

Computerによる動的な図形教材の開発について

—— “Geometric Constructor” を用いた探究的学習のために ——

愛知教育大学 飯島康之

0. はじめに

本稿では、computerを利用することによって、図形教材の作成、特に、動的な図形の教材作成が、これまでのものと大きく変化させることができることについて論じる。そのため、まず1章では、数学教育研究の中でcomputerの利用をどのように捉えていくかを、特に問題解決との関連について述べる。次に2章では、動的な図形教材の開発・実践が、これまでどのような困難点を持っていたかを明らかにし、それを解消するための要件を明確にする。そして3章では、それらの解消のために筆者が開発したソフトウェアの基本的な機能を述べ、要件に対してどのように対処したかを明らかにする。そして、4章では、そのソフトウェアを使って、どのような教材の作成ができるのか、またそれらを使って、どのような学習過程が考えられるのかを明確にする。

1. 学校数学におけるcomputer利用

1.1 computerの普及と使いこなすノウハウの不足

ここで改めて述べるまでもなく、学習指導要領の改訂などに伴い、学校へのcomputerの普及は本格的なものとなってきた。しかし同時に、一体それをどう生かすのかということに対する知見は、必ずしもそれに対応するところまではいっていないように見える。特に、現場の先生方を中心とするの研究会などでは、computerの利用に関する先生方の関心の高さを感じるのであるが、同時に、今までの授業ではできなかったようなこのような内容を、このようなやり方ならば扱えるとか、今までの授業とほとんど同じ形態でも、少しcomputerをこのように使うと非常に効果的になる、などのいわばノウハウに関する知見があまり蓄積されていないように思える。

このような、最早導入は決まっているのに、それを使いこなすためのノウハウが不足しているという状況が生じている原因の多くは、computerに関わる出来事が日進月歩で変化していることにもよるが、同時に、研究者のレベルでの開発や知見の蓄積の不足、そして、computer利用に関して議論をするための概念の不足なども大きな原因になっているのではないだろうか。特に、これまでの数学教育とcomputerとの間に生じるべき、様々な相互作用があまりないことが、大きな障壁になっているのではないだろうか。

CAIの専門家など、システムの開発を行っている人の数は元々少ないし、開発を行っている

人は必ずしも教科教育の専門に詳しいとは限らないので、授業の中で、どのような過程を支援すべきかという点に関する概念が少なく、そのシステムがなければできないような授業像に関する考察が少ないように思える。一方、数学教育に関する研究者の中で、computerの利用の仕方を積極的に開発する人はそれほど多くないし、まして自分自身でソフトウェアの開発を行う人は非常に少ないため、数学教育の中の多くの概念は、ソフトウェアの開発に適した形に整備されていないままである。従って、数学教育のこれまでの研究を積極的にソフトウェア開発や利用の仕方の研究に生かしていくのは難しい。例えば、数学教育の中で「数学的思考方」という概念はよく使われるが、おそらく、ソフトウェアを開発する人にこの概念を提示しても、それを支援するためにはどのようなシステムを開発したらよいか、全く検討がつかないであろう。

このような状況を打開するためには、学校に並んだcomputerの機器に現場の先生方が格闘するだけでなく、数学教育の研究者の側も、様々な面での努力を積み重ねていく必要がある。

1. 2 カリキュラムや学習形態に変革を起こしうる存在としてのcomputer

computerの導入に数学教育全体が振り回されるべきでないという主張がなされることもないわけではないが、一方、数学教育がcomputerによるインパクトを考える必要が生じているのは、学習指導要領に登場したからという、現実的な理由からでなく、本質的に、computerは、教育に関して大きな変革を起こしうる存在だからである。

具体的な授業場面での変化から考えてみよう。無理数の学習を行っているときに、 $\sqrt{2}$ を生徒が希望する任意の桁数まで計算し、表示したものと、循環節がかなり大きくなる分数を計算したものとを与えるだけでも、生徒のイメージはかなり変化するであろうし、関数のグラフを正確に描くようにするだけでも、かなりの変化があるだろう。高校などでは、三角関数をいくつか組み合わせて、どんな関数はどんなグラフになるかを調べなさい、というような活動を行うことによって、それらの合成や「うねり」の現象などを、与えられるものとしてでなく、「発見すべき現象」として捉えることも可能になるのではないだろうか。

もちろん、そのような具体的な授業場面だけに、変革に限られるわけではない。例えば、一次変換の学習やGauss平面の学習も、ソフトウェアを工夫すれば、今まで以上に効果的に学習できる可能性があり、結果的には、高校でのカリキュラムを大きく変えられる可能性もある。本稿で扱う事例の場合ならば、中学校で扱う「作図」というものをかなり変革することも可能であろう。また、「9の倍数の判定法」の学習などを元にして、「nの倍数の判定法」を調べたり、「n進法の場合の判定法」を調べたりすることも、可能になって、現代化当時の（筆者自身が習った印象では、10進法と5進法などの変換の練習でしかなかった）n進法を、別の角度からカリキュラム化する可能性も出てくるかもしれない。

そして、同時に、これらのことは、カリキュラムの変化だけでなく、教授＝学習の形態を、より探究的で能動的なものにシフトしていく可能性をも含んでいるのである。

ここに挙げたものは、ほんの数例であるが、それ以外にも、様々な可能性が、カリキュラムに関しても、教授＝学習形態に関しても存在している¹⁾。今すぐ授業の中で実現できるレベル

にまで研究・開発が進んでいるものがどれだけあるかはわからないとしても、重要なのは、大きな可能性をcomputerは内包しているという点であり、その可能性を引き出すような開発のほとんどは、まだ手付かずのままに残っていることである。

1. 3 知的活動のツールとしてのcomputer利用

上記のような目的のためのcomputer利用の在り方を考えていくためには、主に、知的活動のツールとしてのcomputer利用を考察していくことが重要である。ツールとしての利用の最もポピュラーなものとしてはワープロがある。文章の作成・修正・編集などを手作業で行うよりも非常に容易に行えるようにしてくれたワープロは、作文という活動を従来のもを大きく変える可能性がある。中・高校まででの効果については筆者は明るくないが、大学・大学院での論文作成においては、現在ではなくてはならない存在となっていることから推察できるであろう。ワープロ以外のもので、中学校で非常に有効な例としては、作曲やcomputer graphicsあるいはCADなどの利用がある。これらはいずれも上越教育大学附属中学校で拝見した例ばかりであるが、例えば、作曲用のソフトでは、五線譜に音符を入力すると、それを演奏する機能を持っている。この機能が実現されるだけで、すべての生徒にとって、「作曲」という学習活動が身近なものになり、休み時間にさえ、このソフトを使うために生徒がcomputer室に押し掛ける状況である。

音楽の授業で「作曲」をすべての生徒が夢中になって行うというようなことは、computerがなかった頃には想像することもできないのではないだろうか。このような、computerがなかったときには、不可能ではないにしても、非常に扱いにくかったものを可能にするために、有効なツールを開発し、利用していくことが、重要な観点になるのではないだろうか。

