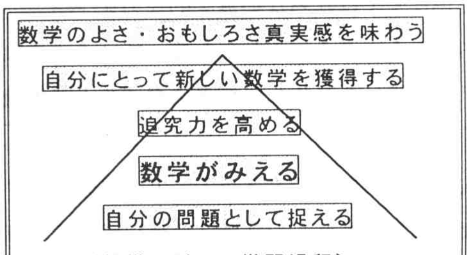
数学の授業で数学を学ぶ楽しさを味わわせるとともに追究するおもしろさを体験させるような授業の創造が必要である。そのような授業を通して，生徒は学習内容に真実感を感じ，数学を学ぶことの意味や意義を見い出すと考える。

3 「数学さがし」の授業

私たちは，上記の現場での悩みやジレンマを解決し，魅力ある数学授業創造のキーワードを「数学さがし」とした。

(1) 数学さがしとは？

私たちは，授業において生徒が主体的に数学の概念を獲得し，見方・考え方を養っていく一連の過程を大切にしていこうと考え，その学びの姿を「数学さがし」として捉えた。



＜数学さがしの学習過程＞

「数学さがし」の学習過程は，右の表のように，生徒が数学の問題を自分の問題としてとらえ，問題追究過程で数学の論理がみえ，自分にとっての新しい知識や数学的な見方やアイデア，考え方を自ら習得し，追究を深めていくという学びの姿である。このような学びを通して，生徒は，数学のおもしろさや価値を味わい，学習に真実感をもつことができると考えた。

「数学さがし」の学習過程では，生徒が問題解決過程で「数学がみえる」（生徒の主体的な活動

として考えると「数学をみる」が適切であるが）という場面が重要である。

「数学がみえる（みる)」という場合の「みる」という言葉には「観る」「覧る」という漢字が当てはまる。これは視覚的に見るに限らず，考察するという意味も含めて，私たちは「数学がみえる（みる)」という場面を授業過程に位置づけることにした。

(2) 「数学さがし」の授業の創造

私たちは「数学さがし」の授業の創造の手だてとして教材開発と学習展開を工夫する事にした。

ア 数学の価値を味わう教材の開発

＜教材開発の視点＞

① ***「味のある」*教材があったらいいな！**

＊数学的な発展性があり，数学的な追究力を高める教材を開発する。

→ **実践例１「正方形が増えると何が変わる」**

→ **実践例２「スペシャルトライアングルで何がみえる」**

② ***「手軽な」*教材があったらいいな！**

＊教科書の行間をうめ，数学的な論理を味わう展開をする。

→ **実践例３「直線を変えたら何がみえる」**

③ ***「わかる楽しい」*教材があったらいいな！**

＊生徒の概念形成を支援する教材・教具を開発する。

→ **実践例４「天秤で解こう」**

→ **「的あてゲームをしよう」**

→ **「自作三平方の定理説明器」**

イ 生徒の学ぶ価値と教材の価値との関連を図る・・・ストーリー性のある学習展開

私たちは数学の授業を通して生徒に，現実性，有用性，真実感，達成感，充実感，創造性を味わって欲しいと願う。そこで学習を進めるにあたって右の図のように数学の学習内容（教材の数学的価値）と生徒の学ぶ価値が共有するような授業展開を進めるようにした。その授業展開を私たちは，ストーリー性のある学習展開と呼び，生徒の学ぶ価値と学習内容をマトリックスにして吟味し，学習展開を構成することにした。

学ぶ価値の類型		ストーリー性のある授業展開	数学の教材の価値 学習内容
	• 現実性 • 有用性 • 真実感 • 達成感 • 充実感 • 創造性		

(3) 数学さがしの教材開発の一覧

学　年	教　材　名	単　元	開　発　者
1　年	的当てゲーム	正の数・負の数	鈴　木正
1　年	ゴルフのスコアー	正の数・負の数	鈴　木良
1　年	天秤で解こう	方程式	清　水
1　年	17段目の秘密	方程式	玉　置
1　年	マッチで追究しよう	文字の式	鈴　木正

1 年	正方形が増えると何が変わる	比 例	玉 置・鈴 木正
2 年	スペシャルトライアングル	図形の調べ方	森 上
2 年	直線を変えたら何がみえる？	図形の調べ方	玉 置
3 年	正方形の中の正方形	三平方の定理	森 上
3 年	自作三平方の定理説明器	三平方の定理	中 谷

4　数学さがしの授業の実際

実践例１「正方形が増えると何が変わる」（中学１年 比例）

(1)　教材開発の視点・・・*味のある教材の開発*

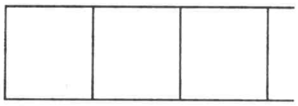
ア　関数的な見方を自ら追究させ，比例の姿をみつけさせたい！

中学校１年生で比例の指導を進めていく際の問題点として，関数的な見方が養われておらず，生徒が比例について安易な認識をしているということがある。例えば，小学校では，比例する数量が離散量であるか連続量であるかを子供があまり意識をしないで，グラフ表示では点と点を直線で結んでしまえばいい，原点を通ればいいといった安易な理解をしていることがある。

また，比例する数量のみを最初から与えられて考察していることがあり，いろいろな変化の一つとして比例の変化をとらえることができていない場合があり，共に増加すれば比例しているといった誤った認識をしている生徒がいるのが現状である。関数としての捉え方についても「何が変われば何が変わる。」から「何を変えれば何が変わる。」という能動的な関数の捉えができていないことがある。 このような理由から，比例の学習を進めていく上で，生徒が主体的に関数の見方を広げ，深めていくような教材を開発する必要を感じ，教材「正方形が増えると何が変わる」を開発した。

イ 「正方形が増えると何が変わる」の構想

教材「正方形が増えると何が変わる」は，右図のように正方形を横に並べていくと何が変化していくかを考察するのである。一見簡単そうな変化だと思れるが，正方形の個数の変化に伴っていろいろな数量が変化し，その変化は比例一次関数，二次関数，無理関数というように様々な変化が存在する。生徒は，一見簡単そうな問題に多様な関数が存在し，その中には現在の知識で表現できないものがあることに驚きを持つであろう。



