イプシロン　1992. Vol. 34, 32-48

作図ツールを用いた問題解決における問題の変容と問題生成の一方略について

—作図の構成的な性格とコンピュータによる支援について（その3）—

愛知教育大学　飯島康之

0．はじめに

作図ツールの設計と開発において最も基礎的なのは，作図の構成的な性格を明確にし，それを形式化し，そして使いやすい形に実装することである[1]。作図ツールによって，図形に対する見方に影響を与えると思われる点は，図形に対する関数的な見方であるが，それは作図の構成的な性格の形式化のみからは分かりにくいことなので，それらの分析から作図と変形に内在する2つの関数的側面を明確化した[2]。

これらは設計と開発において基礎的であるとしても，実際に作図ツールがどのように使われ，何のために役立つかは，別の問題である。特に，「問題解決の支援」あるいは「探究の支援」というスローガンを掲げ，そのためのツールとして研究したとしても，意図の通りに機能しているかどうかは検証しなければならない課題である。また，設計等を分析することから得られること以外に，実際に使ってみると明らかになるような使い方，作図ツール独自の問題の発展のさせ方等を明らかにすることも設計・開発とは独立した課題である[3]。

このような課題に応えるために，本稿では，作図ツールの導入が問題解決に及ぼす影響を，まず問題解決者の問題の変容をケーススタディによって明らかにする。そして，次に，作図ツールに適した問題生成の方略を明確化し，それによる問題例を明示する。そして最後に，この2つの試みと，探究を支援するための環境としての作図ツールとの関わりについて考察する。

1．作図ツールの導入に伴う問題の変容

1．1　問題解決の支援を捉える視点としての「問題の変容」

「問題解決の支援のためのソフト開発」というスローガンを掲げることは容易だが，具体的にどのような点で問題解決を支援するかを明確にすることは必ずしも容易ではない。例えばそのための指標の一つとして「これまで扱えなかった（あるいは扱いにくかった）が，ソフトを使うことによって扱えるようになった問題」が考えられる。これは問題解決支援のための必要条件ではあるが，教育的に見ると必ずしも十分な指標ではない。ソフトを使うことによって容易に解決できる問題が生じたとする。それは進歩である。ある意味で，そのソフトは解決者の問題解決を支援していると言えるだろう。しかし，ソフトを使うときと使わないときでは，問題文は同一でも，解決者にとっての問題の意味，困難さなどは変わってしまっている。たとえば，REDUCE を使

えば，中学校の数学で扱う因数分解はすべて可能だが，同時に，それらは生徒にとっては「問題」ではなくなってしまうことになる。このように，教育的な「支援」を考える場合には，「扱えるようになった問題」を明確化するだけでは十分ではない。

教育的に考えた問題解決において重要なのは，「解決」が容易かどうかのみではない。問題解決の過程全体にどのような影響を与えたのかを分析することが必要である。そして，生徒の問題解決過程を改善するための環境として，そのソフトウェアを使うことができるかどうかを分析することが必要である。そのような問題解決過程の変化を捉えるために，まず本章では，解決者の「問題の変容」に焦点を当てる。

問題解決においては「解決」のみが重要なのではなく，むしろ問題の設定，あるいは発見に大きな意味があることは以前から指摘されてきた。「問題状況が探究を受けるために提出した問題は何かが分かれば，探究はうまく進む」[4]という Dewey の言葉が示唆するように，状況から問題をどう作り上げるかは問題解決過程の中核である。そして，そのような解決者が取り組む問題は必然的に変容する。事実と照合して，設定の仕方が悪いことがわかれば再設定をする必要がある。それなりの解決ができれば，さらに問題が発展していく。

このような問題の変容あるいは発展に関して，これまで数学教育では竹内他[5]のような，数学科の授業における問題の発展的な扱い方の研究や，清水美憲[6]のような「問題の変容」を視点としたメタ認知の分析などが行われてきた。本稿では，この「問題の変容」という問題解決過程を捉えるため概念を，作図ツール[7]（本稿では主として Geometric Constructor を念頭に置いている）の利用が問題解決過程に及ぼす影響を考察するための指標として考える。

次の２つの節では，ケーススタディを行う。大学生数人が Geometric Constructor を使って，議論しながら解決を進めていった問題解決過程における問題の変容の概略を述べる。

１．２　ケーススタディ（１）内心の軌跡の問題

問題11　△ABCの点Ａが動かしたときに，その内心Ｉはどのように動くか。

これをより限定して，次の問題を考えた。

問題12　ΔABCの点ＡがBCに平行に移動するときのＩの軌跡を求めよ。

まず，GCを使って図１（左上）のような結果を得た。

推測13　軌跡は楕円ではないか。

しかし，これを判定する方法がなかった。

問題14　軌跡が楕円になることを調べる方法はないか。

推測15　Ａの位置をもっと上下したら軌跡も変わるはずである。楕円の特殊な場合が円であるから（図２），Ａの位置を動かして円になる場合を作ってみよう。

そこで，Ａの位置を動かしてみたのだが，軌跡は図１（右上，左下）のようになり，円に近い形にはなるのだが，円とは少し違う。最初の予想では横長の楕円から円になり，縦長の楕円になると考えていたのに縦長にはならないことが分かった。

問題16　どうして円にはならないのだろうか。

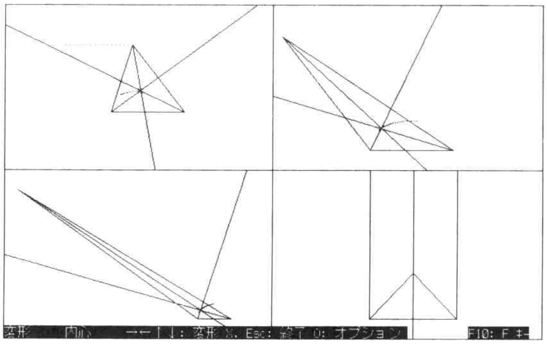


図１

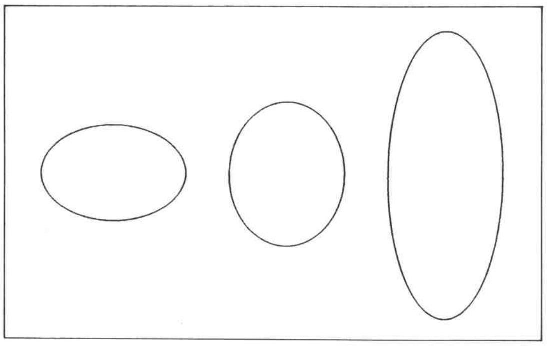


図２

さらに作図を続け，図を観察して，ある学生が図１（右下）のような場合を取り上げ，次のように述べた。「円になるとしたらBCを中心とする円だから，∠BIC＝∠Ｒにならなければいけないのだけれど，∠BIC＝∠Ｒのときにはと ABとACが平行になってしまうから，点Ａはとれないので，円になるはずがない。」「だから，内心の軌跡が楕円になるという考えは成り立たないようだ」

