

## 【論文】

# 作図ツール GC/html5 のマルチタッチ機能を生かした数学的探究と授業の実践について

飯 島 康 之

愛知教育大学教育学部

## 要約

筆者が開発した作図ツール GC/html5 で実装しているマルチタッチは、iPad 上の Safari などでの標準的なピンチ操作を禁止する代わりに、複数の点を動かすことなどを実現している。図形を動かして調べる数学的探究の中で、作りたい種類の四角形そのものを意識化して複数の点を動かしたり、表現したい図の動きを指の動きで補完的に表現することで概略的な理解をしたり、図形の中の関係を保つ動かし方を意識化することで数学的な問題も生み出せることを例示した。また、Varignon の問題と 2 円と 2 直線の交点でできる 2 種類の四角形の問題に関する授業実践を例示し、複数の点を動かすことは生徒にとって適切であると同時に、指タッチはグループ活動の中での協同作業に適していたことや、特に Varignon の問題では、動かし方と図形の性質に関する議論がグループの中で活発に行われたことを例示した。

## キーワード

数学的探究、数学教育、マルチタッチ、動的幾何

## I. 問題及び目的

作図ツールというのは、数学的な意味での作図を行い、変形・測定等を行えるソフトのことをいう（飯島、1991）。1990 年代に世界的に利用されていた代表的なソフトには、cabri や Geometer's SketchPad があり、2000 年代以降の代表的なソフトとしては、Cinderella や GeoGebra がある。また、最近、海外では dynamic geometry software とか、dynamic geometry environment という言葉が使われることが多いので、動的幾何ソフトとか、動的幾何環境などの言葉が使われることもある。本稿ではそれら全体を表す言葉として、作図ツールという言葉を用いることにする。

これまでの作図ツールは、windows 上のソフトが主流であり、キーボードやマウスを使うものが中心であった。筆者が 1989 年以降開発してきた Geometric Constructor においても、初期の GC/DOS はキーボードでの操作を基本とし、その後の GC/DOS, GC/Win, GC/Java では、キーボードとマウスによる操作を中心としてきた。これに対して、2010 年に試作版を開発し、2011 年には本格的な利用が可能になった GC/html5 では、iPad などを利用する場合には、マルチタッチが可能になった（飯島 [2011a,b]）。教育現場でも使える一般的な機器で 5 点以上のマルチタッチが使えるようになったのは iPad の登場（2010 年 5 月に日本で発売開始）以

降だが、（以下のマルチタッチ機能も実装した）試作版は非常に早い時期からマルチタッチを実装した動的幾何ソフトであり、少なくとも開発において参照可能な動的幾何ソフトは存在しなかった。

開発当初から、マルチタッチはこれまでの GC/DOS, GC/Win, GC/Java 等にはない機能であると同時に、他の動的幾何ソフトにも実装されていない機能の一つであることは意識していたが、それが数学的探究や授業の中で興味深い役割を果たしうることを実感したのは、後述する 2011 年 10 月に附属名古屋中学校で行った鈴木実践がきっかけであった。

そこで、本稿では、次の点を明確にすることによって、マルチタッチの利用が作図ツールを使った数学的探究や授業実践に及ぼす影響の一部を明らかにすることを目的とする。

- (a) まず、クリック・タッチの違いや、通常のブラウザで実装されているピンチ操作との違いを明確にすることによって、GC/html5 で実装しているマルチタッチの特徴を明確にする。
- (b) 次に、マルチタッチの利用は、作図ツールを使った数学的探究にどのような影響があると考えられるかを、いくつかの例示をすることで明確にする。
- (c) 特にマルチタッチとの関わりでどのような新しい数学の問題がうまれるかを明らかにするために、

ケースステディとして、四角形の種類を保つような2点の動かし方に関する問題について考察する。

- (d) そして、実際に GC/html5 を利用した授業実践例を取り上げ、上記の考察を検証する。

## II. GC/html5 でのマルチタッチ機能

### (1) 指タッチとマウス操作－共通点と相違点－

iPad や Android などタブレット端末や Windows8 の普及により、(指) タッチは当たり前のものになった感があるが、マウス操作(クリック、ドラッグなど)との違いについて簡単にまとめておきたい。

まず、使うデバイスについて比較する。前者はタッチパネルを指で直接操作するのに対して、後者はマウス(あるいはその代替物)を、手で持って動かし、指でクリックする。そのため、前者は機器の周りにいる誰もが操作をすることができるが、後者ではマウスを持っている人しか操作できないため、利用者を切り換えるためには、マウスの手渡しが必要になる。