1辺が２cmの正方形を並べていく。

変化する数量について，面積の変化の表現を生徒に考えさせる。面積の変化は，正方形の個数を x とし面積を y として，式では $y=4x$ と表現できるが，その変化の様子をグラフで表現させる過程で，x が離散量であることを意識付けるようにする。次に，横の長さを x として連続量として扱い，面積の変化が $y=2x$ と式で表現でき，同じ面積を表す場合でも対応する数量の捉え方を変えることで式やグラフが変わることを意識付けさせて関数の見方を深めるようにする。

＜正方形が増えると何が変わるの指導計画抜粋＞

1 時	**①　正方形が増えるとそれにともなって変化する数量を見つけ，自分が見つけた変化する数量がどのように変化していくか，変化の様子の表現について考える。**（個人追究）
2 時	**①　変化の様子をうまく表現する方法について話し合う。** 表やグラフ，文字の式など数量的に変化の様子を表現する方法に気づかせる。 **②　変化の様子を表現する。**（個人追究） ・各自で変化を表現する数量を決めて，表やグラフ，文字の式など，各自の方法で変化を表現する。　**→数学レポートにする。**
3 時	**①　正方形が増えるとそれにともなって変化する数量について，面積を共通追究課題としてその変化の様子を表，グラフ，式で表現し発表する。** 折れ線グラフ等で表現している生徒に点を結んでいいのか揺さぶる。また，原点を結んでいいのか揺さぶる。 **②　折れ線グラフについて吟味する。** **③　関数の意味を理解する。** **④　面積の変化を表す式　$y = 4x$ の比例定数4の意味について考える。**
4 時	**①　横の長さを x cmとして，面積の変化の様子を表やグラフ，文字の式で表現する。** **x が変わると面積の変化を表す式やグラフが変わることを意識づける。** **②　比例の意味を理解する。** **③　自分の追究している数量の変化は比例なのかを吟味する。→数学レポート**（個人追究）

ウ　「正方形が増えると何が変わる」での数学さがし

①　多様な変化を発見する

生徒は正方形の個数の変化に伴い，周りの長さや面積，横の長さ等の変化に気づくと思われる。生徒は，意識の中に正方形の個数が増えるのだから，伴って変わる数量も増えるものだという意識があるに違いない。そこで「減少するものはないかな。」と投げかけることにより，対角線と横の辺がつくる角の大きさが減少することに気づかるようにする。この気づきを広げて，対角線の本数や対角線の長さ，格子点の個数などの変化に着目させ，正方形が増えることに伴っていろいろな数量が規則的に変化することを実感させ，その変化を数学的に表現させて関数の見方を広げるようにする。

②　生徒の比例の思いこみを覆す

変化の表現方法として表や式，グラフがあることに気づかせ，変化する数量の中から自分が興味を持った数量の変化を追究課題として各自に実際に表現させてみる。また，共通追究課題として面積の変化を全員に表，式，グラフで表現させてみる。そうすると点と点を直線で結んでいいのか，原点を結んでいいのか，といった疑問がでてくるであろう。そこで，変化する数量が離散量であることに気づかせ，生徒が今まで持っている点と点は直線で結んで原点を通るという思いこみを覆させ，関数の見方を深めるようにする。

③　変化を数学的に表現する

比例の意味や性質，特徴を学習した後に，再度自分が追究している数量の変化が比例なのかを考察させてみる。ここでは実際に調べてデータをとり，変化の様子を表，式，グラフから分析する活動をすすめ，自分にとって，変化の新しい表現と出会い，それを考察するようにする。

(2)　生徒の学ぶ価値と教材の価値との関わり

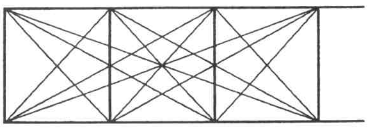
学ぶ価値類型	教材（正方形が増える何が変わる）の価値
現 実 性 有 用 性 真 実 感 達 成 感 充 実 感 創 造 性	• 身近な事例の中に多様な変化が存在することに気づく。 • 文字の式は変化の表現を表すことができる。 • 自分が見い出した変化を式や表，グラフから変化の様子を表現することができる。 • 比例に限らず一次関数や二次関数などの変化をも追究することができる。

(3)　「正方形が増えると何が変わる」の授業の実際

ア　正方形が増えると数学がいろいろみえる！

生徒は方眼ノートを利用するなどして正方形が増えると何が変わるかを考えた。ほとんどの生徒が横の辺の長さや面積，周りの長さの変化に気づくことができた。しかし，それ以外の変化になかなか目が向かない様子であったので，「正方形が変わると減少するものがあるね。」と教師が切り出すと，そんなはずはないと考えはじめ，２名の生徒が対角線と横の辺がつくる角の大きさが減少することに気づくことができた。そこで，この気づきを発表させ，変化する数量を多様な視点で捉えさせるようにした。その結果，下表のように生徒は正方形の個数の変化に伴う多様な変化する数量を発見した。

<table>
<tr><th>増　加　す　る　数　量</th><th>減少する数量</th><th>一定の数量</th></tr>
<tr><td rowspan="2">• 面積
• 横の辺の長さ
• 周りの長さ
• 直角になる内角の数
• 正方形の辺の数
• 対角線の本数（格子点を結んだ線も含めて）
• 対角線の長さ
• 対角線と縦の辺とがつくる角の大きさ
• 格子点の数
• 格子点を結んだ線がつくる三角形の数
• 格子点が結んだ線がつくる正方形の数
（内部にできる正方形）</td><td>• 対角線と横の辺がつくる角の大きさ</td><td>• 高さ
• 格子点を結んだ三角形の面積
（等積変形）</td></tr>
<tr><td colspan="2"><減少してから一定となる数量>
• 対称の軸
正方形が１個の場合
対称の軸は４
正方形が２個以上の場合
対称の軸は２</td></tr>
</table>



生徒は正方形の個数の変化から対角線の長さや本数の変化を見つけたり，図形的に変化を捉え，格子点を結んでできる三角形や正方形の個数の変化や対称の軸の変化，等積変形までと幅広い視点で変化を捉えたりすることができ，数学をみつけることができた。

イ　比例の思いこみをつぶす！

一人一人に自分が興味を持った数量の変化の表現について考えさせた。言葉では「どんどん増える」としか表現できないが，うまく表現する方法はないかという教師の問いかけに「グラフを

使えばいい。」「グラフにするのに表で表現する。」「言葉の式や文字の式で表現する。」という表現方法に気づくことができ，変化を数量で表現する活動を進めた。数学さがしの活動である。

