あいまい集合

愛知教育大学　**佐々木　守　寿**

第0章　これは，大きい砂利か？

ここに，数十個の砂利があるとする。「大きい砂利と，そうでない砂利に分けろ」，と言われても，難しい場合がある。原因は，

$$A = \{ x \mid x \text{ は大きい砂利} \}$$

という集合を，明確に定義できないことにある。大きい砂利とそうでない砂利の，境界がはっきりしない，と言っても同じである。このような，ぼやけた対象を扱う道具として，あいまい集合（fuzzy sets）がある。

第1章　特性関数とメンバーシップ関数

考えている砂利の集合を，X としよう。任意の $Y \subset X$ に，関数

$$\chi_Y : X \to \{0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が対応する。χ_Y を，Y の特性関数と呼ぶ。逆に，関数 $f : X \to \{0, 1\}$ を定めると，X の部分集合が1つ決定される。

第0章の集合 A は，χ_A を定めれば，決定される。χ_A を定めにくいのは，各々の $x \in X$ に対して，1か0の二者択一を強制されるからである。そこで，関数

$$\mu_A : X \to \{0, \alpha, 1\}$$

を，任意の $x \in X$ に対して，

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は大きいと思ったとき} \\ \alpha & \text{迷ったとき} \\ 0 & x \text{ は大きくないと思ったとき} \end{cases}$$

として定めることを考えよう。μ_A は，χ_A より定めやすい。しかし，同じ X を与えても，μ_A は人によって異なることがある。原因は，μ_A の定義に，「〜と思ったとき」，「迷ったとき」という主観的な表現が含まれていることにある。

実は，「あいまい理論」は，主観を扱うことのできる数学を目指している。したがって，上記の特徴を「特長」と考える。

さて，砂利の話を続けよう。μ_A の値域 $\{0, \alpha, 1\}$ に，順序 $<$ を，$0<\alpha<1$ として導入する。このとき，a，$b\in X$ に対して，

$$\mu_A(a) < \mu_A(b)$$

であるなら，「b は a より大きい」と言える。別な言い方をすると，「b が A に属す度合は，a が A に属す度合より大きい」ということになる。この意味において，μ_A を A のメンバーシップ関数と呼ぶ。

第２章　あいまい集合

前章において，χ_A を考える時の A と，μ_A を考える時の A は，本質的に異なる。μ_A を考える時の A は，もはや

$$A = \{x \mid x\in X,\ x\text{ は大きい砂利}\}$$

と書くことはできない。A は，X を対象とした「大きい砂利」，というぼやけた概念である。集合ではない。この A のようなものを，X 上のあいまい集合と呼ぶ。

そこで，あいまい集合の定義をあげよう。

［定義１］　X を空でない集合とする。X を対象とした概念 A で，関数

$$\mu_A : X \to [0, 1]$$

によって特徴づけられるものを，X 上のあいまい集合と呼ぶ。μ_A を，A のメンバーシップ関数と呼ぶ。

突然，メンバーシップ関数の値域が，閉区間 $[0, 1]$ になっている。これが，あいまい集合の最初の定義（Zadeh L. A. 1965）である。しかし，$[0, 1]$ を見ると，確率を思い起こす人が多い。第１章で述べたように，あいまい集合の扱うあいまいさは，確率的なものではない。

メンバーシップ関数の値域に必須な構造は，完備束（complete lattice）の構造である。さらに，あいまい集合とメンバーシップ関数を，同一視することができる。そこで，現在は，次のような定義を使う人が多い。

［定義２］　X を空でない集合，L を完備束とする。関数

$$\tilde{f} : X \to L$$

を，X 上の L－あいまい集合（L－fuzzy set）と呼ぶ。また，X 上の L－あいまい集合の全体を $F_L(X)$ と書く。

$$F_L(X) = \{ \tilde{f} \mid \tilde{f} : X \to L \}$$

$\{ \alpha_i \} \subset L\ (i \in I)$ の上限を $\bigvee_{i \in I} \alpha_i$，下限を $\bigwedge_{i \in I} \alpha_i$ と書く。また，L の最大元を1，最小元を0と書く。

L が完備束であるので，L－あいまい集合の「和集合」と「共通集合」を定義することができる。任意の $\{ \tilde{f}_k \} \subset F_L(X)\ (k \in K)$ に対して，

$$\bigvee_{k \in K} \tilde{f}_k : X \to L : x \mapsto \bigvee_{k \in K} (\tilde{f}_k(x))$$

$$\bigwedge_{k \in K} \tilde{f}_k : X \to L : x \mapsto \bigwedge_{k \in K} (\tilde{f}_k(x))$$

として，2つの L－あいまい集合，$\bigvee_{k \in K} \tilde{f}_k$ と $\bigwedge_{k \in K} \tilde{f}_k$ を定義する。$\bigvee_{k \in K} \tilde{f}_k$ と $\bigwedge_{k \in K} \tilde{f}_k$ を，それぞれ，$\{ \tilde{f}_k \}_{k \in K}$ の和集合と共通集合と呼ぶ。この，和集合と共通集合を定める演算とともに，$(F_L(X), \vee, \wedge)$ は，完備束となる。

一般に，L の構造を，上記と同様の方法で，$F_L(X)$ 上に導入することができる。したがって，目的に応じて，L に構造を付加して研究がなされている。完備束の構造が必須とされている理由は，上記の和集合と共通集合を導入するためである。あいまい集合の親が「集合」であると考えれば，親と類似の演算を定義することは，自然である。