第二に、タッチイベントは、画面にタッチしているときのみ発生し、離すと終了する。マウスイベントの場合、マウスカーソルは常時存在しており、マウスボタンが離されていてもそれがどういう座標にあるのかをソフトが取得できる他、マウスが動いたらマウスムーブイベントが発生する。そのため、マウスの場合には、「どの対象の近くにあって、何を選択しようとしているのか」という情報が分かるため、クリック以前にたとえば「点A」などと、選択しようとしている対象の候補をあげ、ユーザの意志を確認してクリックに意味を付与することが可能である。しかし、タッチの場合には、タッチパネルの上を動いている指の情報をキャッチすることはできないので、ソフトにとっては、いきなりある地点がタッチされたという情報を受けることになる。そのため、マウスの特徴を生かして状況関知を利用しているソフトでは、タッチに対応するためには別の対処をすることが必要になる。

第三に、マウスの場合、画面上のマウスカーソルで、どの点を指すかを確認しながら使うために、非常に細かい動作が可能なのに対して、タッチの場合、画面そのものを指で触りながら操作するために、タッチしている面は見えないことや、指の太さによって、タッチしようとする点とタッチしている点のズレなどが大きく、マウスに比べると、かなり大雑把な操作になることが普通である。

### (2) GC/html5 でのタッチ機能とキーボード操作

GC/html5 では、タッチを受ける対象は、各種ボタンと、図が描画される領域(canvas)である。ボタンの操作は、GC/Win でのメニュー操作やキーボード操作に

対応している。そして、canvas 上での操作は、GC/Win などと同様に、次のような意味を割り当てている。

#### ① 作図などにおいて、対象を選択するとき

まず、第一候補となる対象にフォーカスが当てられている。そして、タッチ/クリックした地点に最も近い対象がクリックされたと認識し、同じ対象が選択されているときには、それが選択されたこととして認識する(enter キーと同等の役割)。異なる対象が選択されているときには、候補の切り換えが促されたと認識し、候補を切り換える(↑↓キーなどと同等の役割)。

#### ② 変形するとき

タッチ(クリック)された点に最も近い、変形可能な点が選択されたと認識する。そして、ムーブ(ドラッグ)されるのに応じて、その点の位置を対応すべき場所に動かす。

なお、図1のSボタン(シフトキー)が押されているときには、最も近い対象の上に射影し、Cボタン(コントロールキー)が押されているときには、最も近い格子点の上に移動する。

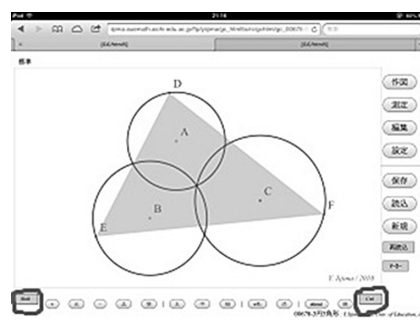


図1 Sボタン(左)とCボタン(右)

#### ③ マーカーのとき

図2に示すように、タッチ(クリック)された地点からマーキングを始め、ムーブ(ドラッグ)する間マークし、タッチエンド(マウスアップ)で終了する。

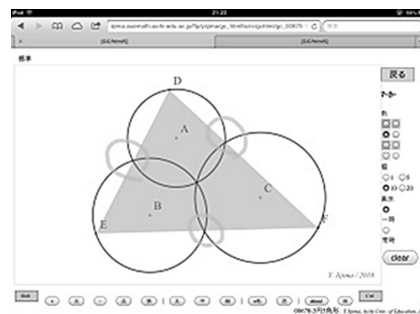


図2 注目すべき場所にマーカー

### (3) 一般的なソフトのマルチタッチ機能

iPad などの iOS や、windows8 でのマルチタッチ機能を生かしたソフトの多くで実現されているのは、マルチタッチジェスチャーである。GC/html5 を動作させるブラウザ(Safari, Internet Explorer など)上でも、図

3のようなピンチ操作（二本の指でタッチして広げると拡大したり、縮めると縮小する）が可能である。また、iOSではそれ以外にさまざまな動作にさまざまな意味を持たせている。



図3 iPadのSafariでのピンチ操作による拡大

#### (4) GC/html5でのマルチタッチ機能

文字が小さいとか、写真や地図を大きく表示したいというときに、このピンチ操作は直感的でわかりやすいのだが、GC上で四角形ABCDの頂点を動かしたいと思って操作した時に、拡大・縮小が生まれると、想定外の動作で、数学的探究の妨げになる。そのため、GC/html5では、ブラウザのピンチ操作、つまり、通常の意味でのマルチタッチ操作を禁止し、次のことを可能にしている。