グラフの表現では，棒グラフにする生徒と折れ線グラフにする生徒とに同程度分かれた。折れ線グラフにした生徒は全員が横軸に正方形の個数をとり，プロットを直線で結んでいた。また，折れ線グラフにした生徒のほとんどが原点を結んでいる。例えば，格子点の個数（y）の変化は正方形の個数をxとすると$y=2\chi+2$であり，原点を通らないが，生徒は原点を結び折れ線にして表現していた。小学校以来のグラフに対する思いこみである。

そんな中で，折れ線グラフで表していたM子一人が，原点を結んでいなかった。その理由を聞くと，「正方形の個数が０のときはないから。」と答えた。そこで，M子のこの気づきを意図的に発表させて，変化する数量の変域について考えさせるようにした。

＜第３時の授業記録抜粋＞　Ｓ：生徒の反応　Ｔ：教師の活動，支援

Ｔ　正方形の個数が増えると面積がどのように変化するかを話し合いましょう。
・・・以下の発表をさせた。（正方形の個数をｘ個とした。）

＜言葉の式＞　面積＝４（１つ分の正方形の面積）×個数
＜文字の式＞　$y=4x$
＜表＞

個数	1	2	3	4・・
面積	4	8	12	16・・

＜グラフ＞　折れ線グラフ（原点を結んでいるもの）　棒グラフ

M子　言葉の式や文字の式，表はいいと思うのですが，グラフは正方形の個数が０の時はないと思うから０を結んではいけないと思います。
Ｓ　それはそうだ。じゃあ，１から始めればいいんだ。
Ｔ　それだけでいいのですか？　棒グラフにした人はどうして棒グラフにしたのかな？
Ｓ　最初，表を考えてその通りに棒グラフした。
Ｔ　折れ線グラフにした人はどうして折れ線グラフにしたのかな？
Ｓ　変化の様子が折れ線の方がわかりやすいと思ったし，小学校の時に点を直線で結べばいいと聞いたから。
M子　個数が０の時がないと考えると，個数が1.5の時もないんだから，１と２の間を結んではいけないと思います。
Ｓ　そうか，じゃあ，どんなグラフになるんだ？
Ｓ　点だけ取っておくしかない。変なグラフ！これグラフっていうの？
Ｓ　棒グラフなら問題はないんだ。
Ｔ　じゃあ，xのとる数はどんな数なのですか？
Ｓ　整数。
M子　整数は０と負の数が入るから自然数だと思います。

＜第４時の授業記録抜粋＞

Ｔ　今度は横の長さをx㎝としたら，面積を表す式はどうなるでしょう。
Ｓ　$y=2x$となる。
Ｓ　前は$y=4x$だったのに，今度は$y=2x$と式が違ってしまう。
Ｔ　グラフはどうなるでしょう。
Ｓ　今度は横の長さには1.5㎝があるんだから，棒グラフでなくて，折れ線グラフでいい。
Ｔ　点と点を直線で結んでいいのですか？
M子　いいと思います。xの数は小数も含めることができるからです。
Ｔ　だけど，直線になるとは限らないのではないですか？
Ｓ　小数をどんどん細かくとっていけば直線になると思う。

数の変化の範囲にこだわったM子の気づきが，安易に折れ線グラフにして変化を表現していた生徒に変化の連続性について目を向けさせることになった。彼らにしてみれば，点だけのグラフという新しい数学を見い出したのである。 次に，χを連続量として考えさせることで面積を表すグラフが直線になることの意味を生徒は見い出すことができた。

ウ　これ比例じゃないぞ！・・・新たな数学さがしの旅

比例についての学習が一通り終了した後に，正方形が増えると伴って変わる数量について横の長さや面積以外に比例の関係があるかどうかを調べる追究学習をすすめた。その結果，下の資料のように対角線の本数や対角線の長さ等の変化を式や表などにして生徒は積極的に考察した。また，正方形が2個並んだときの格子点を結んでできる三角形を図形の対称性を利用してうまく調べ，66個もあることを導いた生徒もいる。これらの事例は比例の関係で表現できないないことに生徒は気づいたが，どのような変化として表現していいのかわからずじまいではある。しかし，これから先きっと彼らが数学さがしの旅を続けるときに出会う数学なのである。

調べる数量　対角線の本数

変化の様子

正方形の数(こ)	1	2	3	4	5	6	7	8
対角線の本数(本)	2	6	12	20	30	42	56	72

(せんぶあわせて)

正方形の数をxとすると

$\boxed{(x+1)\times x}$で対角線の本数がでると思う

横でまん中に体線をひくと上下対称になって、1つのこうし点からでてくる対角線は正方形の数だけでて、こうしてんは正方形の数よりも、1つ多い。

調べる数量　対角線の長さ

変化の様子

正方形の数	たいかくせんの長さ
1	2.8
2	4.4
3	6.2
4	8.1
5	9.9
6	11.9

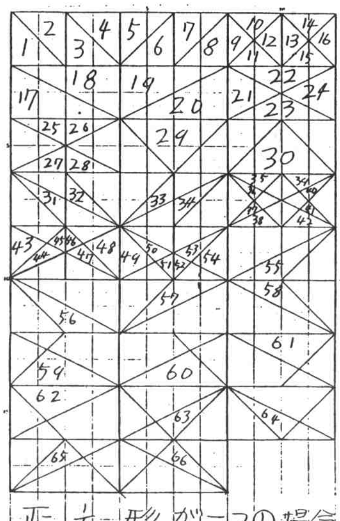
$$\begin{array}{r} 4.4 \\ -\,2.8 \\ \hline 1.6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6.2 \\ -\,4.4 \\ \hline 1.8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9.9 \\ -\,8.1 \\ \hline 1. \end{array}$$

0.8

$$\begin{array}{r} 11.9 \\ -\,9.9 \\ \hline 2.0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8.1 \\ -\,6.2 \\ \hline 1.9 \end{array}$$

ちがい	1	2	3	4	5	6
	0.8	1.6	1.8	1.9	1.8	2.0

おれ線グラフにするとほぼ、まっすぐになるふえる長さはちがうが、



正方形が二つの場合
格子点をむすんでできる
三角形の数　66個

＜参考資料＞「正方形が増えると何が変わる」での生徒の追究例

(4)　**実践を振り返って**

「正方形が増えると何が変わる」の実践を通して生徒は，身近な事象に対して多様な数量の変化をみることができ，関数の楽しさを味わい，生徒の追究意欲は大いに高まった。前述資料の格子点を結んだ三角形を調べた生徒は成績が下位の数学嫌いの生徒である。彼が，この学習を通して数学に関心を持ち，ねばり強く追究してくれたことをうれしく感じている。