以上のような過程を経て，内心の軌跡は楕円にはならないことを発見した。それ以上の発展は望めないように思えたので，点Ａが別の動き方をする場合を調べることにした。

１．３　ケーススタディ（２）四角形の４つの角の２等分からできる四角形の問題

問題21　四角形ABCDの４つの角の２等分線を引き，それらの交点から四角形EFGHをつくる。

四角形ABCDがどのような形のときにEFGHはどのような形になるでしょう。

この問題を解決するために，作図と変形をして，次のような対応を見出した。

推測22　長方形→正方形，平行四辺形→長方形，菱形・正方形→一点。（図３参照）

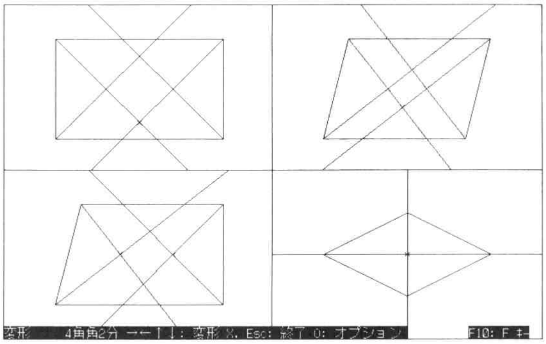


図３

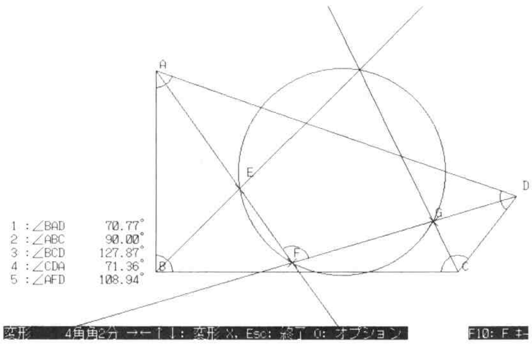


図４

さらに，台形にした場合には２つの角が90°のままなので，台形→円に内接する四角形となることが分かった。ここで，「EFGHが菱形になることはないのかなあ」という疑問を挙げた人がいたので，次の問題を考えることになった。

問題23　EFGHがなりえない形がありそうだが，どんな種類の四角形にはならないのか

いろいろと変形した結果，一般の菱形や平行四辺形にはならないという推測を得た。

問題24　どうしてEFGHは一般の菱形や平行四辺形にならないのだろうか。

すぐには結論が見つからなかったが，今分かっている最も一般的な結果が台形なので，３点E,F,Gを通る円を描き，台形でなくなった場合にはどのような形に変わるのかを調べたところ，偶然にも，他の場合にも円に内接する四角形になってしまうことが分かった（図３右下)。

推測25　ABCDがどんな四角形でもEFGHは円に内接するようだ。

そのため，そのことが正しいならば，菱形や平行四辺形にはならないことが証明できることが分かった。そこで次のことが次の問題となった。

問題26　どうしてEFGHはどのような場合にも円に内接する四角形になるのか。

証明はすぐには分からなかったが，角が関係するはずだという推測から，図４のような５つの角について測定してみた。その結果，

推測27　∠Ｆ＝（∠Ｂ＋∠Ｃ）／２ではないか。

という推測を得た。

そこで，考えるべき問題は次のものとなった。

問題28　∠Ｆ＝（∠Ｂ＋∠Ｃ）／２を証明せよ。

最初は取り組みようがなかった問題も，証明すべき仮説がはっきりした時点で，その証明はすぐにでき，一連の問題は解決したと解決者たちは考えた。

１．４　考察

ここに挙げた事例は，コンピュータなしで取り組んだ場合，手や定規・コンパスでは煩雑なためにあまり多くの図を書くことができず，問題解決はあまり発展しなかった。コンピュータを使った上の解決過程について注目したい点は次の点である。

⑴　事実を収集することにより，推測が支援され，解決者の具体的な問題が変容している。

元々与えられている問題は，問題11,21共に漠然とした問題である。一般にはこの形式では生徒にとっての「問題」にはならないが，この事例では，作図・変形・測定を使っていろいろな事実を調べることによって，推測13や問題23,24,26,27が生まれている。これらの推測や問題の発生は，コンピュータによって支援されていると言えよう。

⑵　思考の論拠になるような特殊化をするにはどうしたらいいかを考え，事実の集め方，つまりコンピュータの使い方が変容している。

事実の収集，つまりコンピュータの使い方は自動的になされるわけではない。漠然とした問題には漠然とした事実の収集の仕方しかできないが，問題がより具体的になるにつれ，集めるべき事実も特定され，事実の収集の仕方を自分で制御する必要が出てくる。推測14，問題23，問題26などでの取り組み方がその例として挙げられる。

⑶　多くの事実が提示され，その関連性を考える必要性があるため，それぞれの図形が個別のものとしてでなく，関連のあるものとして扱われている。

さらに(1)，(2)は，図形（収集すべき事実）についての捉え方の変容も示唆している。例えば，問題26の場合のように，「角に関係するはずだから，まず５つの角について調べてみよう」という考えが生じたり，推測15に見られるような図形間の関連性や性質を考察することも必要としている。

２．作図ツールに適した問題生成の一方略

２．１　問題解決の支援を明確化するための概念としての問題生成の方略

１章では問題の変容に注目した。「変容」という概念は中立的な概念であり，変化を変化としてありのまま捉えようという概念である。しかし，さらに観察するならば，問題の変容の仕方には傾向がある。それまでの問題状況から次にどんな問題を見つけ出すかという点に関して特徴的な傾向があるとすれば，それは作図ツールの導入に伴う特徴的な問題生成の方略ということができるはずである。そして，そのような結果として生じる問題は，作図ツールに適した問題と考えることができるはずである。本章では，一つの事例を元に２つの事柄について考察する。

２．２　「図形と図形の依存関係」への着目

１章で挙げた問題21について考察してみよう。この問題は元々はこのような形式の問題ではなかった。元になっているのは次の問題である。

問題20　長方形ABCDの４つの角の二等分線の交点をそれぞれE,F,G,Hとするとき，四角形EFGHは正方形になることを証明せよ。

作図ツールを使って作図するとき，この問題のことのみを考えるならば，長方形ABCDをいろいろと書いてみることになる。実際，フリーハンドで図を書いてみるときにはそうであろう。図の役割として大きな点は，角度や辺の長さなどの関係はないかを調べることであり，論証のために使えそうな条件を見つけることである。