a. 変形において、「canvas内の複数の点を同時に動かす」こと。

図4のように、一人が2点以上を動かすことが普通だが、図5のように、複数の人が動かすこともある。

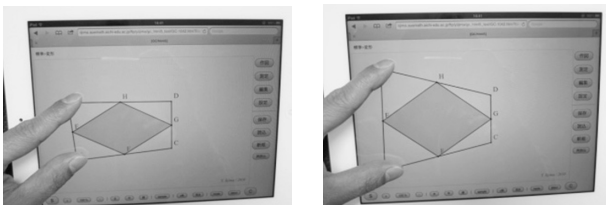


図4 2点を同時に動かす



図5 4人で動かす

b. 「Sボタン」や「Cボタン」を押しながら「変形する」  
幾何的対象や格子点上に制限したい時は、Sボタン、Cボタンを押しながら動かせばよい。

### Ⅲ. 複数の点を同時に動かす数学的探究

複数の点を同時に動かすことについて考察する前に、まずマウスで一つの点を動かすことの数学的意味について考察しておきたい。

#### (1) マウスで点を動かすことの数学的意味

たとえば、ある命題の成否を念頭において、与えられた図形の中の1点だけを動かす場合を考えると、動かして調べた結果というのは、次のような場合が想定される。

- A. どの方向に動かしても、命題は成り立つ。
- B. 特定の動かし方をするときだけ、命題は成り立つ。
- C. 特定の点においてのみ、命題は成り立つ。
- D. どこに動かしても、命題は成り立たない。

これは辻(2003)が注目する「点の自由度」ということができるが、Bは直線その他、円など曲線の場合もある。マウスの場合、直線・曲線上を正確に動かすことはむずかしいので、たとえば、GCでは束縛条件の設定で、特定の直線や円の上に動きを限定して調べることができるし、その対象から外したときにどうなるかを簡単に確認することができるように、Shift + 変形機能を実装している。

一方、与えられている図の中で、複数の点が動かせることは少なくない。たとえば、「四角形ABCDの4つの辺の中点E,F,G,Hを結んだ四角形はどんな形になるか」(Varignonの問題)の場合も、探究の関心は「ABCDがどういう形のときに、EFGHがどういう形になるか」であり、調べたい形をつくるために、マウスで点をつかんでドラッグという作業を繰り返して、全体の形を整えるのが普通である。

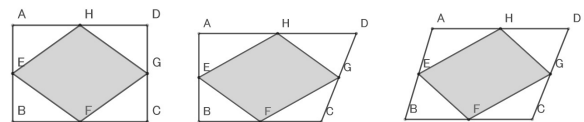


図6 「二手」で長方形を平行四辺形に変える

図6では長方形を平行四辺形に変えるに当たって、できればADを右に平行移動したいのだが、それを一手ですることができないので、一点一点ずつ右に動かしている。

GC/Winでは、辺(の中央)をつかまえて動かせば、上記の問題で求めているような動かし方、つまり辺と両端の点を平行移動するような動かし方をする。他のソフトでも同様な機能が実装されていることが多い。しかし、想定される動かし方のすべてを実装できるわけではない。

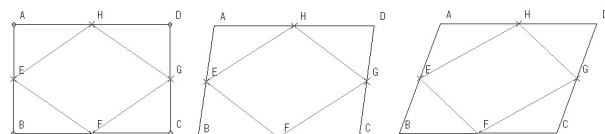


図7 GC/Winで辺ADをつかまえて右に動かす

このように、1点のみを動かす問題の場合は、点の自由度とマウスの動かし方には重要なかわりがあるが、多くの点を動かせる図については、動かし方はより多様になるため、さらに考察を深めていくが必要になる。



## (2) 複数の点を同時に動かすことの数学的意味

複数の点をそれぞれ指でつかまえて動かすことができるなら、「辺を動かすためには2つの端点を平行移動すればよい」と考えると、GC/Winのような特別な動かし方がなくても、ほぼ同様の操作をすることが可能になる。点对称な動きや線対称の動きなど、様々な目的に応じた動かし方を、複数の点を同時に動かすことによって実現できる。しかも、特定のジェスチャーとして埋め込まれているのではないため、「こういう動かし方をすると、こういう意味になる」と、ユーザーが自覚しているときのみ、そのように機能する。実際には、タッチでの操作は精度が高くないので、ピッタリときれいに動作するとは限らないのだが、そこに「適切な動かし方を考える」こと自体が、一人あるいは複数の子どもが協力しながら数学的探究を進めていく上で、特徴的な活動になったり、「どういう動かし方をしたらいいのか」を考えること自体が一つの数学的な問題として登場することもある。

これは一つの点を動かすときとはかなり違った特徴であり、そのような場合を詳しく分析することが、複数の点を動かすことの意味を数学的探究の文脈の中で考察することに結びつく。以下では、そのような例をいくつか考察しよう。

## (a) 想定している場合にすばやく変形する

たとえば、前出の Varignon の問題などで、ABCD が長方形の場合について調べた後、続けてひし形の場合について調べる場合など、マウスを使うと一点ずつ動かす。つくるべき形が念頭にあるからいいのだが、少しずつ動かすとかなり手間がかかる。タッチの場合には、一気に4点を回して方向性を揃えてから取り組むなど、フリーハンドに近い感覚で操作することが可能になる。