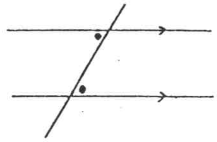
実践例２　「スペシャルトライアングルで何がみえる？」（中学２年平行線と角）

(1)　教材開発の視点……*味のある教材の開発*

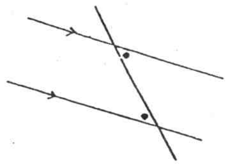
ア　「スペシャルトライアングルで何がみえる？」の構想

①　錯角がわからないと，平行線が使えない

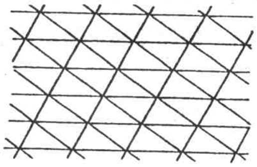
図ア



図イ



スペシャルトライアングル



２年「図形の調べ方」では，対頂角，同位角，錯角の学習から始める。この中で錯角は，生徒にとってなかなか理解しにくいものである。錯角を図アで理解しても，図イになるとわからなくなることが多い。そこで，平行線の性質や平行線になるための条件を学習した後，対頂角，同位角，錯角に慣れるための練習が必要である。そのためにまず，練習プリントとしてのスペシャルトライアングルが役に立つ。「プリントに印がある角と同じ大きさの角には，同じ印をつけよう」と問いかけ，練習させる。スペシャルトライアングルを完成させることで，錯角，同位角，対頂角の習熟ができる。

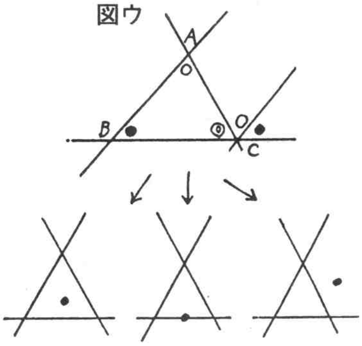
②「だから平行線をひくのか」と納得する

図形の論証では補助線をひいて推論を進めていくことが多い。しかし，「この補助線をひくことをひらめかないよ。」という疑問が生徒には残る。そこで，数学的な考え方を育てていくためには，考える方向性や目的をしっかりと定めさせていく必要がある。２年「図形の調べ方」の求角問題では，バラバラに離れている角を１つの点や１つの三角形に集めていくことが，考える方向性や目的を定めさせることにつながる。小学校での三角形の紙を折ったり，切ったりして１点に集めることと同じである。

中学校では，「この世の中にあるすべての三角形で，すべての３つの内角の和が180゜になる」ことを考える道具として平行線を意識させる。そのときに，①で述べたスペシャルトライアングルが大きな働きをする。同じ大きさの角には，同じ印がついている。このできあがったスペシャルトライアングルを見て，「What from it ?／それから何がわかる？」と問いかけて，３種類の角が１つの点に集まっていることに気付かせていく。

③　「What if not ?」の精神で発展形をつくろう。

図ウ



「What if not ?／もし～でなかったら？」の精神で発展的に考えさせていけば，いろいろな場合でも成り立つのではないか，という問いが発生する。

図ウのように三角形ＡＢＣの点Ｃに角を集めさせてから「もし点Ｃでなかったら？」と問いかけて，点Ａや点Ｂ，そして内部，辺上，外部へと発展させる。

イ 「スペシャルトライアングルで何がみえる？」での数学さがし

① 「数学の目」でみて，考える

中学２年の単元「図形の調べ方」の求角問題では，「角を集める」という数学的な考え方を身に付けることが重要である。そして「角を集める」道具の代表として，平行線が位置付けられる。このスペシャルトライアングルは「平行線が角を集める道具」であることを強調できる教材である。

② 問いの発生，問いの連続性

スペシャルトライアングルのあちらこちらに，三角形の３つの角が一点に集まっている。これが仕掛けとなり，「もっといろいろな場所に角を集めるられるぞ」という問いを発生させることができる。

③ さがし求めたことのまとめ上げ

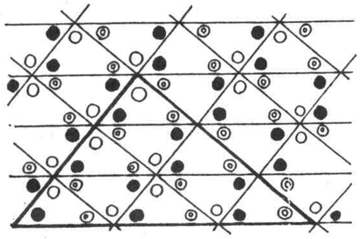
「What from it ?」の精神で三角形の場合は３つの直線で囲まれた図形なので，３つの平行線をひけばよいことをまとめさせる。

(2) 生徒の学ぶ価値と教材の価値との関わり

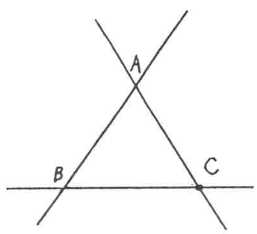
学ぶ価値類型	教材（スペシャルトライアングル）の価値
現　実　性	• どんな三角形でも，成り立つことがわかる。
有　用　性	• 平行線は角を集める道具として便利なことがわかる。
真　実　感	• 自分で角を集めて，三角形の３つの内角の和が180°になることを証明できる。
達　成　感	
充　実　感	• 自分で平行線をひき，角を集めることができる。
創　造　性	• いろいろな点に角を集めることができ，すべての場合を１つにまとめると，三角形は３つの平行線をひけばよいことがわかる。

(3) 「スペシャルトライアングルで何がみえる」の授業の実際

前の時間に，このプリントで対頂角，同位角，錯角の練習をしましたね。今日はこのプリントを使って，知ってるつもりの三角形の，まだ知らないことを学んでいきましょう。右の図を三角形の知らないことを探すことができるので，スペシャルトライアングルといいます。３つの角○，●，◎にはどんな関係があるようにみえますか？



【平行線は角を集める道具だと知る場面】



S　１つの点に２つずつ集まって360°になっている。

S　○，●，◎が１つずつ集まって１８０°になっている。

T　太線の三角形の３つの内角の和は何度ですか？

S　180°

T　このスペシャルトライアングルをカンニングして，右図の

三角形の点Cに３つの内角を集めてみよう。必要な直線だけをひくんだよ。

S　点Cを通る平行線をひけばいいんだ。そうすると３つの角が集まった。

T　この三角形の内角の和は何度になる？

S　やっぱり180°だよ。

T　小学校では，三角形の紙を折ったり，破ったりして角を集めました。黒板やノートに書いた三角形のように，折ったり，破ったりできない三角形の３つの内角はどうやって角を集めればよいかな？