しかし，作図ツールを使って作図をするときには，自然に変形をしてみたくなる。実際，適当に４点をとり，それを結んで□ABCDを作り，４つの角の二等分線を引き，というような手順で図が作れるのだから，点A,..,Dをいろいろと動かしてみたときに結論はどうなるかを調べてみたくなる。実際，動かしてみるといろいろなことが分かる。□EFGHが正方形になるのは□ABCDが長方形のときに限られるが，そうでない場合は全く不毛かと言うと決してそうではなく，それぞれ注目に値する結果がある。作図ツールの場合，簡単にいろいろな場合を調べることができるために，このような問題生成を行いやすくなっているのである。

作図の仕方に注目し，また解析幾何が基礎になっていることを考えるならば，もとにする４点，すなわち８変数と結果として出来上がる図形の性質との関係であり，一種の関数とも考えることができる。

$$f : (X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4) \rightarrow \square EFGH$$

しかし，作図ツールの利用者にとってはむしろ，

f：□ABCD → □EFGH

と二つの図形の間に依存関係[8]があって，□ABCDがどのようなときに□EFGHがどのようになるのか，という考えかたとして捉える方が自然であろう。与えられた最初の問題20を

長方形 → 正方形

という関係を証明せよという依存関係として捉え，さらにこの２つの条件をいわば変数として捉え，その関わりを明確にしようという方略は作図ツールに適した問題生成の方略なのである。

２．３　「図形を構成する手段」としての図形概念

問題21を別の観点から考えると新しい問題を生成することができる。つまり，この問題の場合，四角形から新しい四角形を作る手続き

f：□ABCD → □EFGH

であり，いろいろな関係を見いだすことが出来たわけだが，四角形から四角形を作る方法はこの問題での作図方法に限られるわけではない。たとえば，□ABCDの４辺のそれぞれの中点を結ぶことによっても新しい四角形が作れる。４辺の垂直２等分線を引くことも考えられるかもしれない。あるいは，□ABCDの対角線を引くと４つの三角形に分割されるが，三角形が一つあれば内心など一意に決まる点がある。例えばその４つの内心を結ぶことで新しい四角形を作ることもできるのである。

このような問題生成の仕方にはどこに特徴があるのだろうか。最大の点は，図形概念の「新しい図形を構成する手段」としての特徴が強調されている点にあるのではないだろうか。図形概念は様々な図形の抽象化したものであり，様々な図形を弁別する役割もある。また，図形概念は証明可能であるように組織化されているため，推論や論証が可能な概念でもある。これらの特徴は，これまでの図形指導の中でもかなり指導されている点であるが，「構成する手段」としての特徴はあまり強調されてこなかったと言えるのではないだろうか。

観点を変えて，関数概念との対比で考えてみると，関数概念は数や式による表現が可能であるという特徴の他に，関数から関数を生み出す方法が様々に用意されている。

学校教育の中で明示的に扱うかどうかは別にしても，f^{-1}：逆，fog：合成　はお馴染みのものである。また大学の数学になれば，f^g：畳み込み　などを始め，様々な「関数から関数を作る手続きとしての変換」が重要な概念として存在している。このような点は，それらを明示的に扱わないとしても，様々な具体的な問題を作成するときに意識されている。

そのような意識をしやすい理由の一つとして，「計算問題」として提示できるという理由があるのではないだろうか。これはどうなっているのかと調べるための手段として，関数の場合には数式の処理（計算）がある。定規コンパスやフリーハンドによる作図と比べると非常に発達したシステムになっている。換言するならば，関数での「計算」に対応する図形での「作図」がより容易なものになることによって，図形概念は，「計算可能＝数から新しい数を作る手段」に対応して「作図可能＝新しい図形を構成する手段」という特徴が強調されることになるのである。

2．4　問題生成の一方略

前節までにおいて，作図ツールを使ってときに特徴的な問題生成の一つの方略を明らかにし，その方略を用いてどのような問題が作られるかを明らかにした。まず，その内容を簡単にまとめておくと次のようになる。

まず，基本的なことは，次の点である。

(1)　作図ツールを用いると，作図が一種の関数であることが強調される。

特に，前節までで明確化された点として，

(2A)　図形と図形の依存関係を明確化して，ｆ：図形Ａ → 図形Ｂという対応が意識化される。

(2B)　作図という手続きはある種の図形からある種の図形を新しく構成する手段であることが意識化され，新しい図形の作り方を考えられるようになる。

このことから，問題を生成する方略として，次のようなものが考えられる。

(3)　与えられた問題文をまず次のように解釈する。

図形ＡからＢという手続きによって図形Ｃが作られる。

あるいは，

図形ＡからＢという手続きで図形を作ったときに，性質Ｃが成立する。

このとき，次のようにして新しい問題を生成する。

(3A)「図形Ａ」に対して一般化，特殊化，類比を行う。

(3B)「手続きＢ」を変える。

(3C1)「図形Ｃ」あるいは「性質Ｃ」が成立する範囲内で「図形Ａ」を一般化する。

(3C2)「図形Ｃ」あるいは「性質Ｃ」が成立する範囲内で「手続きＢ」を一般化する。

(3C3)「図形Ｃ」あるいは「性質Ｃ」を一般化して(3C1),(3C2) を行う。

3．生成される具体的な問題例

本章では，2.4で明らかにした問題生成の方略によって，具体的にどのような問題を作ることができるのかを明確にする。

3．1　(3A)「『図形Ａ』に対して一般化，特殊化，類比を行う」具体例

問題20から次の問題を作ることは図形Ａに対する一つの一般化である。

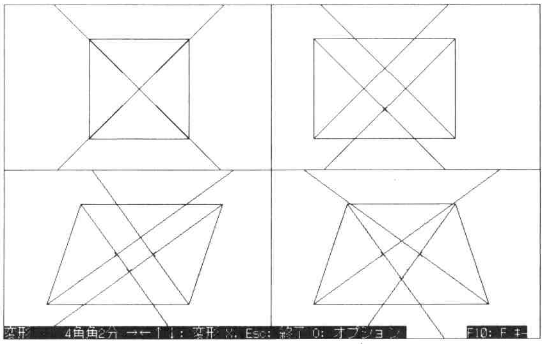
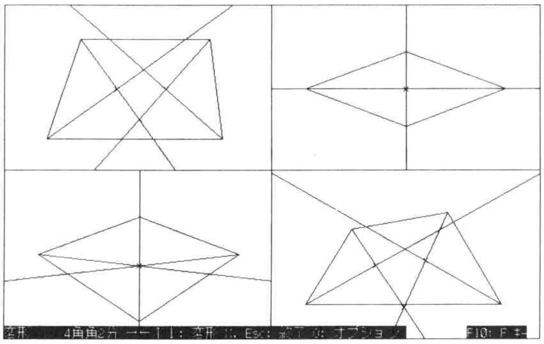
問題31　平行四辺形ABCDの４つの角の二等分線の交点をそれぞれE,F,G,H とするとき，四角形EFGHは正方形になることを証明せよ。

しかし，これら一連の問題を潜在的に調べさせる問題として，前出の問題21が考えられる。

問題21　四角形ABCDの４つの角の２等分を引き，それらの交点から四角形EFGHをつくる四角形ABCDがどのような形のときにEFGHはどのような形になるでしょう。