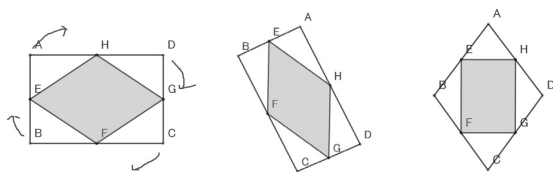


図8 グルッと回転させてから微調整してひし形にする

また、一定の制約を受けている図の場合には、ある条件（直交関係など）を満たすようにしても、別の点を動かすと角度が変わってしまうなど、微調整が必要なこともある。たとえば、図9のように、離れた2円の上に2点ずつを持つ四角形を長方形や平行四辺形にする場合な

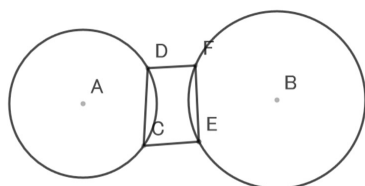


図9 2円上に2点ずつある四角形

どでは、マウスで一つずつ動かす場合と比較すると、複数の点を動かせる場合には、全体の様子を眺めながら調整して、「ほぼ要求を満たす図」をつくりやすい。

## (b) 一般的に作図してある図であっても、適切に点を動かすことで概略的な理解を深める

また、「一辺の長さが6cmの正方形ABCDで、PはAからBの方向に毎秒1cmで、QはAからDの方向に毎秒1cmで進むときの三角形APBの面積について考える」というような動点問題であれば、iPad用の図としては、図10において、P, Qは最近接対象上への制限をしておくだけで、PとQの2点を一人あるいは二人で動かしながら問題を理解するという提示の仕方でも、ほとんど問題はない。

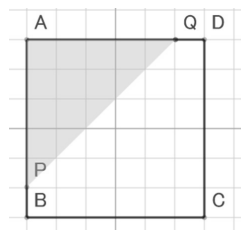


図10 等速で動く2点P, Qを含む図

一方、上記の図で1点ずつしか動かせないと、Pの動きにQが連動しないことに図の不完全さを感じる。連動する図をつくるには、たとえばAを中心としてPを通る円を描き、その円とADとの交点をQとし、その円を非表示にすると、Pを動かせばQが連動して動く図をつくることができるが、そういう作図を生徒に求めることは無意味であるとともに、そのような作図の工夫をしてある図を提示することは、生徒にとってはブラックボックス化され、その仕組みを意識化する必要ないままに、当該の現象に触れることになる。そのような工夫が適切な場合もあるが、適切でない場合も少なくない。

そのような場合、複数の点を自分が動かすことにより、図の不完全さを補完することによって、問題の理解を深められるような使い方は新しい一つの選択肢になりうる。

## (c) 図形の中の関係を保つような動かし方

前節では、2点の進む速さが一定な動かし方を取り上げたが、図の中で成立している関係を保つような動かし方は数多くある。たとえば、点AとBに関する関係性に関しても、直線lに関する点对称、点Pに関する点对称、△ABCが正三角形、AP=BPなど、図の中に様々な条件がある場合を考えてみる。それらの条件を常に満たすような図をかいて提示する方法もあるが、2点A, Bを自由に動く図を提示して、「条件を満たすように動かしながら調べよ」という問題を与えることも考えられる。

マウスを使う場合には、一つの点をまず動かし、次に、別の点を動かすことを繰り返して、条件が満たされる図をつくることになる。それに対して、複数の点を動かす

ときには、「うまい動かし方を工夫すれば、いつでもその条件を満たすような動かし方」をすることができるようになる。

このような「図の中の一定の条件が満たされるような動かし方」から数学的問題がうまれることの具体的な事例について、さらに考察してみることにしよう。

### (3) Varignon の問題における「EFGH が正方形のまま」 となる動かし方

Varignon の問題について調べると、典型的な事実として、「ABCD が正方形ならば EFGH も正方形」になる。たとえば、点 A を動かすことを考えると、図 11 のように、対角線 AC に沿って A を動かすと、EFGH は常に長方形になるが、それ以外の動かし方では一般の平行四辺形にしかない。

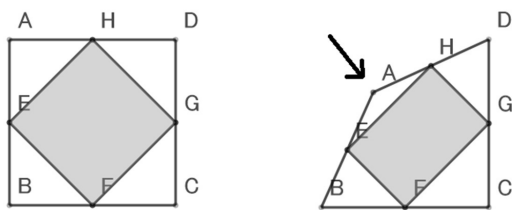


図11 長方形を保つ点Aの動かし方

そこで、「A,B,C,D 中の2点をつかまえて動かすとき、EFGH がいつも正方形のままでいるような動かし方はないだろうか」という問題を考えることができる。

EFGH が正方形であるためには、ABCD の対角線について、 $AC=BD$ 、 $AC \perp BD$  であればよいので、向かい合う2点（たとえば A と C）を動かす場合には、同じ向き・大きさの平行移動をすればよく、隣り合う2点（たとえば B と C）を動かす場合には、図のように、それぞれが元の対角線上を、等脚台形を構成するように動けばよい。前者の動かし方の場合には、AC,BD の長さも向きも保存されているのに対して、後者の場合には、AC,BD は両方の長さは変わるが、長さの相等関係が保存される。また、図 12 では AC,BD の向きは保存されているが、それ以外に図 13 のように、AC,BD の向きも