S　平行線で角を集めればいいよ。

【What if not？の精神で問いが発生する場面】

T　Waht if not？の精神で考えてみよう。もし点Cでなかったら３つの角は集まるかな？

S　他の点Aや点Bでもいいんじゃないかなあ。

T　では，三角形ＡＢＣを書き，点Aに角を集めてみよう。スペシャルトライアングルをやっぱりカンニングしていいよ。

・・・・・・・・・・・（略）・・・・・・・・・・・

T　今，どんな点に角を集めた？

S　頂点だよ。

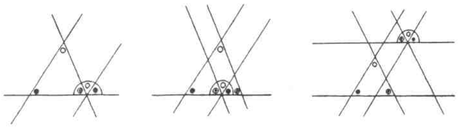
T　では頂点でなかったら，角は集まらないかな？

S　辺の上でもいいよ。スペシャルトライアングルを見れば集まっている。

T　では，集めてみよう。

【What from it？の精神で，学んで得たことをまとめる場面】

T　三角形の辺の平行線をひいて，いろいろな点に角を集めることができました。平行線の本数は，一見すると１本のとき，２本のとき，３本のときの３種類があるけれど，これを１つにまとめられないかな？



S　１本，２本のときは重なってると見たら，みんな３本ひいたことになるんじゃないかな。

T　そうだね。三角形のときは平行線を３本ひけばよさそうだね。What from it？このことから何がわかるかな？

S　ひょっとしたら四角形は，平行線を４本引けばいいんじゃない。

(4)　実践を振り返って

この授業を通して生徒から以下のような感想が得られた。

- 平行線が角を集める道具であることがよくわかった。
- どこへでも角を集められることには驚いた。
- ３つの角を集めるのだから，３本の直線があればよいことがわかった。結局，３つの直線に囲まれた図形だからなんだね。
- スペシャルトライアングルは，知ってたつもりの三角形の秘密を発見するすごいものだ。
- いろいろ自分で考えられておもしろかった。

スペシャルトライアングルは生徒とって数学をみる眼鏡となったことがわかる。

実践例３「直線を変えたら何が見える」（中学２年 直線がつくる角）

⑴ 教材開発の視点・・・*気軽な教材の開発*

ア　ストーリー性のある学習展開を図る

ストーリー性のある学習展開ができるように，そして，教科書をちょっと工夫して誰もが取り組め，問いの発生，問いの連続性が生まれる教材開発をめざした。

ストーリー性のある学習展開（△発問）	取り組み，問いの発生・連続性
△　直線を２本引いてみましょう。	•直線を２本引く（位置関係分類） **＜だれでも取り組める＞** •交わっている？平行？**＜問いの発生＞**
△　直線が交わっているときに何か気づくことはないですか？	•角が４つある。隣り合う角の和は180° •向かい合う角は等しい。 **＜だれでも取り組める，問いの発生＞**
△　今度はどのような場面を考えようか。	•直線を増やしてみよう。 **＜問いの連続性＞**
△　直線を３本引いてみよう。 △　今度は何種類の場合になりますか。 △　それぞれの場合で気づくことは何ですか？ （以下　略）	•直線を３本引く（位置関係分類） **＜だれでも取り組める＞** •２直線が平行の場合 同位角や錯角が等しいことなど **＜だれでも取り組める，問いの発生＞**

イ　「直線を変えたら何がみえる」での数学さがし

①　「直線を２本引く」作業を出発点とした「数学さがし」

直線を２本引くことなら，だれでもできる。ところが，たった２本の直線をかく作業だけからでも数学は始まる。生徒から「直線って交わっているの？いないの？」といった問いが出てくる。中には位置関係を意識することなく，なにげなく直線を引き始める生徒もいるだろう。引き始めて「あれ，どこまで伸ばすんだろう？」「これって交わっているの？」といった問いが発生する。こうした自分の問いとしてとらえさせる過程は「数学さがし」の大切な一場面である。

②　「直線の位置関係」からの「数学さがし」

交わる２直線を観察して気づくことを問えば，向かい合う角が等しいことにだれもが気づく。さらに直線をもう１本増やした３直線の場合は，交点がない場合から交点が３つある場合の４つの場面に分類でき，それぞれの場面でさまざまなことに気づく。

自分自身による作業から生まれた図を使って数理を発見する授業の連続によって，生徒は数学のおもしろさや価値を味わい，数学がみえたという実感を味わうと考えた。

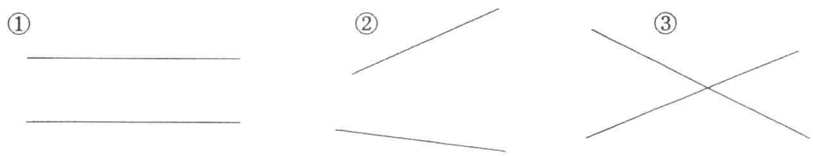
(2) 生徒の学ぶ価値と教材の価値との関わり

学ぶ価値類型	教材（直線を変えたら何が見える）の価値
現　実　性	
有　用　性	• 対頂角の性質，平行線と角の関係がわかると便利だ。
真　実　性	• 確かに平行線に１直線が交わると同位角，錯角が等しい。
達　成　性	• 気づいたことが正しいことを論理的に説明できた。
充　実　性	• 直線の位置関係を分類し，あらゆる場合を考えることができた。
創　造　性	• 直線が増えるとおもしろい関係が見つかってくる。

(3) 「直線を変えたら何がみえる」の授業の実際

ア 「対頂角は等しい」を発見し証明するまでの学習展開

T　　ノートに直線を２本かきましょう。



大きく上記のような３種類に分かれた。 ②と③は，直線の定義より，同じことであることを確認した。①と③の２種類にまとめた。

T　　①と③の違いを表現しよう。

S　　①は平行，③は交わっている。③は交点があるけど，①はない。

交点０　　　　　　交点１

T　　交点がある図で考えてみよう。このような交点が１つある図を３つ書いてみよう。そして，自分の書いた３つの図を見て，どれにも共通して言えることをなんでもいいから書いてみよう。