1. 4 数学教育から行うべき課題＝抽象すべき機能の明確化

前節では作曲での成功例を挙げたが、音楽に限らず、美術のcomputer graphics、技術の設計図のCADなど、技能に関するものはこれまでもかなりツールも開発されているし、またその効果もはっきりわかるようである。しかし、数学教育も含めて、より認知的な領域が関わってくる教科の場合、本当に役に立つツールは、まだまだ非常に少ないのが現状である。おそらく、その原因の一つは、認知的なものになるほど、ツールの中に抽象すべき機能を明確にすることが難しいことが挙げられるであろう。換言すれば、そのようなツールの開発に対して数学教育が貢献しうる第一の点は、抽象すべき機能について提言を行うことにあるはずである。そして特に、これまでの教育実践の中では扱いにくかったより高次の目標を実現するためには、どのようなことが障害になっているのか、そして、どのような機能がサポートされれば、その目標はより実現しやすいものになるかを明確にすることが必要なのである。

1. 5 computerによって実現されるべき課題＝探究的な学習の可能性の増大

そして、逆に、そのような障害と抽象すべき機能が提示されれば、その機能を何らかの方法でcomputerによってサポートすることにより、より高次の目標を実現する可能性を高めることが、computerが担うべき課題となる。問題解決のためのツールとして使われるcomputerは、生

徒自身の思考のための助手としての機能を発揮するのであるから、芦葉氏が指摘するように、

「1 探究の過程をたどり、創造的活動を行う。

2 主体的に学ぶ能力、意志、態度や学習への意欲を育てる。」²⁾

ことが中心的な課題になってくるのである。

実際、そのような可能性は非常に高い。これまでの状況では、問題解決に関する効果的な授業を成立させることは、非常に難しいし、多くの場合、かなりの熟練が必要である。実際、多少オープンな問題を扱う問題解決や、現実的な問題を扱う問題解決を行うと煩雑な数がすぐに出てくるが、そのような複雑な計算は生徒のやる気をそぐ。グループごと、あるいは個人ごとに、テーマや数値が異なると、教師はそれらをサポートしたり、アドバイスしたりするのが大変である。データの収集や計算の実行などには、多くの時間がかかり、他のカリキュラムを消化するのに必要な時間まで食い込む余裕はない、など実に様々な障壁が存在する。

これらの障壁の一部は、おそらく、computerをうまく利用することによって、かなり解消できるであろう。複雑な計算でも、演算さえきちんと把握できれば、扱う数自体が複雑かどうかは問題ではなくなるし、計算に要する時間も非常に少なくてすむ。変化の様子を調べるのに必要な、膨大な例についてチェックすることも可能になる。生徒の学習過程の記録や分析、そして典型的な学習経過に対する対応などもかなりの部分については対応可能であろう。このように、多くの教師にとって、問題解決を「扱える」ものにするためには、computerは大きな可能性を持っていると言えるのである。

2. 動的な図形教材の開発と実践の困難点

2. 1 何故動的な図形教材を取り上げるのか。

前章で指摘したような、数学教育で扱うべき高次の目標に関連するものとして、本稿では、「動的な図形教材」を取り上げる。これを取り上げる理由を、明確にしておく。第一の理由は、

(1) 動的な図形観を具現化する。

という点にある。

「動的な図形観」の重要性は以前から指摘されてきた。前田氏は、「ペリー以来の数学教育は、なるほどユークリッド教本をちりぢりに破って、そのいかめしい姿をこわしてしまったが、結局、その破片を拾い集めて、不細工な貧弱なモザイクを作ったにすぎず、その小片の一つ一つは、依然としてユークリッドの破片であり、その根底をなす図形観は、依然としてユークリッド的であると思う」³⁾と述べ、そのような図形観を打破するのに必要なのは、「方法ではなくて、図形観そのものの転換」であること、そして「動的、連続的な図形観を導き入れること」⁴⁾と述べている。

ここで重要なのは、動的な図形観というものが、特定の数学的な内容に従属するものではないという点である。前田氏も、静的、個別的なユークリッド的図形観の打破として、従来

試みられた方向として、解析的な方法の導入を取り上げると共に、「ただ、解析的な方法で証明を試みたというだけのことであって、図形観そのものが変わったということにはならない⁵⁾と指摘している。同様のことは、ベクトルや一次変換などにも述べるができるであろう。ベクトルや一次変換を教育内容とすることが、そのまま動的な図形観を導入することと等しいわけではない。どのような内容を学校数学の中で教えるべきか、またどの内容はそのような動的な図形観を概念化したものであるかを検討することは重要であるが、体系そのものが動的であることを表現しているわけではない。むしろ、「動的」は「静的」とのペアで存在するもの、相対的なものであることを考えると、一つの体系という枠の中にある命題が位置づくことを証明することなどは、(相対的に見て) 静的な行為のはずなのである。従って、問題となってくるのは、「内容」というよりは、むしろ、図形をどのように捉えていくかという、見方や考え方なのである。

このような点から、数学的な見方や考え方を調べると、「動的な見方」という概念に遭遇する。この「動的な見方」の指し示す内容は、必ずしも図形領域に限定されるものではないが、例えば、吉田氏³⁾の定義の中でも、「物理的(外面的)な動的な見方」に対して、「これは、点・線・面などを動かしたり、変形したりして思考することである」と記述されているように、図などに表現し、その図を動かせるものとして考えていくことが基礎となってくる。

このように、動的な図形観をより具現化するために必要なこととして、図形を動かせるものと考えていくこと、そしてそのための基本的な機能として、図形が動かせるということを取り上げることが、ここで動的な図形教材を取り上げる第一の理由である。

第二の点は、

- (2) 動的図形教材の開発はcomputerなしには実現が難しい。

という点である。前出の前田氏が、「静的、個別的なユークリッド的図形観を、どのような方向に打破すべきかということになると、なかなかむずかしい⁷⁾と述べるように、それほど簡単なことではない。実際、特定の内容を教えればすむということならば、問題は簡単だが、ある意味では、操作的な対象でない「観」や「見方」として概念化されたものの教授=学習は、それほど簡単に成立するわけではない。前田氏自身は、「図形の持つ機能に着目する」ということを指導原理とし、素材の収集、指導体系(指導内容)の探求、指導法の研究というプログラムを提出されているが、その主張を実践に移すのはそれほど容易なことではないし、また、そのプログラムが十分な形で実行されたと言い切ることもできないであろう。同様のことは、「動的な見方」の研究に関しても指摘することができる。それらの困難点をcomputerによって、支援することができるのではないかということが、本稿で「動的な図形教材」を取り上げる第二の理由である。