つまり，(3A) を忠実に実行し，更に答えが明確に出せる問題としては，問題31のような様々な問題文を作るということであり，それらを自然の形で行わせるための問題，つまり教師が生徒に提

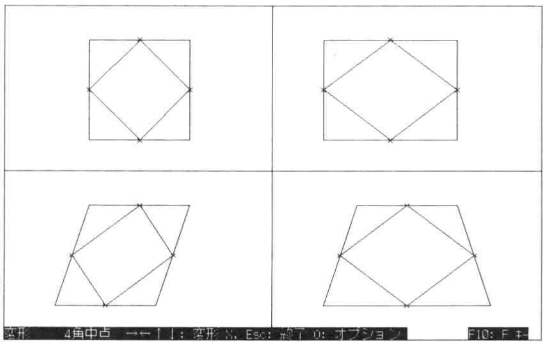
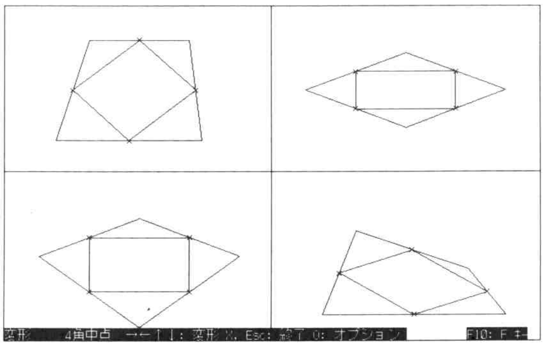
示して探究させる契機になる問題として問題21のような問題が考えられるのである。「自然の形で行わせる」という意味については，次の作図結果を見ていただきたい。□ABCDが，正方形，長方形，平行四辺形，等脚台形，台形，ひし形，たこ形，一般の四角形という８種類の場合を列挙しているのだが，作図ツールにおいては，このように，図形A を様々に連続的に変形することが容易である。そのため，定規・コンパスの場合と比べると，どのようなときにどうなるかを調べることが非常に容易になっている学習環境ということができる。

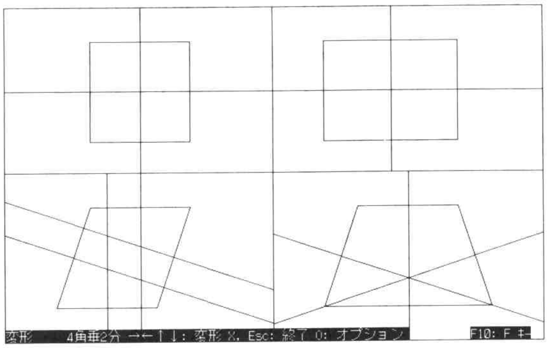
３．２　(3B)「『手続きＢ』を変える」具体例

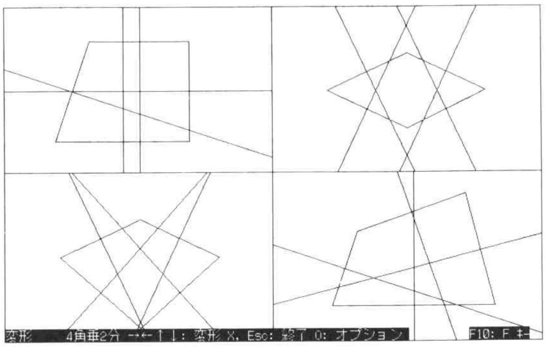
前節で示したように，探究を支援するという意味では，問題31のような個別の問題よりも問題21の方が適しているので，問題21の中の，□ABCDから□EFGHをつくるという形式をそのままにして，作図手続きを変えた問題を以下に示そう。この「□ABCDから□EFGHをつくる」という形のものでさえ，様々なものが作れるので，以下に生成される問題の例と作図結果を列挙する。下線部の部分が問題21から変更した部分である。なお，作図結果については，問題21の場合と同様，□ABCDが，正方形，長方形，平行四辺形，等脚台形，台形，ひし形，たこ形，一般の四角形という８種類の場合についてそれぞれ一つずつ示している。

問題32　四角形ABCDの<u>４つの辺の中点をE,F,G,Hとして　　　　　　　</u>四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

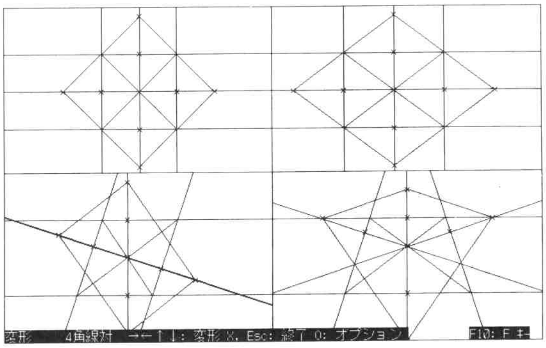



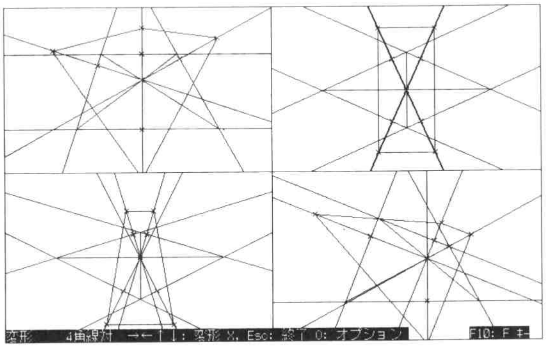
問題33　四角形ABCDの４つの辺の垂直二等分線のそれぞれの交点から四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。



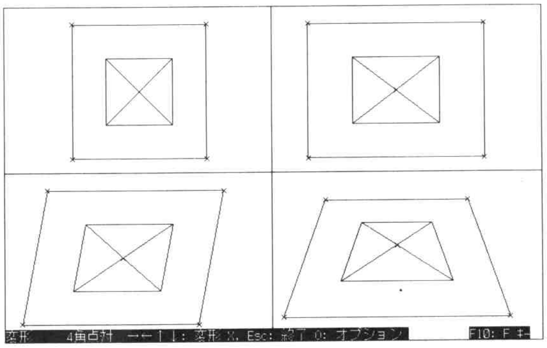


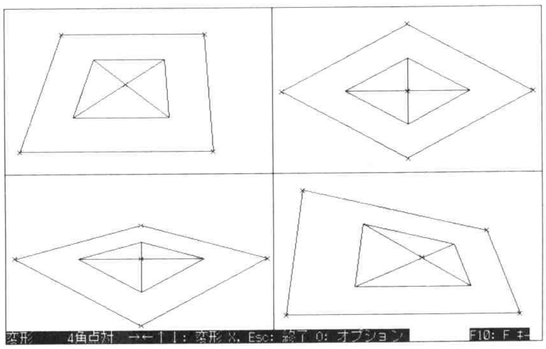
問題34　四角形ABCDの対角線の交点Oを４つの辺に関して線対称移動してできる点をそれぞれE,F,G,Hとして　　　四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。