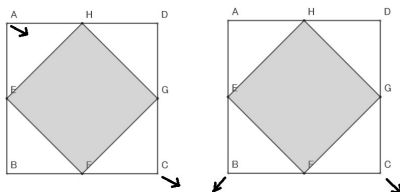


図12 正方形を保つ2点の動かし方

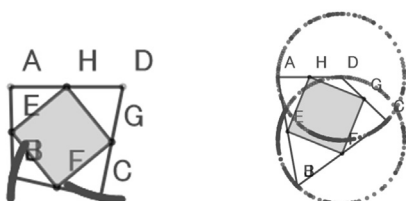


図13 Cの回転移動に合わせてBも移動する

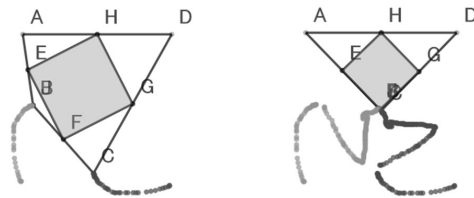


図14 Cの動きに対応するBの位置の軌跡を調べる

変わるような動かし方も可能である。

これらを踏まえた上で、C に対して、 $AC=BD$ 、 $AC \perp BD$  という条件を満たす点 B の位置を作図し、C の動きと対応する点 B の動きの軌跡を残すと、最初の正方形 ABCD の対角線の交点を M とすると、図 14 のように M を中心に、点 C を  $-90^\circ$  回転した点が B になることが観察結果として得られる。これは、証明すべき、新しい問題の発見でもある。

また、この問題を発展させると、次のように、4 点の動かし方を問う問題にもなる。

「A,B,C,D のすべての点を動かしても、EFGH が動かないような、4 点の動かし方はないだろうか」

向かいあう 2 点、隣り合う 2 点の動かし方をそれぞれ手がかりにすると、(本質的には同一だが) 図 15、16 のような解が得られる。

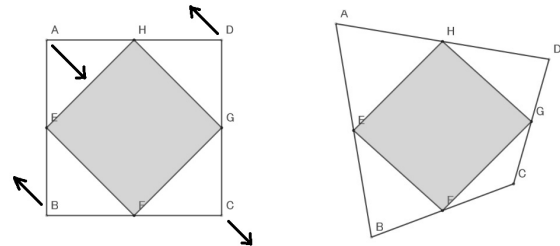


図15 正方形を保つ4点の動かし方(1)

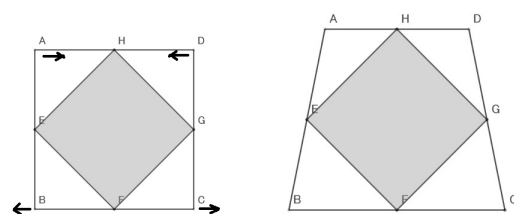


図16 正方形を保つ4点の動かし方(2)

また、正方形 EFGH に対して、点 A の位置がきまると、AB の中点が E となるような点 B の位置が一意的に確定し、続いて BC の中点が F となるように C が確定し、同様に D も確定することに注目すると、点 A の位置を任意にきめると、EFGH が正方形になるような四角形 ABCD が一意的に確定することがわかる。そして、それぞれの点の関係、つまり点対称、平行移動等の概念を使うことで、点 A の動きに対応した B,C,D の動きを表現することもできる。

このように、Varignon の問題について EFGH を正方形に保つような動かし方について考察することによっ

て、様々な数学的な結果に発展させられることが分かった。

#### (4) ABCD が形を保つような頂点の動かし方

前述の問題をよりシンプルにしてみよう。

「平行四辺形 ABCD がある。この中の2点を動かしても、ABCD が平行四辺形のままであるような動かし方を見つけない。」

この問題文の中の「平行四辺形」を他の概念に変えることで、様々な問題が生まれるが、2点を動かすことに関して重要なのは、平行四辺形、ひし形、長方形、等脚台形、たこ形の5種類である。