第3章　拡張原理と α－カット

X，Y を空でない集合とする。関数 $h : X \to Y$ から，関数 $\hat{h} : F_L(X) \to F_L(Y)$ を構成する方法として，拡張原理がある。与えられた h に対して，$\hat{h}$ を次のように定義する。任意の $\tilde{f} \in F_L(X)$ と，任意の $y \in Y$ に対して，

$$(\hat{h}(\tilde{f}))(y) = \begin{cases} \bigvee_{x \in h^{-1}(y)} \tilde{f}(x) & \text{if} \quad h^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。ただし，

$$h^{-1}(y) = \{ x \mid x \in X,\ h(x) = y \}$$

と，

$$\hat{h}(\tilde{f}) : Y \to L \in F_L(Y)$$

であることに注意。

この拡張原理を表現する道具として，α－カットの概念を導入する。$\tilde{f} \in F_L(X)$ と $\alpha \in L$ に対し，2つの X の部分集合

$$\tilde{f}_{\alpha} = \{ x \mid x \in X,\ \tilde{f}(x) \not\leqq \alpha \}$$

$$\tilde{f}_{\overline{\alpha}} = \{ x \mid x \in X,\ \tilde{f}(x) \geqq \alpha \}$$

を考える。$\tilde{f}_{\alpha}$ を $\tilde{f}$ の強 α－カット，$\tilde{f}_{\overline{\alpha}}$ を $\tilde{f}$ の弱 α－カットと呼ぶ。L が半順序集合のときは，

$$\{ x \mid x \in X,\ \tilde{f}(x) \not\leqq \alpha \} = \{ x \mid x \in X,\ \tilde{f}(x) > \alpha \}$$

が不成立の場合もあることに注意されたい。α－カットは，次のような性質を持つ。任意の $\tilde{f} \in F_L(X)$ と任意の $\{ \alpha_i \} \subset L$ $(i \in I)$ に対し，

$$\tilde{f}_{\bigwedge_{i \in I} \alpha_i} = \bigcup_{i \in I} \tilde{f}_{\alpha_i}$$

$$\tilde{f}_{\overline{\bigvee_{i \in I} \alpha_i}} = \bigcap_{i \in I} \tilde{f}_{\overline{\alpha_i}}$$

が成立する。この2つは，双対的でおもしろい。上の式で，強と弱をいれかえたものは，不成立の場合がある。

α－カットをとる操作は，L－あいまい集合に通常の集合を対応させる。集合の考え方に慣れている我々にとって，拡張原理を次のように表現すると，わかりやすい。

関数 $h : X \to Y$ に，関数 $\hat{h} : F_L(X) \to F_L(Y)$ を対応させる。

$\hat{h}$ は，任意の $\tilde{f} \in F_L(X)$ と，任意の $\alpha \in L$ に対し，

$$(\hat{h}(\tilde{f}))_{\alpha} = \{ h(x) \mid x \in \tilde{f}_{\alpha} \} \tag{$*$}$$

を満たすものである。

これは，強 α－カットによって表現されている。実は，上の表現を弱 α－カットにおきかえたものは，不成立の場合がある。原因は，強 α－カットでは，任意の $\{ \beta_i \} \subset L$ $(i \in I)$ と任意の $\gamma \in L$ に対し，

$$\bigvee_{i \in I} \beta_i \not\leqq \gamma \iff \beta_i \not\leqq \gamma \quad \text{for some} \quad i \in I$$

が成立するが，弱 α－カットでは

$$\bigvee_{i \in I} \beta_i \geqq \gamma \iff \beta_i \geqq \gamma \quad \text{for some} \quad i \in I \tag{$**$}$$

の（$\Rightarrow$）が不成立の場合があるからである。

（$*$）が，強 α－カットでは成立するが，弱 α－カットでは不成立の場合があることを式で示して，この章を終わりにする。

$\alpha = 0$ のときは，強弱とも成立する。$\alpha \neq 0$ とすると，強 α－カットでは，

$$
\begin{aligned}
(\hat{h}(\tilde{f}))_{\alpha} &= \{\, y \mid y \in Y,\ (\hat{h}(\tilde{f}))(y) \not\leq \alpha \,\} \\
&= \{\, y \mid \bigvee_{x \in h^{-1}(y)} \tilde{f}(x) \not\leq \alpha \,\} \\
&= \{\, y \mid \exists x \in X \ s.t.\ h(x) = y,\ \tilde{f}(x) \not\leq \alpha \,\} \\
&= \{\, y \mid y = h(x),\ x \in \tilde{f}_{\alpha} \,\} \\
&= \{\, h(x) \mid x \in \tilde{f}_{\alpha} \,\}
\end{aligned}
$$

となる。ところが，弱α－カットで同様の変形をすると，２行目から３行目へいけないことがある。それは，（＊＊）で（⇒）が不成立の場合があるためである。

第４章　終わりに

あいまい理論は，1965年のZadehによる「あいまい集合」の導入が出発点である。若い理論であるから，研究の道は多い。

1984年に，国際ファジィシステム学会（ＩＦＳＡ）が設立された。現在，日本，アメリカ，ヨーロッパ，中国の４つの支部がある。ＩＦＳＡに所属している日本人は，私も含めて，現在63名（大学49名，企業14名）である。今後，興味をもたれ，あいまいの道を進んでみようという方が増えることを，期待したい。

最近は，ロボット工学や制御の分野で応用されている。あいまい理論を使った，バックギャモンのプログラムが，人間の世界チャンピオンに勝ったそうである。

［参考文献］

［１］ 浅居喜代治　Negoita, C.V.　あいまいシステム理論入門（オーム社，1978）

［２］ Dubois, D.　Fuzzy sets and systems（Academic press, 1980）

［３］ Kaufmann, A.　Introduction to the theory of fuzzy subsets（Academic press, 1975）

［４］ Negoita, C. V. and Ralescu, D. A.　Applications of fuzzy sets to systems analysis（Birkhauser Verlag, 1975）