そして、第三の理由は、

- (3) 現行のカリキュラムの内容を扱うことを出発点にでき、更にそこから、様々な問題解決への発展を見つける可能性を持っている。

という点にある。

この点は、上述の2つの点とは性格が異なり、主として、実践の中でcomputerをどう生かしていくかという観点からのものである。前章でも、知的活動ツールとしてのcomputer利用を取り上げたが、このようなツールとしての利用の利点の一つは、これまでの授業の中でも使えるような使い方から始められ、次第に、より発展的な利用の仕方を工夫できる点にある。

実際、computerを使えばいろいろなことができることがわかったとしても、それを使う授業はこれまでの授業とは根本的に異なるものであるとすると、これまでの授業形態、内容との連続性や、教材の蓄積が非常に大きな問題点となる。おそらく、生徒の方は比較的短時間でcomputerを使った授業に慣れることができるだろうが、教師の方はそう簡単に教授スタイルを切り換えられない。そしてまた、使う授業と使わない授業とがほとんど無関係のような存在だとすれば、全体的には、かなり非効率な数学教育が実施されることになるであろう。従って、円滑な導入・定着のためには、出発点は従来の授業とほとんど同じ状況の中で使えるところに求め、そしてそのような使い方の連続的な延長線の上に、様々な発展的な形態を生み出していくという、漸進的な利用形態の発展と、授業形態の変化が不可欠ではないかと考えられる。動的な図形教材というものが、このようなテーマに相当するのかどうかは、多くの人々の判断に委ねられるべきものであるが、筆者自身は、そのようなテーマに相当するという仮説を抱いている点が、ここで取り上げる第三の理由である。

2. 2 動的な教材と教具の開発・実践の困難点＝教材，教具の持つ物理的な束縛

動的な教材というものの開発・実践が困難であることの原理的な理由、つまり「観」や「見方」と結びついているという点は、前節でも述べたが、同時に、より物理的な理由もある。そして、computerが主として解消してくれるのは、この物理的な束縛を解き放ってくれるという点であり、おそらく、その物理的な束縛の解消により、「観」や「見方」へのアプローチもより容易なものにしていくという点にある。そこで、この物理的な束縛から生じる困難点を、本節で検討しておく。

まず、具体例から考察を進めていこう。動的な教材としてうまく生かされている一つの例としては、中点連結定理がある。これは、「 $\triangle ABC$ がどのような三角形であっても、 $MN = \frac{1}{2} BC$ 、 $MN \parallel BC$ になる」という内容を、「 BC を固定したときに、 A をどのように移動しても $MN = \frac{1}{2} BC$ 、 $MN \parallel BC$ になる」という命題に結びつけ、図-1のように、物理的な教具として実現している。そして、点 A をどのように動かしても BC が一定ならば MN も一定になる

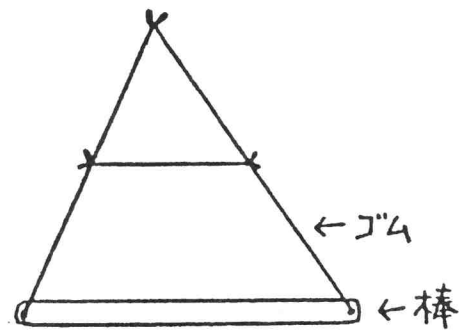


図-1

ということ、 BC も MN も伸縮しない素材を使っているのに、いつもうまくいく」という現象として捉えることができるわけである。

こうして、教具として実現するためには、考察しようとしている内容を分析し、それを物理的な条件に翻訳し、そしてその条件を満たす物理的な系を構築すれば、教具が開発できるというプログラムが明確化できたが、同時に、このことは、物理的な束縛をも明らかにしてくれる。

第一には、少し違う扱い方をしようと思うと、異なる教具が必要になる場合が多い点である。例えば、前出の midpoint 連結定理の場合でも、固定するのを BC でなく、 AB にすると、先の教具では、実現できない。似た教具として、図-2 のようなものを作ったとしても、 MN がゴムという素材を使ったとすれば、変形したときに、図-3 のようになってしまう。せいぜい、図-4 のように、 MN を結ばずに構成し、考察するとか、図-5 のようにするという工夫であろう。しかし、このように、ほとんど同じ内容の扱いに対して別々の教具が必要になってしまうのでは、用意するのも大変というだけでなく、単なる「説明具」にしかならない。同じ教具を使いながら、「こういうことをしたらどうなるだろう」ということを考えたら、それほど大きな負担をしなくても、利用できる必要があるのである。

第二には、そもそも、そのような物理的な翻訳は簡単ではないということである。例えば、接弦定理を、図-6 のよう

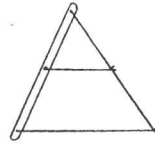


図-2

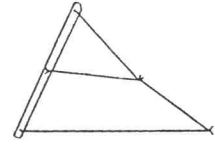


図-3

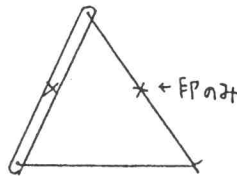


図-4

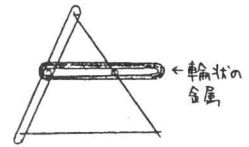


図-5

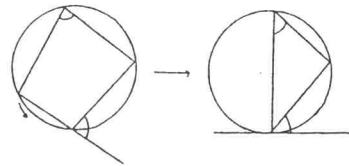


図-6

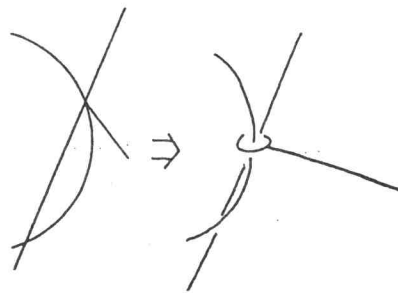


図-7

に円に内接する四角形の性質の極限として理解する場面を考えてみよう。これを簡単に実現することはできるであろうか。もちろん、できないことはない。例えば、円と2直線との交点部分を図-7のように物理的に翻訳することによって、図-8のような教具を作ることにもできる。しかし、接弦定理程度の内容でも、この程度の特異な工夫と、それを工作する手間が必要になる。そして、さらに、その

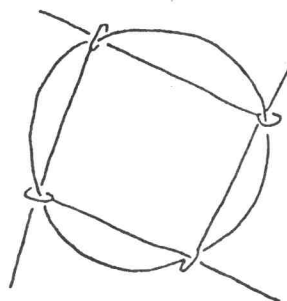


図-8

ような教具を与えられた生徒は、その教具がなるほどその条件を実現していることを、今度は解説しなければならなくなるのである。このような、様々な系の満たす条件の翻訳は、それ自身としては面白さがあるが、目的が「動的な見方」の方にあるとすれば、やはり、大きな物理的な束縛になってしまうと言えるであろう。

さらに、ここで付け加えておくとするならば、これらの困難点は、まさに、「動的な図形観」を「観」や「見方」の指導として扱っていかざるをえない理由の一つにもなっている。すなわち、接弦定理の場合、図形を実際に動かしたいのだが、現実的には、それは困難であるため、2つの図を与えることによって、両方の図、あるいは一方の図を見たときに、それらを連続的変形の一部と見なすことを観あるいは見方として要求されるのである。