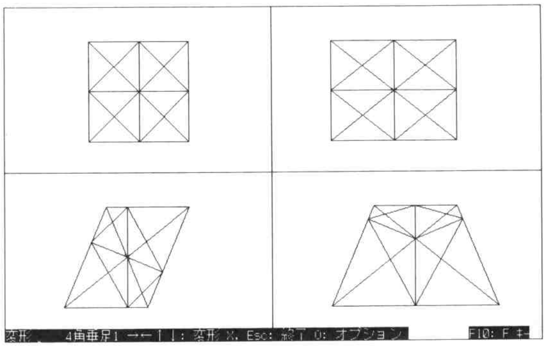
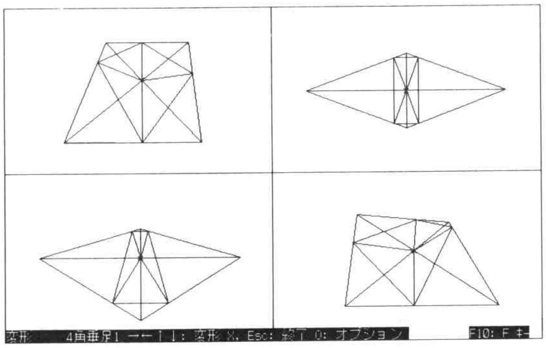
問題35　四角形ABCDの対角線の交点Oを４つの点に関して点対称移動してできる点をそれぞれE,F,G,Hとして　　　四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。





問題36　四角形ABCDの対角線の交点Oから４つの辺におろした垂線の足をE,F,G,Hとして　四角形EFGHを作る。

四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

上記の５つは□ABCD→□EFGHを構成する手段として一つの手続きで構成できるものである。しかし，いくつかの手続きの組み合わせも考えると，さらに多くのものがある。例えば，四角形に対角線を引くことで，８種類の三角形が作られる。三角形があれば，外心，内心等によって，一つの点を作れる。それらによって新しい四角形を作れる。以下にそのような例を示そう。

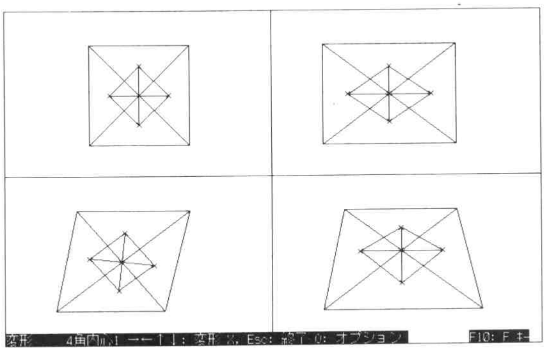
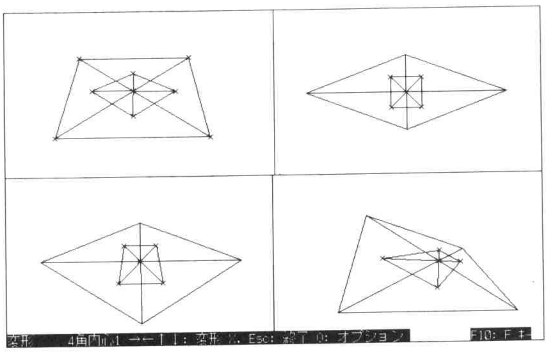
問題37　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形OAB,OBC,OCD,ODAのそれぞれの内心をE,F,G,Hとして　四角形EFGHを作る。

四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

この問題37の方が明確なのだが，生徒の意識を考えると，むしろ，次の問題37′の方が適していると思われるので，問題38-40 では次の形式を使うことにする。

問題37′ 四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形のそれぞれの内心をE,F,G,Hとして　四角形EFGHを作る。

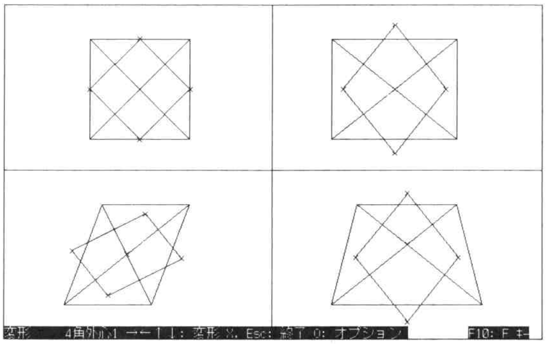
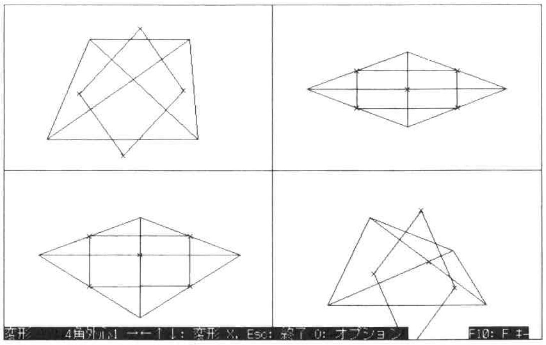
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

飯島　康之

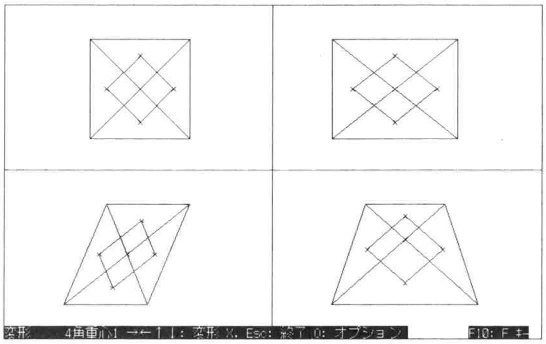
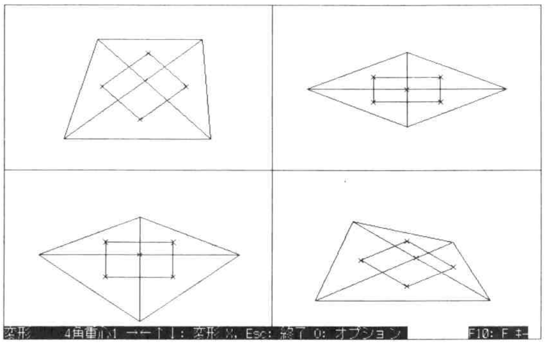
問題38　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形のそれぞれの外心をE,F,G,Hとして＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿四角形EFGHを作る。

