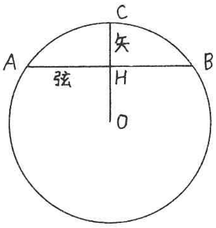
『拾璣算法』における円弧の長さ及び弓形の面積の求め方

愛知教育大学　**内　藤　　淳**

洋の東西を問わず，数学の１つの関門は曲線の長さの求め方であり，曲線で囲まれた図形の面積の求め方であった。その基本図形は円である。日本においても江戸時代に和算家が，円弧の長さや弓形の面積を求めることを試みている。久留米藩主であった有馬頼徸の著といわれる『拾璣算法』（1767）を読む機会を最近得たが，次のような問題があったので紹介する。原文は漢字のみで書かれているので，ここでは現代的に書き直すことにする。原文は，例えば愛知教育大学図書館の蔵書である原書［4］を参照していただきたい。

問題1.　中心がO，直径がRである円の弦ABに垂直な半径OCとABとの交点をHとする。矢CHの長さをdとするとき，弧ACBの長さをRとdとで表せ。



拾璣算法が導いた公式は次の通りである。

$$\text{原数}=\sqrt{4\,d\mathrm{R}},\quad \text{一差}=\text{原数}\,\frac{\text{矢}}{\text{直径}}\,\frac{\text{一差乗率}}{\text{一差除率}},$$

$$\text{二差}=\text{一差}\,\frac{\text{矢}}{\text{直径}}\,\frac{\text{二差乗率}}{\text{二差除率}},\quad \text{三差}=\text{二差}\,\frac{\text{矢}}{\text{直径}}\,\frac{\text{三差乗率}}{\text{三差除率}},$$

$$\text{四差}=\text{三差}\,\frac{\text{矢}}{\text{直径}}\,\frac{\text{四差乗率}}{\text{四差除率}},\quad \text{五差}=\text{四差}\,\frac{\text{矢}}{\text{直径}}\,\frac{\text{五差乗率}}{\text{五差除率}},\quad \text{以下同様}$$

とおく。そして，各乗率，各除率に対して下記の表を設ける。ここでは途中を省略して示す。

	一差	二差	三差	四差	五差	六差	七差	…	二十九差	三十差
乗率	1	9	25	49	81	121	169	…	3249	3481
除率	6	20	42	72	110	156	210	…	3422	3660

このとき，求める弧の長さは次の通り。

弧ACBの長さ＝原数＋一差＋二差＋三差＋四差＋五差＋ ……。

以上が拾璣算法の結果である。これに数字をあてはめてみる。

$$\widehat{\mathrm{ACB}}=\sqrt{4\,d\mathrm{R}}\left\{1+\frac{1}{6}\frac{d}{\mathrm{R}}+\frac{1}{6}\frac{9}{20}\left(\frac{d}{\mathrm{R}}\right)^2+\frac{1}{6}\frac{9}{20}\frac{25}{42}\left(\frac{d}{\mathrm{R}}\right)^3+\frac{1}{6}\frac{9}{20}\frac{25}{42}\frac{49}{72}\left(\frac{d}{\mathrm{R}}\right)^4\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}\frac{9}{20}\frac{25}{42}\frac{49}{72}\frac{81}{110}\left(\frac{d}{\mathrm{R}}\right)^5+\cdots\cdots\right\}。\qquad (1)$$

さて，この問題を現代的に解いてみる。図において，半径をr，$\angle \mathrm{AOB}=2\theta$ とおくと

$\cos\theta = (r-d)/r$。三角関数の公式　$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$　を用いる。$0<\theta<\pi$ と考えて

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{d}{R}}。\qquad \therefore\ \theta = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{d}{R}}。$$

よって

$$\widehat{ACB} = 2r\theta = 2R\sin^{-1}\sqrt{\frac{d}{R}}。$$

ここで微分積分学の本を見ていただくと，例えば[1]により

$$\sin^{-1}\sqrt{\frac{d}{R}} = \sqrt{\frac{d}{R}} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{d}{R}}^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}\frac{1}{5}\sqrt{\frac{d}{R}}^5 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{d}{R}}^{2n+1} + \cdots\cdots。$$

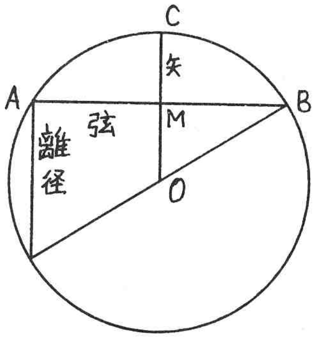
であるから

$$\widehat{ACB} = \sqrt{4dR}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{d}{R} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}\frac{1}{5}\left(\frac{d}{R}\right)^2 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{d}{R}\right)^n + \cdots\cdots\right\}。\qquad (2)$$