しかし、その目標をより具体的に、そして操作的にするためには、そこで「行いたい」はずの処理の仕方を一つの「過程」として定式化し、より容易に理解・習得できるもの、より教授可能なものとして扱っていく必要があるのである。

2.3 computerによる動的な教材開発のための要件=物理的な束縛の解消

前節の考察から、「物理的な束縛」を解消するという点で、computerのソフトウェアが機能するはずであるならば、満たさなければならない要件として、以下のものを同定できる。

- (1) 動かせること。
- (2) 作成、変更が容易であること。
- (3) 固定する条件を様々に変えられること。
- (4) 測定なども容易にできること。
- (5) 動的な図形「観」や「見方」の一部をより操作的で具体的な「過程」として定式化し、利用しやすいものとする。

3. 教材開発のためのツールとしてのソフトウェア

3.1 Geometric Constructorの開発の背景

筆者は現在、2.3の要件に応えるためのソフトウェアとして、Geometric Constructorを開発中である。その経緯を簡単に述べておきたい⁸⁾。

まず、出発点は、筆者が上越教育大学に在任中の授業で九点円の作図を学生と共にに行ったときに、「正確で迅速な作図をcomputerにやらせることはできないだろうか」と考えたところから始まる⁹⁾。最初は、N88-BASICで簡単なものを作ったのだが（3つの座標を入力し、三角形と九点円を描くプログラム）、より汎用のもの、そしてより使いやすいものを工夫してみた。

もちろん、そのときに、初めから、プログラムを自作することだけを考えていたわけではない。既成のソフトで有効に使えるものはないかどうかも検討してみた。実際、ソフトの中には、いわゆるCADなど、図形処理を行ってくれるものも多いからである。しかし、結論は、「花子などの作画ソフトやほとんどのCADは、数学での作図、変形には適さない」というものであった。それらは、確かに紙の上に作図するのとはほぼ同じような感覚で、様々な図形を作図することができるし、ある部分を修正することもできる。しかし、そこで行われていることは、「正確に作図をすること」「ある部品、(例えば窓)を拡大縮小したり、別の場所に移動・複製すること」「3次元的な存在である建築物を、建設する前にその感性の要すを提示できるようにすること」などなのである。そして、おそらく、建築の設計図や簡単なイラストを描くためには、おそらく、これらの要素で、ほぼ十分なのである。だが、それらだけでは、図を動かすことができない。動かせないのでは、2.3の要件の中の、最も必要なものが満たされていないことになる。

換言すれば、これらの既存のソフトで必要とされるのは、前田氏が批判しているような、「静的、個別的(要素的)、有限的な図形観」を具現化したソフトであり、またそのような処理のためには、そのような意味での静的な図形観で十分なのである。

このような、「動的な図形観を具現化したソフトの欠如」が、現在のソフトウェア開発のための、一つの大きな要因となっている。

3.2 動かせる図形とは何か＝本研究での「動的」の意味

従って、ソフトウェアの開発に当たって、最も基本的であり、同時に、本研究の中での「動的」という意味を明確にする上で、最も基本的なのは、「図形を動かすとはどういうことか」と

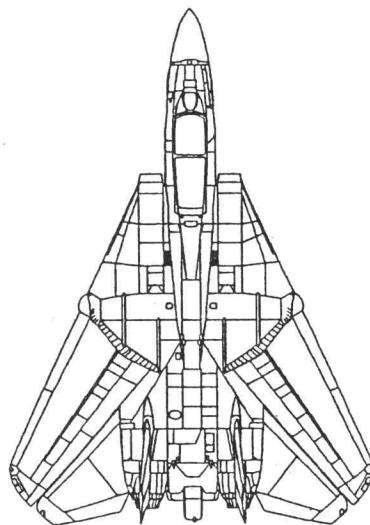


図-9¹⁰⁾

いうことを明確にするところである。実際、これまでの数学教育の中での「動的」という言葉が「図形」に関連して使われてきた場合を検討してみると、それぞれ違った意味において使われていることがわかる。

例えば、前出の吉田氏らの場合、視座は指導に置かれているので、「動的」には様々な意味が込められているため、その特徴はあまり明確ではないが、前田氏の場合、動的とは、「図形の持つ機能に着眼する」ということであり、例えば、「球はどの方向にもころがりやすく、円筒は一方方向にころがりやすい。」などを最も簡単な例として挙げたり、連続的な変化の中での考察を指摘している。河口氏は、「動的という意味を、現代幾何学の根底である変換群に求め、小、中、高の各学校の図形教材が主としてユークリッド幾何学であることを考え、運動群（対象移動・平行移動・回転移動およびそれらの組み合わせの全体）に相似移動を加えた「図形の4則」に基盤をおくことが絶対に必要であり、また、ごく自然で最も効果的であることを主張」している¹¹⁾。また、Logoを作ったPapertの場合には、図形を、点が運動した軌跡として捉え、その運動が微分方程式によって記述されることを出発点とし、各点での接ベクトルを与えることを定式化したTurtle幾何学をLogoの中に持ち込んでいる¹²⁾。

本稿で考えている「動的」という意味は、前田氏の言う「連続的な変化」をより厳密に定式化したものと言える。つまり、前田氏は、「図形の連続的な変化とは、図形が連続的に形や位置を変えていくことである」と述べ、「もし、映画が利用できて、画面に不整形な四角形が形や位置を変えながらおどっていたのが、やがてしだいに動きを少なくしつつ形を整えてきて平行四辺形になってとまり、またそれが左右に揺れながら（辺の長さは変えないで）、長方形になって止まり、またそれが縦や横に伸びたり縮んだりしながら、正方形になって止まるというような場面が映写できたら、影絵遊びよりはいっそう印象が鮮明であろう」¹³⁾と述べているが、このようなことを、映画のように一方向的に与えるのではなく、生徒の意志によって変化させるという意味で双方向的に与えることを想定している。

前田氏は、「このような連続的な変化の着想は、ふつう、平行四辺形の学習で、4本の棒で作った平行四辺形の枠を、ぐらぐら動かしたりする観察には利用されているが、もっと積極的に活用できる未開発の分野である」¹⁴⁾と述べているが、この見方をより明確に定式化し、ほとんどの幾何図形に通用するものとするためには、まず作図というものの性格を明確に捉えることが出発点となる。