平行四辺形の場合、図17に示す2種類の動かし方がある。

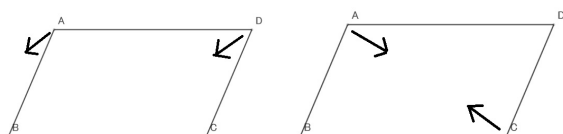


図17 平行四辺形を保つ2点の動かし方

これらに対応して、長方形の場合、図18の2種類の動かし方がある。左は気づきやすいが、右は気づきにくい。

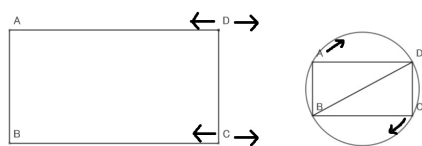


図18 長方形を保つ2点の動かし方

ひし形の場合も、図19の2種類の動かし方がある。左は気づきやすいが、右は気づきにくい。

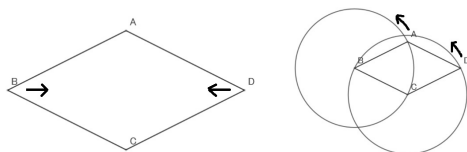


図19 ひし形を保つ2点の動かし方

たこ形や等脚台形について、対称軸を動かさない場合、気づきやすいのは図20の動かし方だ。

しかし、対称軸の平行移動を想定すると、等脚台形の

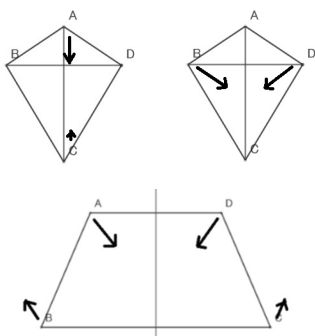


図20 たこ形・等脚台形を保つ2点の動かし方

場合、図21の動きが可能になる。

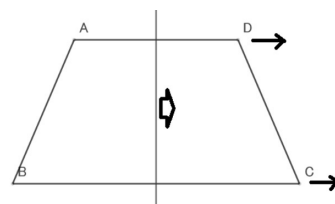


図21 対称軸も動かさず動かし方

対称軸の回転移動を考えると、たこ形の場合も、対称軸の中心が点Aだとすると、図22左のような動きも可能になり、等脚台形の場合も、対称軸上に回転の中心がある場合は図22右のようになる。

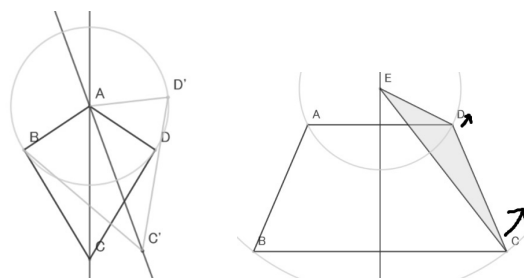


図22 対称軸を回転する動かし方

さらに、回転の中心が違う場所にある場合などを考えることによって、大学生でも扱いに困るような様々な曲線が生まれてくる（飯島（2013））。

このように、「四角形の形を変えないような2点の動かし方」というのは、前述の Varignon の問題と同様に、直感的な答えも存在するが、それ以外に、中高生の推論で十分に考察可能な動きも、さらに高度な扱いが必要な曲線の場合まで生まれる問題なのである。

#### IV. 複数の点を同時に動かす授業実践

ここでは、複数の点を同時に動かすように生徒に指示する課題を用いた二つの授業実践について、その概要を述べ、考察する。

##### (1) 「EFGH が正方形のまま」となる動かし方を扱った授業実践

対象：愛知教育大学附属名古屋中学校3年生

実施日：2011年10月7日

Varignon の問題、つまり四角形 ABCD の4つの辺の中点を結んでできる四角形 EFGH について、それがつねに平行四辺形になることを、前時に証明してある。本時では、まずその復習をかねて、iPad 上で操作して、いろいろな場合をつくった。たとえば、ABCD を長方形にすると、EFGH がひし形になることや、ABCD をひし形にすると EFGH が長方形になることなどを確認した。「こんなこともできる」と4点を同時に動かせることも示しながら、「EFGH が正方形になる場合をつくれ」と指示した。どのグループも ABCD を正方形にした。



そこで、「今、外側が正方形のときに内側が正方形になったけど、外側が正方形以外で、内側を正方形にすることってできるかな。ちょっと試してみて。」と投げかけた。ABCDが正方形でない場合でもEFGHが正方形になる場合をそれぞれグループが作り、その様子を図23のように実物投影機で示し、「外側がどんな四角形だったら、中の四角形は正方形になるのだろうか」と問題提示をした。



図23 EFGHが正方形になる図を紹介する

あるグループでは、図24のように、まず一つの頂点を動かしてEFGHを長方形にし、次にそれが正方形になるように、2回に分けて動かしていた。

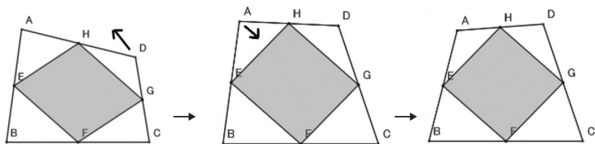


図24 正方形にするための2回の動き

あるグループでは、正方形の場合をもとに、正方形を保つように隣り合う2点を動かしていた。また、別のグループでは、正方形を保つように、向かい合う2点を動かしていた。授業者は「こんな動かし方をしているグループがあります」と前で提示するように指示し、図25、26のように実物投影機を使ってその動きを教室全体に示し、「こういう動かし方には秘密はないのかな」とその理由を考えるように投げかけた。