(1)の各項を計算すると，(1)と(2)が一致することは容易に分るから，拾璣算法の結果は正しいことを知る。なお，拾璣算法では，矢 d が大きいときは誤差が大きくなるから項数を多くとらなければならないこと，また，$d>r$　ならば，小矢＝直径－矢　を作って劣弧を求め，円周より引けばよいことを注意している。

問題 2.　弓形 ACB があり，点 C，M は弧及び弦の中点である。このとき，矢 CM と弦 AB の長さをそれぞれ d，$2a$ として，弓形 ACB の面積を求めよ。

拾璣算法の得た公式は次の通り。



弓形をのせる円 O の半径を r，弧 ACB の長さを 2ℓ とする。まず，離径＝直径－２矢，位＝離径・弦　とおくと

弓形の面積＝（直径・背－位）/ 4

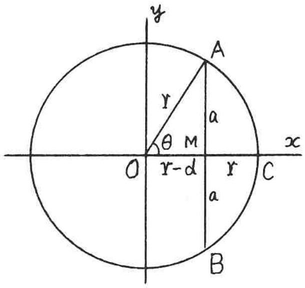
$= \ell r - a(r-d)$。

現代的に解いてみる。円を　$x^2+y^2=r^2$　とおくとき，求める面積を S とすると

$$S = 2\int_{r-d}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx。$$

微分積分の本を見ていただくと，例えば[2]により

$$S = \left[x\sqrt{r^2-x^2} + r^2\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_{r-d}^{r}$$



$$= r^2 \sin^{-1} 1 - \left\{ (r-d)\sqrt{r^2-(r-d)^2} + r^2 \sin^{-1} \frac{r-d}{r} \right\}。$$

図から

$$r^2 - (r-d)^2 = a^2。$$

また

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{r-d}{r} \text{ から } \frac{\pi}{2} - \theta = \sin^{-1}\frac{r-d}{r}$$

であるから

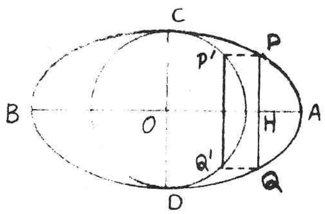
$$S = \frac{\pi}{2} r^2 - (r-d)\,a - r^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r^2\theta - a\,(r-d)。$$

更に　$\ell = r\theta$　から

$$S = \ell r - a\,(r-d)。$$

よって，拾璣算法の結果は正しい。

問題3.　長軸をAB，短軸をCDとする楕円の長軸に垂直な弦をPQとし，PQとABとの交点をHとする。長軸AB，短軸CD，欠矢AHの長さを用いて，PQによって切り取られる部分PAQの面積を求めよ。



拾璣算法の得た公式は次の通り。

仮矢＝欠矢・短軸／長軸，仮円径＝短軸

と名づける。弧術によって仮弧積を求めることができ

求める面積＝仮弧積・長軸／短軸

である。

拾璣算法の解法を現代的に解説する。

与えられた楕円を短軸を中心とし，長軸に平行に　短軸／長軸　の割合で縮小すると，楕円は短軸を直径とする円となる。この仮に作った円の直径を仮円径と名づける。この変換で弦PQは円の弦P′Q′となりABに直交する。P′Q′によって作られる弓形の面積（仮弧積）は問題2（弧術）によって求めることができる。次に前の変換の逆変換，即ち，長軸に平行に短軸の反対方向に　長軸／短軸　の割合で拡大すると，弓形は求める部分PAQに変換される。この変換は平行投影であるから弓形の面積は　長軸／短軸　倍される。よって，拾璣算法の結果は正しい。平行投影については幾何学の本，例えば[3]を参照されたい。

おわりに

拾璣算法の著者は上記の問題を掲げるに当り次のような説明を付けている。「既刊の書は弧を求めないで弓形の面積を求めているから正しい術ではない。それ故，自分が正術を書き学者への指針とする」。また附録に設けてある問題1の前文には，「大方の学者の弧を求める術は正しくない。また先哲は秘して公開しない。それ故自分は正術をここに述べる。」と書いている。しか

し，現代の数学の書物と異なり当時の和算書には推論の過程が書いてない。拾璣算法も同様である。従って，例えば，問題１における級数，問題２における求積，問題３における平行投影の理論を，どのように理解していたか分らない。この拾璣算法が刊行されると和算家による解説書が数多く出版された。これらを更に調べて，著者の思考過程を研究したいと思っている。

参考文献

[1] 栗田稔；新訂版微分積分学，学術図書出版社（1977），272。

[2] 栗田稔；新訂版微分積分学，学術図書出版社（1977），78。

[3] 岩田至康；幾何学大辞典１，槇書店（1971），435。

[4] 豊田光文景；拾璣算法，武陽書林（1767），巻之五二十七丁〜二十九丁，四十三丁。