その際に、まず重要なのは、作図自体を一つの関数として捉えることである。例えば、「線分をとる」ということを「動かす」という観点から考えると、

「線分は2点を結べばいいのだが、その2点はどこにとっても構わない」

「元になる2点を決めると、できる線分も決まってしまう」

「元になる2点を少しずつ動かすと、できる線分も少しずつ動く」

というように、一見同じ資格のもの集まりに見える図形の中を、

「自由にとっていい部分」+「それを元に構成される部分」

とに分けること、つまり、図形の中の独立変数と従属変数を明確にすることが重要である。

さらに、そのような関数としての作図は、いくつかの基本的な作図を元に、様々に複雑なものが、階層的に構成されるものであることが明確になる¹⁵⁾。そしてそれらを生成するためのシステムをプログラムに翻訳することによって初めて、図形を動かすためのソフトウェアとしてのGeometric Constructorが形成される。

3. 3 Geometric Constructorの設計における基本的な考え方

前節の検討を経て、2. 3の要件に対して、次のように応えることができるようになった。

- (1) 作図を一種の構成的な関数として扱うことによって、computerによる正確で迅速な作図が可能になった。そして、映画やビデオが、実際には数多くの静止画を見ているのに感覚的には動いているように見えるのと同じ原理で、元になっている点を少しずつ移動したときに見える図を連続的に描画することによって、図が「動いている」ように見えるようになる。
- (2) 作図などの操作は、ほとんどメニューの選択によって可能にしたため、図をどのように構成したらよいかさえ明確にすれば、簡単に図形を作ることができるようになる。作図の手続きなどもファイルに記憶でき、しかもメニューの中で選択できる例も自由に組み合わせることができるため、教師が作図したものを生徒が簡単に利用するという使い方も可能である。
- (3) 動かすことを定式化するために、元になる幾何の対象は、すべて「点」に制限した。そして、「動かせる点」と「動かせない点」を区別し、その点を任意方向に移動したり、ある回転を施したりすることができるようにした。円周角の定理を調べる場合のように、点が円周上である必要がある場合などは、

まず、三点を入力、その三点を元にして、外接円を描き、その円周上の点を作る。

「円周上の点」はその円周の上のみしか動けないという制限をつけているので、任意の運動ではなく、円周上のみを動くことになる。

というような処理によって可能になるようにした。他に、直線、線分、半直線上の点もある。

- (4) 測定も、メニューの中で、二点間の距離や角度などを指定すると、図が動くのに応じて、それらが変化する様子も示されるようにした。三角形の合同や相似、三点の位置関係の判定なども用意した。もっとも、これらは、説明のときには使えても、探究的な利用では、実際にはあまり使わないのかもしれない。
- (5) 本研究では、動的な図形「観」あるいは「見方」の一部を、図形を連続的に動かすという、具体的で、操作的な「過程」として定式化し、それをソフトウェアとして実現することによって、より容易に提示・利用することが可能になった。

3. 4 Geometric Constructorの主な機能と使い方

本節では、Geometric Constructor(ver.2.5)における主な機能を述べる。

- (1) 基本的なメニューの流れ

図-9は、大まかなメニューの流れを示している。そして、図-10は、標準メニューにおける画面例である。メニュー項目の中のいくつか(四角で囲んであるメニュー)は、実行

Computer による動的な図形教材の開発について

ファイルの外のファイルによって操作できるため、例えば、ある授業の目的に合わせたメニューの削除などのカスタマイズが可能である。

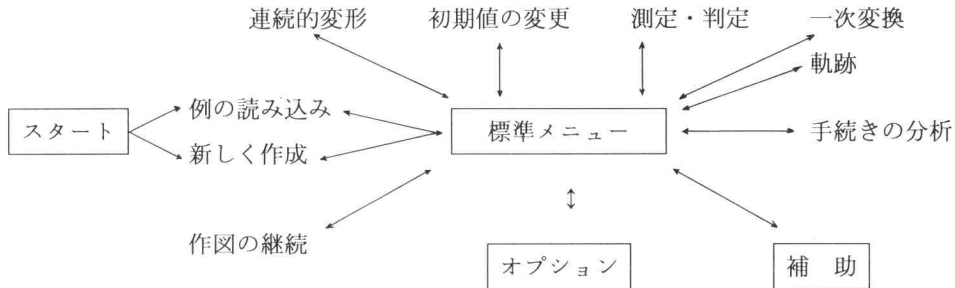


図-10

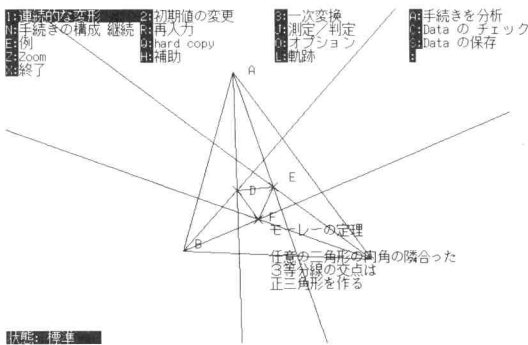


図-11

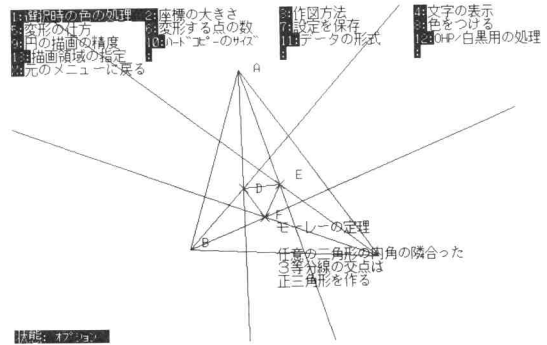


図-12

(2) 作図と分析

作図の基本的な手続きは、元にする n 点の入力、それまでに構成されてきた幾何学的対象を元にして、次は何を構成するか、どの幾何学的対象（点、直線、線分、半直線、円）を元にして構成するかを、順次メニューから選択することによって構成することができる。

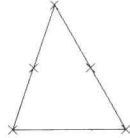
そして、すでに構成されている図形、あるいは作成中の図形について、その手続きがどのように構成されているかは、「手続きの分析」を使うと調べることができる。特に、教材作成として利用する場合など、注目したい図形に色をつけると使いやすい。例えば、これについては、オプションの中の「色をつける」を選択すると、6色と「表示せず」の7通りから選択して、それぞれの幾何学的対象に色をつけることが可能である。また、OHPを使ったり、ハードコピーをするためには、色の代わりに、いくつかの種類の色線が対応している。このような細かい設定は、オプションの中で行える。

この作図機能や分析機能を生徒が自分で操作し、より能動的な活動を行うことも可能だが、作図手続きはファイルの中に保存されるため、より簡単な利用方法としては、教師が教

材として作図したものをファイルに保存し、生徒にはそれを読みださせ、その図形に対して教師が操作して、その動きなどを生徒に提示し、理解を深めるための説明具として使うことも可能であるし、変形などの操作を生徒に委ねることも可能である。