四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

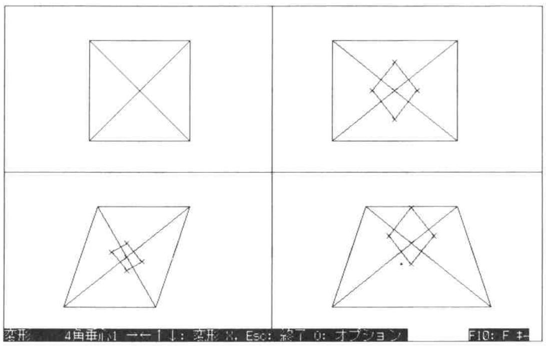
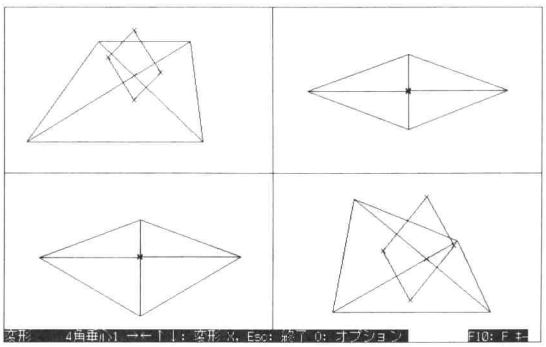
問題39　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形のそれぞれの重心をE,F,G,Hとして＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿四角形EFGHを作る。

四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

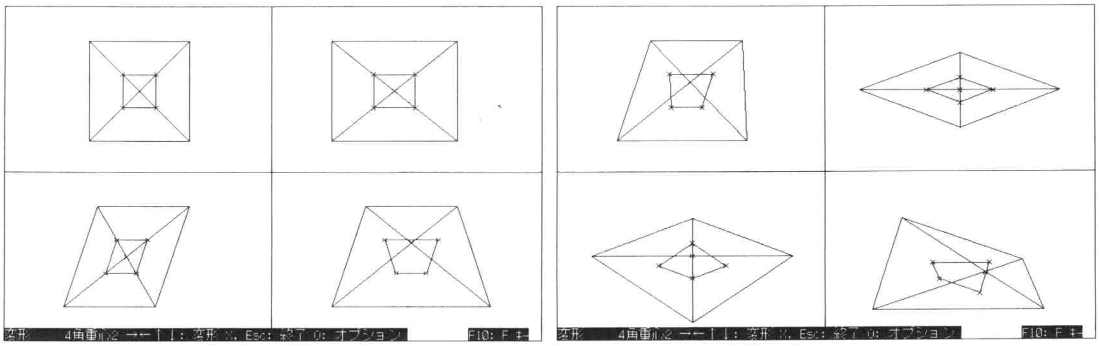



問題40　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形のそれぞれの垂心をE,F,G,Hとして＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿四角形EFGHを作る。

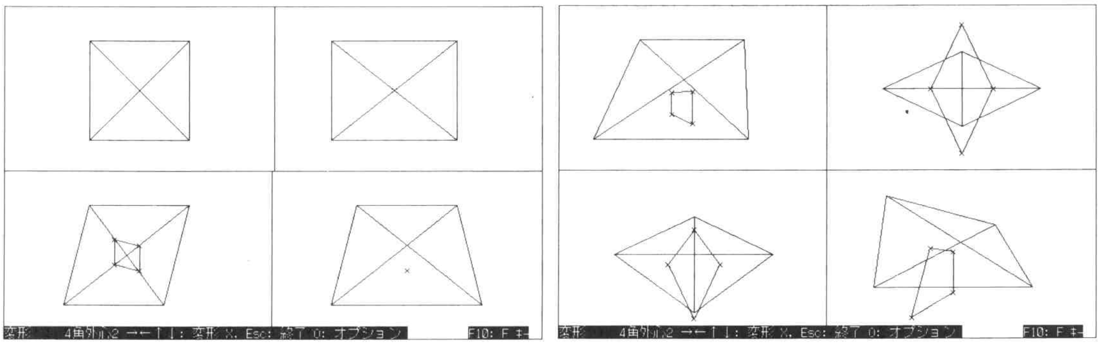
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

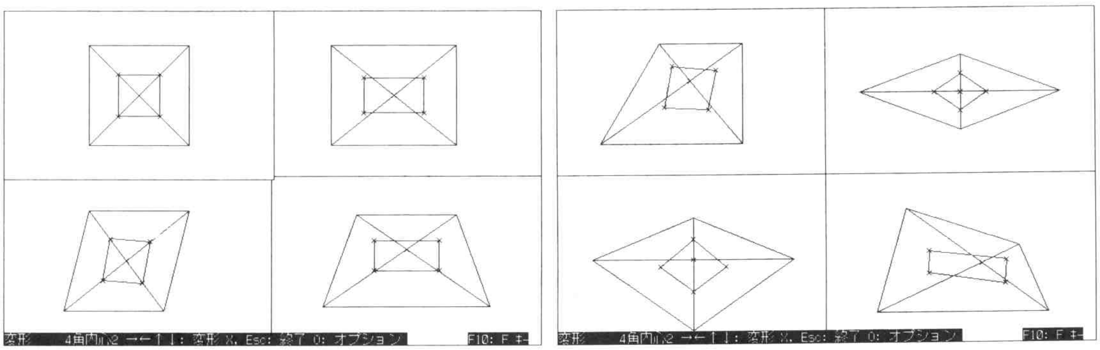
問題41　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形ABC,BCD,
DCA,CABのそれぞれの内心をE,F,G,H として　四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。



問題42　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形ABC,BCD,
DCA,CABのそれぞれの外心をE,F,G,H として　四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。

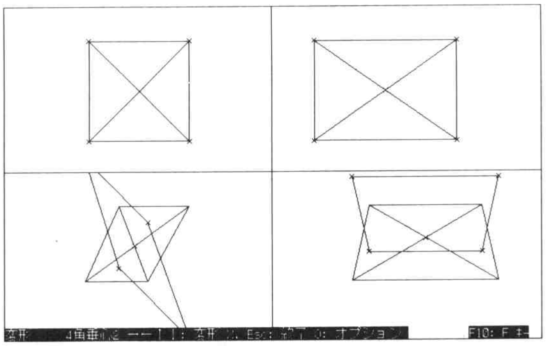


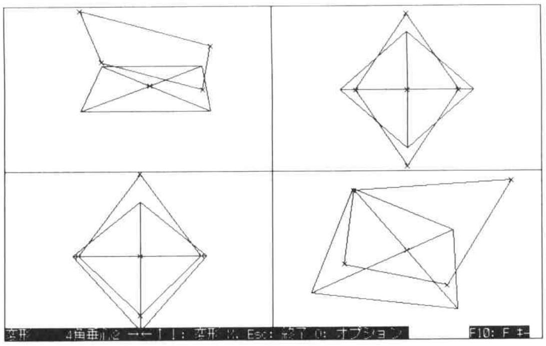
問題43　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形ABC,BCD,
DCA,CABのそれぞれの重心をE,F,G,H として　四角形EFGHを作る。
四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。