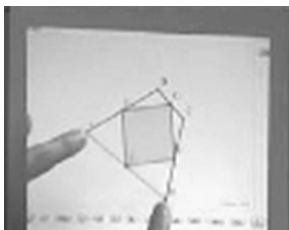


図25 隣り合う2点を動かす

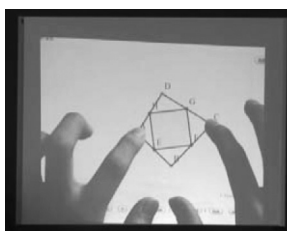


図26 向かい合う2点を動かす

それぞれのグループで上記の動かし方を確かめたり、当初の問題に対して、「二つの対角線が直交し、長さが等しい四角形」という予想を立て、証明を進めていった。図27のように動かし方を言葉で表現したり、手の動作で表現したり、紙の上にその動きを書いて説明するなど、どのグループでも生徒は様々な表現を行いながら話し合いをすることで、話し合いが活発に行われた。



図27 グループの中で図を動かしながら議論

そして、授業の終わりの段階では、授業者が二人を指名し、その二人の生徒が協力しながら証明のアウトラインを黒板の図を使って説明した。

## (2)「離れた2円と2直線の交点で構成される2つの四角形の関係」を扱った授業実践

対象：愛知教育大学附属名古屋中学校3年生

実施日：2013年2月12日

図28のように、離れた2円と交わる2直線があり、それらの交点を結んだ四角形の中で、内側にできるCDEFとGHIJについて考える。

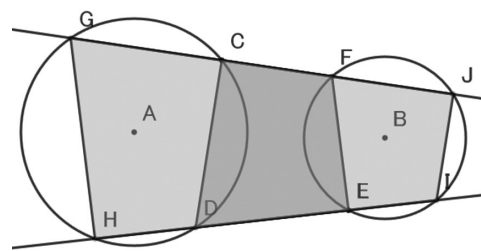


図28 2円と2直線から生まれる四角形

まず、中の四角形を長方形にしてみると、外は長方形になっているように見えることを確認し、それを証明することを第一の課題とした。

次に、iPadを配り、「中の四角形と外の四角形の関係を調べてください」という課題を出した。



図29 中の四角形が長方形になる場合



図30 中の四角形を平行四辺形に変形中

それぞれのグループで、中の四角形を、いろいろな場合に変形し観察した。4つつながれた机の中央にiPadがあるので、交代して、あるいは協同して操作したり、話し合いをするグループが多かった。

たとえば平行四辺形をつくる場合に、自由な4点からなる四角形を変形するときには、 $AB//CD$  になるようにしておき、その条件を保ったままで  $AD//BC$  になるようにすればよい。しかしこの図の場合、動きが2円の周上に限定されるので、最初に  $AB//CD$  にしておいたとしても、次に  $AD//BC$  になるようにすると、最初の平行性が崩れてしまう。つまり、観察しながら、二組の平行性が成り立つように、いろいろな点を調整する方がつくりやすい。そのような意味で、生徒の活動において、複数の点を同時に動かすことが作業を円滑にすると同時に、複数の生徒の協力を促す課題になっていた。

そのような協同作業を踏まえて平行四辺形や台形などをつくり、その後はワークシート上に図のスケッチを書いて、その証明について話し合う方が中心になった。

平行四辺形になる場合と台形になる場合を2種類発表し、2つの四角形は、角の大きさが同じになるけれども、相似になるわけではないことを確認して、授業を終わった。

### (3) 考察

二つの授業実践を踏まえて明らかになったことをまとめておく。

どちらの授業においても、複数の点を動かすことにに関して、授業者から例示を行うだけで、かなり円滑に行うことができた。2円の課題では図の設定等の問題からか、図の変形がなめらかでないことがあり、生徒が若干戸惑っていたが、四角形の図の方はまったく問題なく操作していた。以前のマウス利用を前提としたソフト(GC/Java)をPCで利用した場合と比較すると、複数の生徒が円滑に交代して操作したり、あるいは4人で協力しながら操作していた点は、指タッチの利点が表れていたといえる。

また、複数の点の動かし方については言葉で説明するだけではわかりにくいですが、図25、26に示すように、実物投影機を使って生徒が図形の動かし方を示すことが、授業の中でとても有効に機能していた。

どちらの授業においてもグループ内での会話が活発に

行われていたが、iPadの観察や、操作をする上でiPadを中心に体が集まってくることも影響していたと考えられる。また、4つの机を合わせた面積に対してiPadの大きさが小さかったことは、ノートなどでの証明をする上で、ほとんど支障になっていないことも、それらの活動が円滑に行えたことにも結びついていたと思われる。

2円の課題の方では、想定する図を作った後は、その証明を紙の上で考える活動に切り替わったのと対照的に、Varignonの問題では、図の動かし方などについての生徒の議論が活発になり、その動かし方を手で表現したり、紙の上にスケッチを書き込んだり、iPad上にTPシートをのせて議論するところが多かった。