今までに構成した図形を元にして新しい図形を構成する手続きを入力してください

6. 垂目 何を構成しますか
 1: 多角形
 2: 垂線の足
 3: メインに戻る



状態: 測定 操作 ↑ ↓: 候補変更 赤: 候補 緑: 選択済み return: 確定

図-13

手続き

線分
線分
線分
線分
内分
内分
外分
外分
線分

元にするもの

点A, 点B,
点B, 点C,
点C, 点A,
点A, 点B,
点A, 点C,
点E, 点D,

できるもの

→ 線分(1),
→ 線分(2),
→ 線分(3),
→ 点D,
→ 点E,
→ 線分(4),

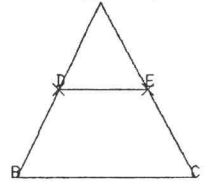
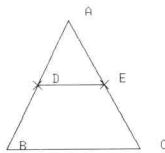


図-14

(3) 測定・判定

測定に関しては、やはりメニュー選択により、幾何的対象間の距離や角度、面積などや、いくつかの判定（三角形の合同、相似、3点の位置関係など）を指定することが可能である。

1: 距離 (2点)
 2: 距離 (1点と直線)
 3: 距離 (1点と円)
 4: 距離 (直線と円)
 5: 角度
 6: 三角形の面積
 7: 判定 (3角形/3点)
 8: 判定 (合同)
 9: 判定 (相似)
 0: メインに戻る



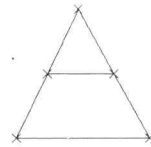
状態: 測定 操作

図-15

1: 連続的な変形
 2: 初期値の変更
 3: 再入力
 4: hard copy
 5: Zoom
 6: 補助
 7: 終了

8: 一次変換
 9: 測定/判定
 0: オプション
 1: 前跡

2: 手続きを分析
 3: Dataのチェック
 4: Dataの保存



DE 4.00cm

状態: 測定 ↑ ↓: 候補変更 赤: 候補 緑: 選択済み return: 確定

図-16

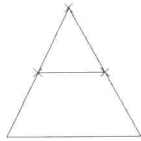
(4) 連続的な変形

この機能が、本ソフトウェアで最も基本的である。すべての作図は、 n 個の点の関数として構成されているので、その n 個の点のどれかを連続的に動かしたときに、図形全体がどう変化するかを調べるものである。変化のさせ方は、矢印キーを押すと、その方向に数ドット

Computer による動的な図形教材の開発について

ずつ変化する。一般には、4つの方向に変化するが、入力時の指定により、直線上、円上を動くようにすることもできる。

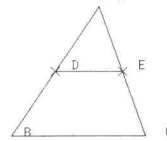
どの点を變形しますか



DE 4.00cm

機能: 変形 ↑ ↓: 候補変更 赤: 候補 緑: 選択済み return: 確定

図-17



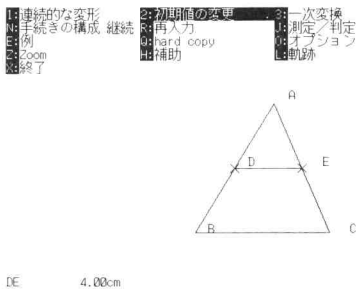
DE 4.00cm

機能: 変形 ← →: 変形 M, Esc: 終了 O: オフライン 確定

図-18

(5) 位置を取り直す

連続的変形をすると、ある図形を少し変形したときにどのような形に変形していくのかが分かるが、その中から、例えば、「元の三角形が直角三角形のときにはどうだろう」という疑問が生じてくることがある。また、連続的変形をしすぎて、元に戻すのが大変なときがある。このようなときに、すべての点を取り直すと便利なため、この機能がある。必要に応じて、座標軸、x、y座標の表示、移動するドットの細かさの指定などができる。



DE 4.00cm

機能: 標準

図-19

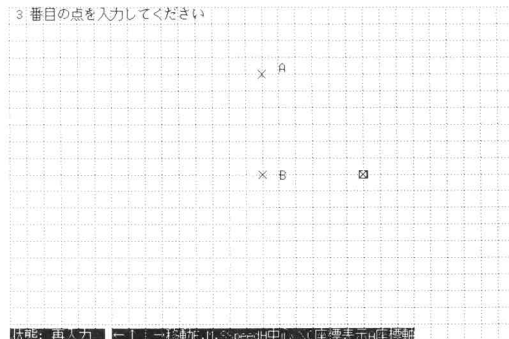


図-20

(6) 拡大・縮小

コンピュータが表示する画面はせいぜい640×400ドットなので、図によっては、細かいところがわからなくなることがある。また、内心を調べるような場合ならば、3つの直線が本当に1心で交わっているのかどうかをより詳しく確認したくなる。このような要求に応えるのがこの機能である。また、拡大・縮小をしたままで、図形を移動できるので、拡大したままでいくつかのハードコピーをとり、それを連結することにより、かなり細かい図を得ることもできる。

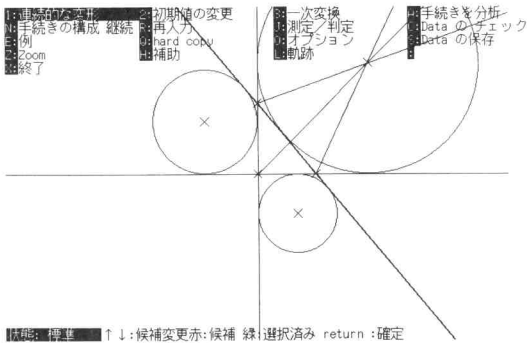


図-21

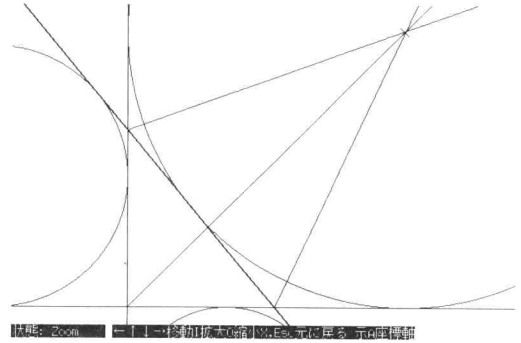


図-22 傍心の拡大

(7) 軌 跡

関数の変化の様子を記述するのがグラフである。作図では、それに対応するのが軌跡である。手による作図では、軌跡を実際に求めることは大変なため、学校数学の中では、軌跡の問題は、多くの場合、方程式などの応用問題として扱われやすいが、ここでは、容易に軌跡を描画できるため、関数に対してグラフが持つ役割と同じものをかなり実現することができる。