【生徒の反応例】

• 角が４つある。　• ａ＋ｂは180度である。

• ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄは360度である。　• ａとｃは等しい。　• ｂとｄは等しい。

T　　ａ＋ｂは180度，ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄは360度は説明の出発点としよう。

ａとｃが等しいことを説明してみよう。

直線は180度であることを利用して，ｂが共通していることから証明させる。

対頂角の性質としてまとめるるようにする。

イ 平行線と角の性質に気づかせるまでの学習展開

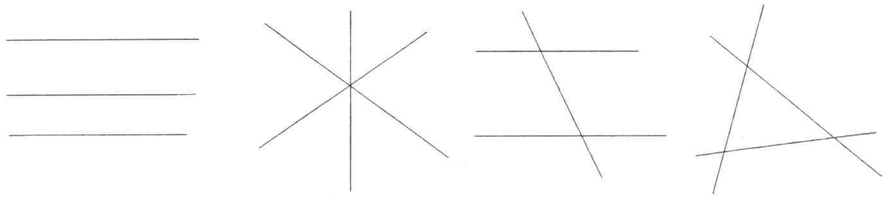
T　　先生は今度どんなことをみんなにやってもらうと思う？

S　　直線を３本かく。

T　　交点の数に注意して，直線を３本かいてみよう。

志水　廣

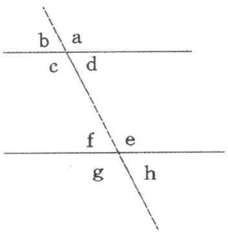
交点０　　交点１　　交点２　　交点３



T　交点１の場合を考えよう。何か気づくことはないかな？

S　対頂角は等しい。

T　交点２の場合を考えよう。何か気づくことはないかな？



【生徒の反応例】

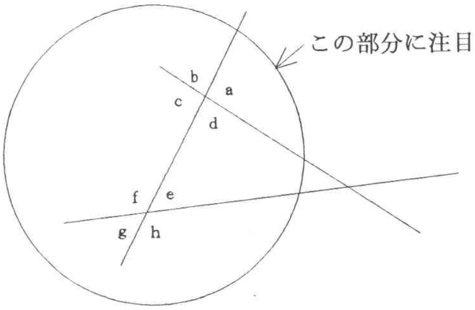
- ∠ａ＝∠ｃ　など対頂角の性質
- ∠ａ＝∠ｅ　など同位角にかかわるもの
- ∠ｃ＝∠ｅ　など錯角にかかわるもの

T　気づいたことを明らかにしてみよう。

【生徒の主な反応例】

- 交わる角の大きさが違うと，２直線の距離をだんだん近づけていくと２直線は平行でなくなる。
- 対頂角の性質と同位角が等しいことから錯角が等しいことを明らかにした。

T　交点３の場合について考えます。

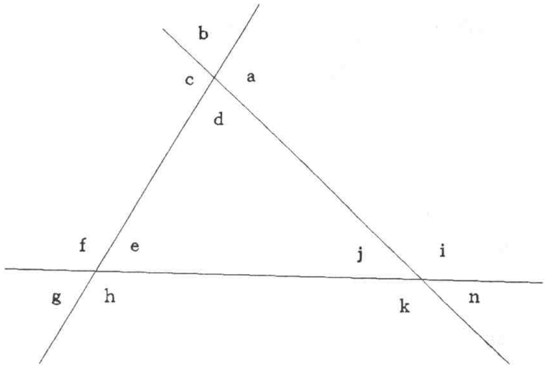


【生徒の反応】

- 同位角，錯角は等しくならない。
- 特に何も関係はない。

この図を使って，平行線になる条件を押さえる。

T　交点３の場合について気づいたことをあげてみよう。



【生徒の主な反応例】

- ∠d＋∠e＋∠j＝180°
- ∠cと∠eは錯角。
- どの同位角，錯角も等しくない。
- ∠aと∠eは同位角。
- 対頂角は等しい。
- ∠d＋∠e＝∠i
- ∠c＋∠h＋∠i＝360°

T　気づいたことを数学的に明らかにしていこう。その前にすでにわかっていることをはっきりさせておこう。

どの同位角，錯角も等しくないことなどを確認する。課題を∠d＋∠e＋∠j＝180°であることを論理的に述べることに絞り込むようにする。

小学校で三角形の角は180°となることは習ったという意見があり，図の中の三角形を囲みながら，この学習が始まってから学習したことだけを使って明らかにしてみることを確認した。

（以下，略）

⑷　実践を振り返って

この実践に該当する教科書（啓林館p90～p91）の展開と比較してみると，ここで提案した学習の流れは，いわば教科書の行間を埋める実践であると言える。例えば，教科書の図を見ると，最初に２直線が交わっている図があり，次に平行な２直線に１直線が交わっている図が登場している。なぜ次の図が登場しているかという理由は当然書かれていない。

したがって，授業においては最初の図から次の図が出てくる論理性を大切にすべきである。場面ごとの理解ができても，それぞれの場面が出てくる必然性がわからないと，生徒は「先生に数学をやらされている」という思いが先立つのではないだろうか。そういった状況からは「数学さがし」の状況は生まれてこない。

「２直線を引く，３直線を引く」という単純な作業から，さまざまな気づきが出されることやまた，その気づきが新たな問いが生むことがよくわかった。「数学さがし」の数学科授業は，今回の実践のように教科書を再度見直し，教科書の「問い」と「問い」との連続性を生むように，作業や発問によって再構成することで創造できる手応えを感じた。このような視点で開発した教材は，教科書に基づいているため，手軽に実践できるよさもある。

志水　廣

実践例４　「天秤で解こう」（中学１年 方程式）

(1)　教材開発の視点・・・*「わかる楽しい」教材の開発*

ア　これまでの方程式学習の問題点

これまで方程式の解き方の学習では，方程式を解くことばかりに力を入れて指導してきた。つまり，『等式の性質を使うとうまく方程式が解けますよ。「$x+6=9$」だったら，両辺から６を引けば$x=3$とわかります。もっと複雑な式でも，こうやればできますよ。』といった調子である。これでは確かに方程式は解けるようになるだろうが，等式の性質を利用する必要感やよさ・方程式が解けた時の達成感は得られない。