授業の中での指示にもあるように、「まず長方形を作った正方形に変える」という意味が「2手の動かし方」との関わりがあることや、「いつも正方形になる」動かし方に関して、片方は、対角線の長さも直交関係も変えないような動かし方であること、そしてもう一方は、対角線の長さは変わるものの、長さが等しいという関係と、直交関係は変わらないというように、考察している問題と図の動かし方が密接に関係している課題であったことが考えられる。これらは、複数の点を同時に動かせるソフトだからこそ可能になった活動と考えることができる。しかし、逆に考えれば、図形の性質を保つような図形の動かし方を問う課題であったからこそ、グループでの活動を活性化することができたともいえるであろう。

### V. 考察と今後の課題

タッチを前提にした作図ツールはまだ少ない。すでに2010年に実現していたGC/html5でのマルチタッチは、かなりプリミティブな設計だが、それでも、本稿で示したように、マウスによって一点を動かす場合とは異なる数学的探究の様子や、それに伴って生まれる数学的問題の一部が明らかになった。そして、それらを踏まえた授業実践から、複数の点を動かすことをうまく生かすことによって、グループ活動の中での生徒の協同的な作業や、そこでの数学的議論を活性化できることを例示することができた。関連する事例を積み重ねていくことは、本研究の今後の課題でもある。

一方、マルチタッチジェスチャーを利用したsketchometry (<http://www.sketchometry.com/>) などが公開されている。今後、様々なインターフェイスを持った数学用ソフトが開発されるだろう。数学教育学的観点としては、それらがどのような数学的探究を生み出すのか、授業の中で扱うべき課題としてどのようなものを生み出すのか、さらに、授業設計にどのような影響を及ぼすのかについての議論を積み重ねていくことが重要と考える。



## 引用・参考文献

- 飯島康之 (1991), 「作図ツールの導入に伴う作図の新しい役割について」, 第24回数学教育論文発表会論文集, 275-280
- 飯島康之 (2011a), 「GC/html5の開発とビューア版による授業実践」, 第44回数学教育論文発表会論文集, 813-818
- 飯島康之 (2011b), 「iPadとGC/html5を使った授業による二つの提案-附属名古屋中学校での鈴木実践に関連して-」, イプシロン, 53, 13-24
- 飯島康之 (2012), 「iPad上で操作可能なGC/html5とコンテンツ開発」, 日本科学教育学会年会論文集, 36, 199-202
- 飯島康之 (2013), 作図ツールGC/html5のマルチタッチ機能を生かした教材開発について, 科学教育研究報告, 27, 5, 43-48
- 辻宏子 (2003), コンピュータ環境下の作図活動による

figural conceptsの育成, 科学教育研究, 27, 2,  
<http://www.cabri.com/>  
<http://www.keycurriculum.com/products/sketchpad>  
<http://www.geogebra.org/cms/ja/>  
<http://www.cinderella.de/>  
[http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/ijima/gc\\_html5/](http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/ijima/gc_html5/)  
<http://www.sketchometry.com/>

## 【謝辞】

本研究の一部は科研基盤(A)24240101(代表者: 銀島文)と科研基盤(C)23501012(代表者: 飯島康之)の助成を受けて行った。

## 【連絡先 飯島 康之】

E-mail: [yijima@aecc.aichi-edu.ac.jp](mailto:yijima@aecc.aichi-edu.ac.jp)

# Mathematical inquiry and classroom activity using multi-touch function of dynamic geometry software GC/html5

Yasuyuki IIJIMA

*Faculty of Education, Aichi University of Education*

## Abstract

The author have developed one of the dynamic geometry software GC/html5 since 2010, which can be used with multi-touch control. The standard gestures including pinch, which are used under the browser Safari for iOS, sometimes disturb the user's mathematical inquiry. Under GC/html5, they are prohibited, and user can move some points of figure simultaneously. Following activities can be identified by moving point simultaneously with multi-touch; (1) we can deform figure to the supposed state quickly (e.g. from rectangle to rhombus), (2) to understand and inquire the problem in which some points move under some conditions, we can use the general figure to move their point with multi-touch, and (3) we can discuss about how to move points of figure, in order to maintain some conditions about the figure, and in some case, we can find out new mathematical problems.

As the typical examples, we discuss about the Varignon's Problem (ABCD is a quadrilateral and E,F,G,H are the midpoints of AB,BC,CD,DA respectively. Inquire the relation of ABCD and EFGH.) and the problem about how to move two points of quadrilateral keeping the class of original figure (parallelogram, rectangle, rhombus, kite and isosceles trapezoid).

And, in this paper, we report the outline of two classroom activities and analyze them. One is about the Varignon's problem including the problem about how to move two points of ABCD to maintain the EFGH square. The other is about the relation of two quadrilaterals which are formed by the intersection s of two circles and two lines.

## Keywords

Dynamic geometry software, multi-touch, mathematical inquiry