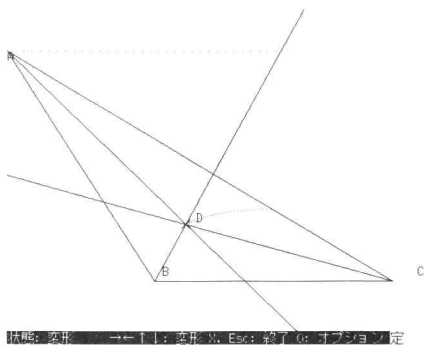


図-23 内心の軌跡

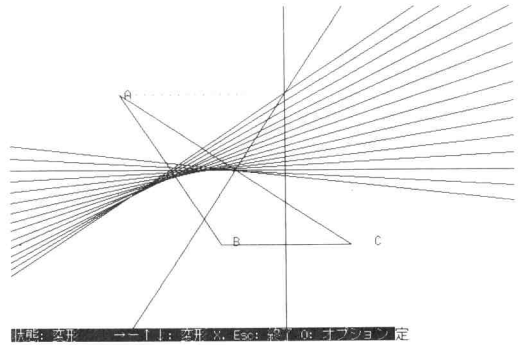


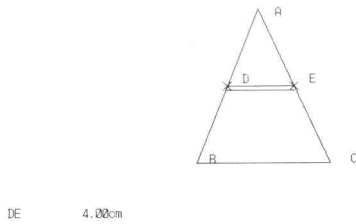
図-24 垂直二等分線の軌跡

4. ソフトウェアを利用した動的な教材開発と学習過程

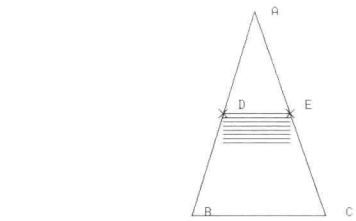
4.1 中点連結定理

例えば、図-1と同じものを作ってみよう。手続きは、図-14に示したようになる。どの点を動かしても連続的変形ができるため、図-1ではできなかった図-25のような変形も可能になるし、図-1と同じ変形の場合でも、図-26のように、軌跡を表示することによって、様々な場合を比較することができる。

また、証明に書かれている図も、図-27のように動かすことによって、この証明は、一つの特定の図を使っているけれども、実際には、他のどのような場合にも成立する一般的な証明であることを図によって示すことができる。

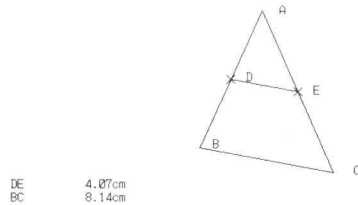


DE 4.00cm



DE 4.00cm

図-25



DE 4.07cm
BC 8.14cm

状態: 変形 操作: 変形, Esc: 終了, O: オプション, 定

図-26

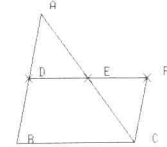
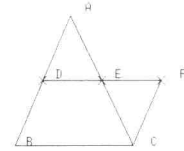


図-27

4.2 円周角の定理

次に円周角の定理の場合はどのような扱いが可能であろうか。一つの方法は、図28のように、まず事実から、その定理の内容が正しいことを推測することもできる。そして、いろいろな場合を調べる中から、簡単に証明できる特殊な場合を見つけ出したり、それを使って証明できる他の場合を見つけたりすることを支援することができるのである。

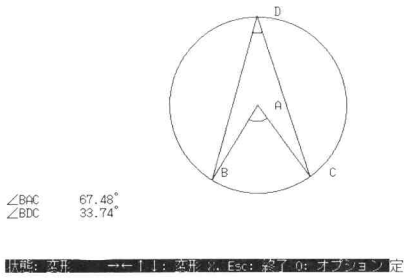


図-28

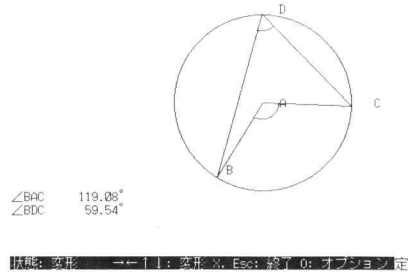


図-29

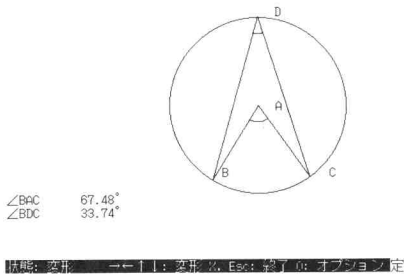


図-30

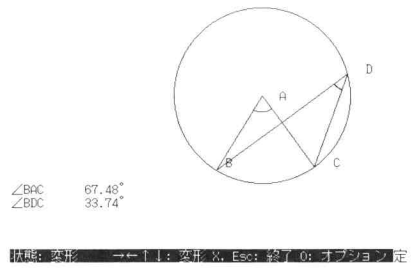


図-31

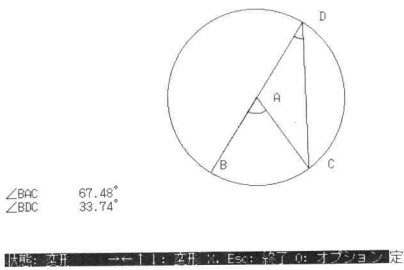


図-32

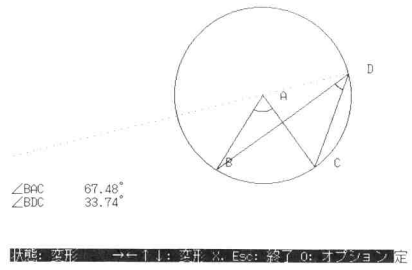


図-33

4.3 内心の応用問題

円周角の定理の場合に登場した推測という活動をより積極的に使う例としては、次のようなものがある。つまり、現在よく行われる形式では、「 $\triangle ABC$ の内心をDとすると、 $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC + 90^\circ$ となることを証明せよ。」という形で与えられる証明問題を、「 $\triangle ABC$ の内心をDとすると、 $\angle BDC$ と $\angle BAC$ にはどんな関係があるか推測し、そして証明せよ。」という、よりオープンな形で与えるのである。この例は、上越教育大学附属中学校の中野先生の提案で、

授業の中で試してみたのだが、2つの角の間の関係を推測する生徒の活動は興味深かった。

「 $\angle BDC$ が $\angle BAC$ の2倍じゃないかな」「大体そうだけど、少しずれているよ」「どうせ多少の誤差があったりするんじゃないか」「三角形をずらしたら、2倍じゃなくなってきた」などと、推測を漸進的に変化させながら、より堅固なものにしたり、その検証という目標に合わせて、特殊な図形を作ったりする活動が自発的な形で生じたからである。

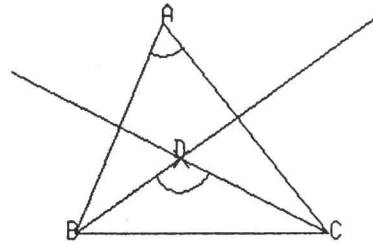
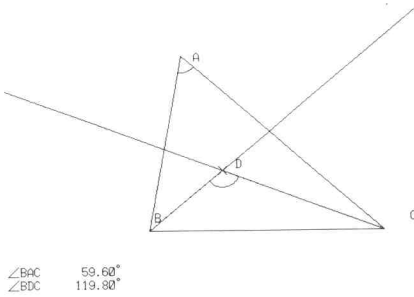
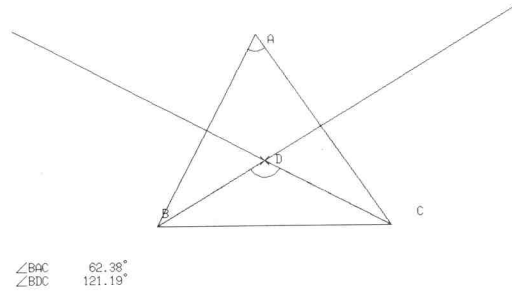