イ　「天秤で解こう」の展開構想

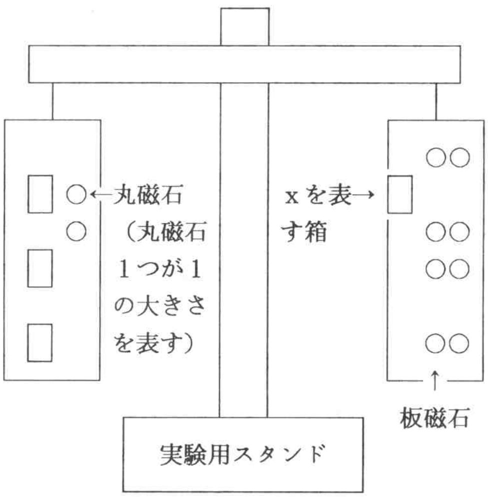
教科書　§１方程式とその解　§２方程式の解き方にあたる７時間を次のように構成した。

①　**数当てクイズに挑戦**…………	当てはめや逆算でｘを求める。方程式・解の意味を知る。
②　**天秤を使って方程式を解こう**……	逆算で求められない方程式を天秤を利用して解く。 天秤の操作の過程を天秤図に表現する。
③　**負の数の方程式を解こう**…………	負の数の方程式を天秤図を工夫して解く。
④　**分数，小数の方程式を解こう**……	分数，小数の方程式を天秤図を利用して解く。
⑤　**等式の性質をまとめよう**…………	等式の性質をまとめる。天秤図を等式に表現する。
⑥～⑦　**方程式を解こう**………………	練習問題をする。

ウ　「天秤で解こう」での数学さがし

①　等式の性質を生徒が自らの力で見つける～「天秤」を利用した数学さがし

等式の性質を教える前にこれまでの知識だけではうまく解決できない方程式の問題を生徒にぶつけてみることにした。例えば「$3x+2=x+8$」という問題である。生徒は何とかｘを求めようと鉛筆を動かすだろう。こうした困難な状況を意図的に設定することで，解決していこうとする意欲とアイデアをさがし始める。ここで，方程式を解くために以下のような天秤を提示する。



《３ｘ＋２＝ｘ＋８》

教具「天秤」の工夫

①　ｘの値を簡単に変えられる
ボックスタイプのたばこの空き箱をｘとする。箱の裏に板磁石を貼り，丸磁石１つ分の重さにする。これでｘ＝１の箱ができる。この箱に丸磁石１つ入れればｘ＝２の箱ができる。同じように箱の中に入れる丸辞しの数を変えればいろいろな値のｘを簡単に作ることができる。

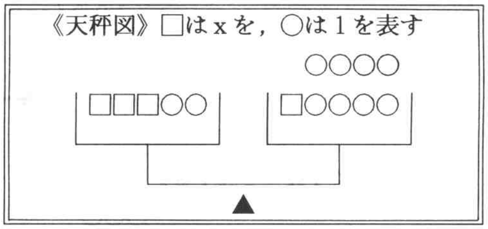
②　教室の後からでも見やすい
板磁石に，たばこの箱（ｘ）や丸磁石（数）を貼るので生徒にとって方程式の状況が見やすい。

③　簡単な構造
理科で利用する実験用スタンドに腕を付けるだけで作ることができる。

この天秤を利用して，x（箱の重さ）を求めさせる。生徒はつり合いを考えながら，磁石や箱を取り除いていき，xを求めていく。この操作が等式の性質そのものであり，天秤のつり合いの様子から等式の意味をみることができる。そして，生徒自らが等式の性質をみつけていく過程が数学さがしの場面であると考える。

ウ　「天秤」をモデル化し，思考範囲を拡大する～「天秤図」を利用した数学さがし

天秤利用のよさは，方程式の等号を天秤のつり合いのイメージとして捉えることができることと等式の性質を天秤の性質と同じようにみることができることである。しかし，このような簡単な天秤では，負の数や分数，小数を扱うことはできない。代数天秤（負の数も表現可能）も開発されているが，あえてここでは利用しないで「天秤図」で天秤をモデル化することにした。このことにより，生徒が自ら負の数や分数，小数をうまく表現して，解決していくことを期待する。この具体物（天秤）から半具体物（天秤図）を利用した思考範囲の拡大が数学さがしの場面であると考える。



(2)　生徒の学ぶ価値と教材の価値との関わり

学ぶ価値類型	教材（天秤で解こう）の価値
現 実 性	・生活経験から天秤の釣り合いを考えることができる。
有 用 性	・天秤の考え方で方程式のxを求めることができる。
真 実 性	・方程式の解が，天秤のx（箱）の重さとして実感できる。
達 成 感	・逆算では解けなかった方程式が解けるようになる。
充 実 感	
創 造 性	・負の数，分数，小数についての方程式も天秤図を利用して解決できる

(3)　「天秤で解こう」の授業の実際

～～～～～～～～　第3時「負の数の方程式を解こう」の授業記録抜粋　～～～～～～～～

T　まず，前の授業を振り返ってみよう。「$5x+1=x+9$」はどうやって解いたらいいですか。（方程式を天秤で表す。）

S　両方からxを1つずつと○を1つずつ取る。（$4x=8$の状態をつくる）xが4つと8が釣り合っているから，両方を4で割って，$x=2$だとわかる。（天秤を操作しながら説明をする）

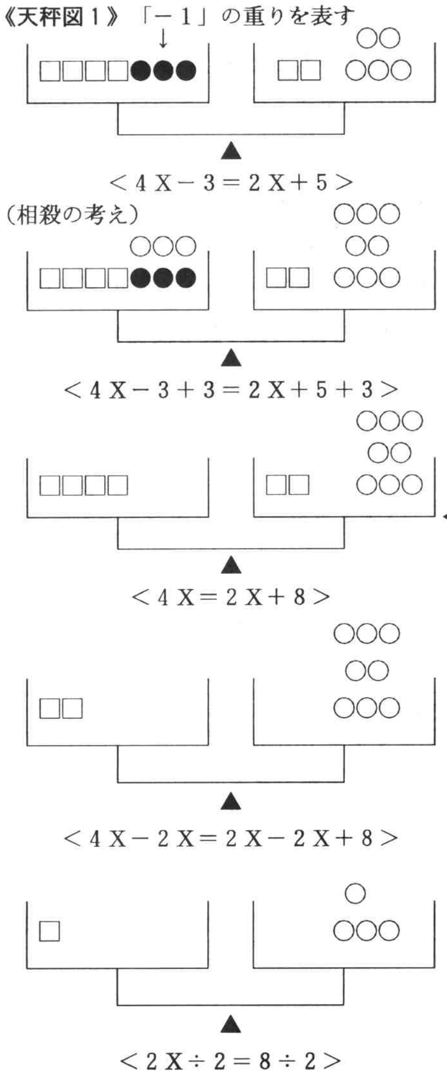
T　よくできました。では，今日は「$4x-3=2x+5$」のxを求めてもらいたいと思います。天秤で表すと，（xの箱を貼って，次に，数の磁石を貼ろうとする）あれ，困った。左の－3はどうやればいいのかなあ？