問題44　四角形ABCDの対角線を引いてできる４つの三角形ABC,BCD,DCA,CABのそれぞれの垂心をE,F,G,H として　四角形EFGHを作る。

四角形ABCDがどのような形のときに四角形EFGHはどのような形になるでしょう。





３．３　(3C1)～(3C3)の具体例

(3C1) の具体的な問題としては，問題33から次のような問題を作ることが該当する。

問題45　□ABCDの４つの辺の中点をE,F,G,Hとして□EFGHを作る。□EFGHが長方形になるのは，□ABCDがどのような形のときか。

問題46　□ABCDの４つの辺の中点をE,F,G,Hとして□EFGHを作る。□EFGHが正方形になるのは，□ABCDがどのような形のときか。

(後者の問題では，□ABCDが正方形のときと予測する生徒が多いが，それ以外の場合もありうるのが興味深い点である。)

多くの場合，このような問題の問い方は，どのような条件が重要なのかを意識化するのに有効である。証明の中で中核となっている条件を明確化することは，これまでの指導の中でもなされてきたことであるが，フリーハンドや定規とコンパスで作図するのでは，それがその証明以外の点にどう効いているのかが示しにくかった。そういう意味で，上記のような問い方をより有効にするためには，作図ツールのような，簡単に事実が収集できる，という環境が必要である。

また，問題の形式としては多少異なるのだが，１章の中で出てきた問題23や問題24も，このカテゴリーの中に含めたい問題である。再び列挙しておこう。

問題21　四角形ABCDの４つの角の２等分を引き，それらの交点から四角形EFGHをつくる。四角形ABCDがどのような形のときにEFGHはどのような形になるでしょう。

問題23　□ABCDの４つの角の２等分を引き，それらの交点から□EFGHをつくる。□EFGHはどんな種類の四角形にはなりえないか。

問題24　□ABCDの４つの角の２等分を引き，それらの交点から□EFGHをつくる。□EFGHは一般の菱形や平行四辺形にならないことを示せ。

(3C2) や (3C3) については，上記と同様の活動を (3B) などの中で行うことから生じてくるが，ここでは省略しておく。

4．学習環境としての作図ツール

4．1　問題生成の方略と学習環境としての作図ツールとの関わり

1.1で，「生徒の問題解決過程全体を改善するための環境として，そのソフトウェアを使うことができるかどうかを分析することが必要である」と述べた。問題の変容に注目した結果としては，1.4で指摘した(1)～(3)が明らかになった。さらに，一歩進めて，作図ツールに適した問題生成の方略等を明らかにし，具体的な問題例などを挙げた。これらは，1.1での指摘に対してどのように答えていることになるのかを考察しておこう。

まず，最初に注目しておきたいのは，2章，3章で明らかにしたことは，作図ツールなしにはできないということではないという点である。2.2で指摘した，図形と図形の依存関係は，作図という事柄自体を分析すれば導かれるはずのことである。また，2.3での「図形を構成する手段」としての図形概念の側面についても同様である。たとえ，作図ツールのようなものがないとしても，2.4での方略を導くことも，それを使って3章で示した問題を導くことも可能である。定規とコンパス，あるいはフリーハンド，あるいは頭の中で想像するだけでも「可能」なことである。

しかし，可能であるとは言っても，多くの生徒にとって可能であるというわけではない。たとえば，3章で取り上げた問題の多く，また同じ方略によって生成されるはずの問題の多くは，これまで学校数学の中で取り上げられなかったであろう。もちろん，一方には，3章で取り上げたように問題にどの程度の教育的価値があるか，また問題生成の方略自体にどの程度の価値があるかを検討する必要はあるのだが，それ以前に，作図ツールなしにこれらの問題に取り組むには，様々な障害があったこと，そして作図ツールはその障害をかなり排除してくれていることに注目しておきたい。3章で示した多くの図自体が示唆しているように，作図ツールを使うと，このような取り組みは非常に自然なものになるのである。あるいは，観点を逆転させれば，作図ツールというものは，これらの問題生成の方略等を行いやすくしている環境なのである。

4．2　探究を支援する環境としての作図ツール

「問題生成の方略等を行いやすくしている環境」とはどういう意味であろうか。それは，意図的な指導を行わなくても，問題生成の方略等を使うことができる，あるいは，そうでない環境の中では意図的に指導しようとしてもなかなか困難な事柄が，かなり指導しやすい環境ということができるであろう。ここで重要なのは，意図的指導がなくても，あるいは強い意図的指導がなくてもあることができる環境だということと，行うべきことが限定したことに対するルーチン化されたことではなく，かなり広い範囲に通用する事柄だという点である。つまり，自分で目的を持って問題に取り組んでいけば，様々な新しい問題を自分なりに発見し，自分なりに解決していけるような環境，つまり一言で言えば，探究を支援する環境なのだという点である。

もちろん，作図ツールが多くの生徒にとって，そのような環境として通用するかどうかということは，まだまだ検証できていない事柄である。また，そのような環境として使うためには，ど

のような教材が適しているかとか，どのような指導法が適しているかというような様々な課題がある。むしろ，本研究では，ここで示した問題生成の方略がまだその端緒であって，他の様々な活動を明確化することが数多く残っているというのが現状かもしれない。

しかし，たとえそうであるとしても，探究を支援する環境として位置づけていくこと，また例え一つの問題方略しか明示していないとしても，探究を支援する環境として作図ツールを考えていくことができる可能性があるという点は重要な点なのである。

4．3　ソフトウェア開発の教育学的側面

現在行われている，教育へのコンピュータの導入に際して，教育的な準備は十分とは言えない。どう使えばいいのかという点についてさえ，必ずしも明確な合意が得られているとは言えない。また，数学教育学においても，それをどう位置づけるか，これまでの研究や実践とどう係わりを考えていくかなどについての考察は決して十分ではない。むしろ，これまでの様々な教育機器が導入されても結局使われなかったという経緯や，現代化においてコンピュータが数学教育に及ぼした影響は必ずしも満足のいくものではなかった過去などが，消極的な方向を示唆しているという方が妥当であろう。プログラミング自体の面白さに流されて，ついつい教材研究等をおろそかにしてはいないか，研究をおろそかにしてはいないかという警鐘の方が大きいのが現状であろう。

それらすべてにそれなりの妥当性があるとしてもなお，ソフトウェア開発に魅力があるとすれば，それは，環境を作れる可能性にあると言えるだろう。教具に関わる研究はこれまでも様々になされてきた。教具の開発には，その教具の中にどのような構造を想定すべきかという分析や，どのような活動が可能か，どのような指導の仕方が適切かなど，様々な研究が必要になる。しかし，いわゆる教具作りと比べて，ソフトウェア開発は，扱える複雑さにおいても，また情報量においても，比べ物にならないほどの違いがある。