図-34



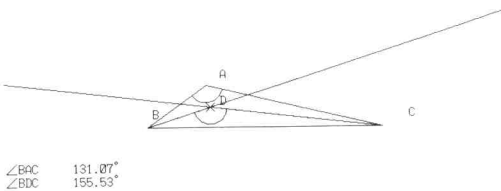
機能: 変形 一 | 変形: Esc: 終了: O: オプション: 定

図-35



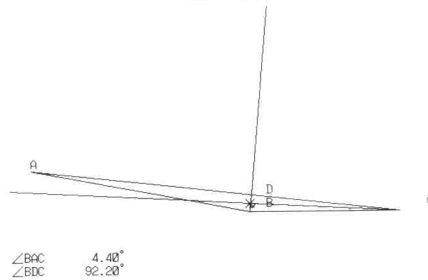
機能: 変形 一 | 変形: Esc: 終了: O: オプション: 定

図-36



機能: 変形 一 | 変形: Esc: 終了: O: オプション: 定

図-37



機能: 変形 一 | 変形: Esc: 終了: O: オプション: 定

図-38

4. 4 これまでの授業への組み込みからより探究的な利用への漸進的な移行

上記の3つの例から示唆されるように、本ソフトウェアの特徴は、これまでの授業の中で黒板などを使うのと同じ感覚でcomputerが使えるところを出発点として、様々に使い方を変えることができる点にある。computerが教室に一台で、大型ディスプレイあるいは、液晶ディスプレイ+OHPならば、主として先生が操作し、動きを見せるところを5分間だけ使うこともできるし、連続の変形のところを1人の生徒に操作させ、クラス全員で見ることにも可能である。クラスに数台ならば、グループごとに調べたり、推測をさせるという使い方もできる。一人一台ならば、作図なども自由にさせて、より探究的な課題を与えることも可能であろう。

そのような段階を経ていくことによって、一方においては、computerの効果的な利用法を、教師自身が身を持って探ることができるはずである。そして、このような機能を実現できれば、このような教授=学習が可能であるという要求もまた、明確になり、現場で使えるソフトウェア開発に対して提言を行えるようになるであろう。

そしてまた、一方においては、数学教育に対してもインパクトを与えられるはずである。特にこれまでの数学教育の中で研究されてきた様々な「見方」「考え方」などの教授=学習を深めるためには、computerは使えるのかどうか、もし使えるならば数学教育の法では、さらにどのような理論形成が必要かなどの、様々なインパクトを与えることができるはずである。そして、それらの蓄積は、様々な教材の開発・実践を経て、カリキュラムなどの具体的な検討などにも結びついていくのではないだろうか。

5. 結 語

本稿では、これまでの動的な図形教材の開発・実践における障害の一つとして、教材・教具の持つ物理的な束縛を明確化した。そして、そのような束縛を解消するためには、computer利用において、どのような要件を満たす必要があるかを明示した。そして、そのようなソフトウェアを開発するために、作図の持つ階層的に構成される関数としての性格を明確化し、そしてそれをソフトウェアGeometric Constructorとして実現することによって、動的な図形教材の開発・実践を可能にした。これは、ある意味では、前田氏の「連続的変化」をより徹底した形で実現するものである。そしてまた、Geometric Constructorが持つ基本的な機能と、それを使って行える動的な図形教材の開発として、いくつかの事例を述べた。

本研究では、「動的」という概念を中心にして、その分析とソフトウェアへの実現を考察した。今後、さらに多くの教材を開発しながら研究を進めていく必要があるが、4章の例からも示されるように、そのような教材の開発には、新しい教授=学習過程に関する研究を並行して行うことが必要である。つまり、このようなcomputerの利用を行うことによって、どのような数学的問題解決の過程を、より容易に教授可能、あるいは学習可能にできるのかを明らかにしなければならない。また、そのような教授=学習過程には、どのような教材や教授方略が適切なのかをも明確にしなければならない。このような知見は、主として教室の中での実践とその分析から生まれて

くるものである。学校数学へのcomputerの導入を契機にして、現場の先生方からの様々なご教示を頂きながら更に研究を進めていくことが、今後の課題である。

注

1. このようなカリキュラムなどに関する基本的な議論は、
Fey, J.T. "Computing and Mathematics", NCTM, 1984, 邦訳『数学教育とコンピュータ』成嶋監訳, 東海大学出版会, 1987また、海外での研究の動向のまとめは、
Fey, J.T. Technology and Mathematics Education: A Survey of Recent Developments and Important Problems", Educ. Studies in Math. 20(1989), pp.237-272
などにある。
また、数学との関連性に関する議論は、
Howson, A.G. 他編 "The Influence of Computers and Informatics on Mathematics Teaching", 1985, (ICMI Study Series)
邦訳『数学教育とコンピュータ』植竹監訳, 聖文社, 1989
また、今日の日本の中での対応の様子は、
寺田・吉村編『数学教育とコンピュータ』, 日本評論社, 1989
などに見られる。
2. 芦葉浪久「コンピュータと教育」, コンピュータ教育開発センター『コンピュータ教育標準用事典』, アスキー, 1989, p.41
3. 前田隆一『算数教育論—図形指導を中心として—』, 金子書房, 1979, p.47
4. Ibid., p.49
5. Ibid.
6. 吉田 隆他17名「動的な見方を伸ばす指導法」日本数学教育学会誌, 数学教育, vol.66(1984), pp.78-86
7. 前田, op.cit.
8. 現在ver. 2.5 (90.2.20) の時点で実行ファイルの大きさは約380KBである。
(開発言語: Quick BASIC)
9. この点についての詳しい内容は、拙稿「作図の構成的な性格とcomputerによる支援について——九点円の作図に関する数学的探究に焦点を当てて——」, 数学教育研究, 上越教育大学数学教室, vol. 5 (1990), pp.35-46に記述してある。
10. 一般的なCADソフトCANDY3による作画例である。
11. 河口商次編著『図形教育——動的指導——』, 日新出版, 1960
12. Papert, S. 『マインドストーム』, 1982, 未来社, 奥村訳, 第3章「タートル幾何学」
13. 前田, op.cit., pp.89-90
14. Ibid., p.90
15. この点に関するより厳密で形式的な記述は、拙稿「Computerにおける図形の動的な扱いについて——幾何図形作図ソフト開発のための基礎的考察——」筑波数学教育研究, vol. 9 (1990), pp.105-117で行っている。