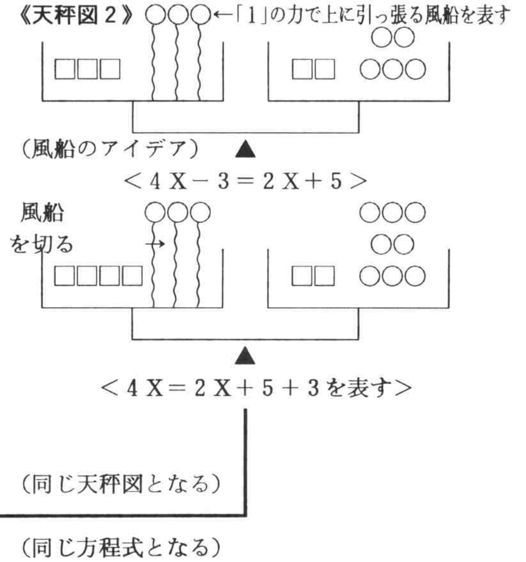
S　（できん.！）（苦労して作った天秤がもう使えん）（そんなxってわかるのか？）

T　ちょっと待った。まず，マイナスってどういうことだったか，思い出してみよう。負の数の意味は何でしたか。

S　0より小さい数。　プラスの反対。　プラスの逆。

T　そうだったね。このことを考えて，この方程式を天秤図に表せないかなあ。ちょっと考えてみてください。（しばらくして下のような2通りの天秤図が提案された）





S　　（天秤図１を示しながら）●は，－１を表しています。●は－１なので○を１つ左に乗せると，●と○で消えてしまいます。だから，天秤を釣り合わせるために，両方に○を３つのせれば簡単になります。……

※正・負の数で学習してきた相殺（キャンセル）の考え方を生かし，負の数を天秤図に見事に表現することができた。等式の性質として「両辺に同じ数を加えても等式は成り立つ」を利用している。

T　　本当にｘ＝４ですか。確かめるにはどうしたらいいですか。

S　　元の式に当てはめてみればいいと思います。

T　　左辺に代入すると４×４－３＝13，右辺に代入してみると４×２＋５＝13になるから
ｘ＝２は正しいといえますね。

S　　（天秤図２を示しながら）ぼくは，－１を風船で表しました。風船を１個切り離すと左側は重たくなって傾くので，右側に○を１つのせます。だから，３個の風船を取るには右に○を３個のせればいいことがわかります。……

※負の数を風船で表す発想がとてもユニークで生徒には評判がよかった。風船を切るために反対側に重りをのせる発想は，移項の考え方である。《天秤図１》《天秤図２》の発想が本時での「数学さがし」であると考える。

T　　では，「３ｘ－３＝－２ｘ＋７」をどちらかの考えで求めてみましょう。
（以下省略）

(4)　実践を振り返って

方程式を解くとは，その式に当てはまるようなｘを求めることであるとして，数当てゲームから導入した。ｘなら何とかして求めてやろうと意欲満々の生徒たち。まさしくクイズを解いてい

る雰囲気を感じた。「３ｘ＋２＝ｘ＋８］のような難しい問題にも食い付いてくる。こうした状況は，教師のほんのちょっとした工夫によって生まれてくる。

難しい問題に行き当たり，困っている生徒。「天秤を利用したらいいぞ」という考える足場を生徒に与えると，目を輝かせて操作を始める。磁石を取ったり，付けたりと操作するうちに等式の性質は自然と導き出されていった。ｘを求めたいというエネルギーが，等式の性質を考えさせ「数学さがし」を進めることができたと考える。こうした経験は，これから学習する連立方程式や二次方程式の場面で生かされて，生徒が自ら「数学さがし」をしてくれることを期待する。

5　終わりに

数学授業研究会が発足し２カ年が過ぎた。本研究会では，魅力ある授業改善にむけて，キーワード「数学さがし」という考えもとに，「数学がみえる」という学習過程を考え，実践を進めることができたことが大きな成果であると考える。また，日々の授業実践で役に立つ教材開発ができ，着実な一歩を歩むことができた。４つの実践ともに生徒の主体的な学習を支援することができ，生き生きとした生徒の学びの姿がみえてくる。私たちの実践で，生徒の数学の授業に対する意識改革をはかれたことは確かである。

反面，「数学さがし」をする生徒の具体的な学びの姿が十分に明確とは言えず，実践理論に甘さがあることは確かである。今後の日々の実践の積み重ねを通して，「数学さがし」の指導のあり方をさがしていきたいと考えている。「数学さがし」は生徒だけではなく，教師にとっても同じ目標なのである。

終わりに際して，本研究会の活動並びに本稿執筆にあたり，ご指導・ご助言を頂いた志水廣先生に深くお礼申し上げます。

＜執筆および実践者＞

理論部分･実践例１：鈴木正則　実践例２：森上一美　実践例３：玉置　崇　実践例４：清水文雄

＜引　用　参　考＞

注１）数学授業研究会員

玉置　崇　小牧市桃陵中学校　　森上 一美　名古屋市浄心中学校
清水 文雄　豊川市代田中学校　　井上 正英　愛知教育大学附属岡崎中学校
中谷 眞人　愛知教育大学附属岡崎中学校　斉藤 泰伸　豊川市代田小学校
鈴木 正則　東加茂郡旭中学校
鈴木 良隆　前 名古屋市東桜小学校（現 名古屋市立中央高等学校）
＊数学授業研究会事務局　　東加茂郡旭町立旭中学校　鈴木正則まで

注２）現代教育科学　２月号　1997　明治図書
参考文献）「数学の授業を感動の連続に」 玉置崇・鈴木良隆・八槇直幸　明治図書　1996
永井聡・鈴木登美雄