また，この違いはきれいなグラフィックスが作れるというような，表面的な特徴だけでなく，より根本的なところでの差異がある。たとえば，教具開発の場合，教具自体が物質であるから，教具が物質として持っている様々な性質をそのまま使うことができる。例えば紙で作っていれば，切ること，折ること，くっつけることなど様々なことが可能である。開発者が意図していないとしても，児童・生徒がいつの間にかある性質を使うこともありうる。そして，教具開発に当たって，「折る」ことが必要ならば，折れる材質を選べばいい。しかし，ソフトウェアによって構築する環境の場合，材質の選択はできない。そして，ほとんどの属性は，設計者が自分で設計しなければならない。切ったりくっつけたりすることができるような図形を扱うためには，コンピュータの中で実現される図形に対して，そのような属性を与えておかなければならない。

さらに，設計の如何によっては，単なる電気紙芝居に終わることもあれば，多くの場面で「道具」として機能するようなツールを開発できることもある。便利さの方が強調されることもあれば，かえってコンピュータが与える指示やコンピュータで処理させるための前処理が思考の妨げになってしまう場合もある。多くの場面で使えるようにするためには，特定の場面に限定されな

いような，プロセスの抽象化が必要であり，思考の妨げにならないようにするには，問題解決の場面における思考にあったプロセスの抽象化やインターフェイスの工夫が必要になる。もちろん，そのような工夫のためには，情報科学等諸科学が必要になるが，それ以上に，数学教育独自の内容と密接に関わる領域なのである。そして，これまでになされてきた思考過程に関する研究や，教材論，教具論，環境論等を検討し，発展させていく契機なのである。

5．まとめと今後の課題

本稿では，まず1章において，問題解決者の問題の変容に焦点を当てて，ケーススタディを行い，作図ツールの導入に伴う影響として，次の3点を明らかにした。

(1) 事実を収集することにより，推測が支援され，解決者の具体的な問題が変容している。

(2) 思考の論拠になるような特殊化をするにはどうしたらいいかを考え，事実の集め方，つまりコンピュータの使い方が変容している。

(3) 多くの事実が提示され，その関連性を考える必要性があるため，それぞれの図形が個別のものとしてでなく，関連のあるものとして扱われている。

次に2章では，そのような問題を変容する過程を分析し，「図形と図形の依存関係」と「図形を構成する手段としての図形概念」が作図ツールの利用によって強調されることを明らかにし，それらを元にして作図ツールに適した問題生成の方略として，次のものを提示した。

まず，与えられた問題文を次のように解釈する。

図形AからBという手続きによって図形Cが作られる。

あるいは，

図形AからBという手続きで図形を作ったときに，性質Cが成立する。

このとき，次のようにして新しい問題を生成する。

(3A)「図形A」に対して一般化，特殊化，類比を行う。

(3B)「手続きB」を変える。

(3C1)「図形C」あるいは「性質C」が成立する範囲内で「図形A」を一般化する。

(3C2)「図形C」あるいは「性質C」が成立する範囲内で「手続きB」を一般化する。

(3C3)「図形C」あるいは「性質C」を一般化して(3C1),(3C2) を行う。

そして，3章では，それらによって生成される問題例を明らかにした。

最後に，4章では，このような問題の変容や問題生成の方略に対する作図ツールの影響を明らかにすることと，探究を支援するための環境としての作図ツールとの関係について考察した。

本稿で明らかにした問題生成の方略は，作図ツールに適したものの中のほんの一つに過ぎない。他にどのような方略があるのか，またそれに対応する教材や指導法はどうあるべきか，などに関する考察は今後の課題として残されている。

飯島　康之

付記　Geometric Constructor ver.3.0からver.3.1への移行での変化

Geometric Constructor ver.3.0は，3.0Jまで細かい改良を行った。主な改良は，ユーザーインターフェイスの改良や変数，モジュールの構造化，処理の高速化，FM-R（50系，70系），TOWNS への移植，コンパイラの移行（Quick BASIC 4.5からMS-BASIC 7.1,9801版のみ）である。実行ファイルも小さくなり，9801・通常版で約340KBになった。

ver.3.1 への大きな変化は，文書の参照・記録の改良である。これまでも，ヘルプメニューからの文書参照は可能だったが，Geometric Constructor に関する全般的なことの参照に過ぎなかった。図形別の問題やヒント等の参照はできず，学習にはあまり生かせなかった。

そこで，ver.3.1では，F5キーとShift＋F5キーによって，それぞれの図形ごとの文書の参照・記録を簡単に行えるようにした。つまり，F5キーを押すと，現在使っている図形に関わる文書のリストを明示し，それを読むことができる。また，Shift＋F5キーを押すと，現在使っている図形に関わる文書を自動的に記録することができる。これによって，オンラインヘルプと同様の感覚で，それぞれの図形に関わる問題や問題の発展の仕方，動かし方に関するヒントや問題解決のときのためのヒント等を記録・検索できるようになる。

注

1．飯島，「作図の構成的な性格と computer による支援について－九点円の作図に関する数学的探究に焦点を当てて－」，数学教育研究，5(1990)，上越教育大学数学教室，pp.35-46
飯島，「図形の動的な扱いとコンピュータ上での実現について」愛知教育大学教科教育センター研究報告，vol.15(1991),pp.341-352
2．飯島，「作図の構成的な性格とコンピュータによる支援について（その２）－作図と変形に内在する２つの関数的側面について－」，イプシロン，33(1991),pp.33-54
3．いくつかの文献に関する紹介は，次の中で行っている。
飯島，「コンピュータで作図に関わる活動がどう変わるのか－作図ツールに関する文献の紹介－」新しい算数研究，東洋館，No.250(1992),59-62
また，事例を中心にした考察は，以下の中で行っている。
課題提示法研究会（飯島担当部分），「場面から問題へ」，数学教育，明治図書，1991.12月号－1992.2月号
4．Dewey,J. "Logic ： The Theory of Inquiry",1938,p.108
5．竹内芳男他，『問題から問題へ －問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善－』，東洋館，1984
6．清水美憲，「中学生の作図問題解決過程にみられるメタ認知に関する研究」，数学教育学論究，日本数学教育学会，vol.52 (1989)，pp.3-25
7．「作図ツール」という概念は，次の中で定義している。
飯島，「作図ツールの導入に伴う作図の新しい役割について」，第24回数学教育論文発表会論文集(1991)，日本数学教育学会，pp.275-280
8．図形間に「依存関係がある」という表現では少し弱いかもしれない。より明確に言うならば，「図形Ａは図形Ｂの関数である」ということであり，「図形Ａの種類が変わると図形Ｂの種類が変わる」あるいは，「図形Ａの種類が変わっても図形Ｂの種類が変わらない」ということを探究する契機があるということである。そして，具体的に，どのような探究ができるのか，また作図ツールを使うとその探究がどう支援されるのかという点が，本研究の基本的なテーマなのである。