

【論文】

数学概念形成のための LOGO プログラミングコンテンツの開発 —図形概念のイメージ化と言語化を促すために—

杉野 裕子

愛知教育大学教育学研究科後期3年博士課程

要約

筆者はこれまでに、図形概念の理解や学習の改善をめざすために、プログラミング活用の意義について追究し、ユークリッド幾何で使用できる LOGO 教材開発をしてきた。本稿では、これまでの研究に対して一貫性をもった理論的枠組みを示し、それを具現化できる環境として、新たなプログラミング教材を開発した。

理論的枠組みとして、コンピュータを用いた数学の表現体系について考察するとともに、特に、図形概念のイメージ化と言語化にプログラミングが寄与でき得ることを、図形概念の理解の様相モデル(川崎 2005)に照らし合わせて、開発教材を用いた一連の四角形学習の課題によって示した。プログラミングは、言語を用いて画面の図的表現を操作するツールとなり、イメージと言語はつながりをもったものとして理解されると期待できる。

教材開発にあたっては、これまでの LOGO 活用の問題点について先行研究から明らかにし、それらを克服するため、学習内容ごとにコンテンツ化するという方法を採用した。コンテンツの理念として、①算数用語の擬似プリミティブ命令、②機能的負担を軽減するボタン入力、③入力した言葉の同一画面での逐次表示、④一連の手順となる言葉を貯めてから実行する方法を採用した。

キーワード

プログラミング、LOGO、数学概念、図形、教材コンテンツ

1. はじめに

高度情報化は、人間のコミュニケーション方法や、表現としての外化様式を変え、思考や判断にも影響を及ぼすようになってきている。このような、人間の内面の質的变化への影響は、算数・数学の理解や学習方法の変化を示唆し、今後さらに、コンピュータ活用を含めた、高度情報化に対応する算数・数学科の学習や授業についての研究が必要とされる。

図形学習におけるコンピュータ活用の効果に関する研究の代表的なものとしては、図形を動的に捉えることを支援する、コンピュータ環境下での作図活動の有効性について検討したものがある(辻 2003)。この中では Cabri-Geometry や GC¹⁾ などの動的幾何ソフトを用いた探究活動について言及しており、コンピュータは作図ツールとして活用されている。

筆者はこれまでに、コンピュータを使った、図形概念の理解や学習方法の改善をめざす研究のひとつとして、プログラミング活用研究を行い、プログラミングの意義について追究し、教材の開発をしてきた(杉野 1988, 杉野 1989, 杉野 2005, 杉野 2010, 杉野 2013a, 杉野 2013b など)。しかしながら、プログラミングの意義に

ついて多方向から見ているものの、全体を俯瞰するための理論としての一貫性という観点では弱かった。また、小学校の普通教室での実践ができる環境が整いつつある昨今の状況を踏まえ、実際に使えるものとしての、プログラミング環境の構築として、新たな教材開発や活用方法について示していくことが急務である。

プログラミング活用では、子どもが「言語」を用いてコンピュータに働きかけることができ、その結果である、2次元画面や3次元ロボットなどの動きをみることによって、数学概念を「言語」と、その言語が意味する「現象」の2方向から捉え、両者を、つながりをもったものとして理解することが可能となる。数学概念は最終的には言語で表現される(平林 1987)。言語化という抽象化の過程における学習困難の改善や、学習の深化・発展のために、プログラミングが活用できると期待できる。

2. 研究の目的と方法

本稿の目的は、プログラミングが、図形概念形成のどの部分に寄与できるかについての理論的枠組みを、一貫性をもったものとして示すとともに、それを具現化できる環境としての、新たなプログラミング用教材を開発す

ることである。

プログラミング活用では、コンピュータを用いた表現が新たに加わるため、これまでの数学の表現体系（中原1995）に対比させて、プログラミング言語や画面表示がどのように位置づくかについて考察する。さらに、これまで操作的表現の媒体であった教具と、言語を入力して画面に図的表現を創出するプログラミングとの相違点について考察することを通して、プログラミングの特徴を明らかにする。

特に、図形概念は、概念定義と概念イメージという2面性をもったものである。概念定義は言語を用いて表現される客観的厳密な数学的定義や性質であり、概念イメージは主観的な視覚的イメージである（Vinner1991）。プログラミング活用においては、画面の図的表現がイメージ形成や発達に寄与できるとともに、プログラミング言語を通して、言語的側面とのつながりをもたせることが可能である。これらについて、授業における図形概念の理解の様相モデル（川壽2005）に照らし合わせて、新たに開発した教材を用いたプログラミング課題例によって示す。

これに先立って、LOGOプログラミングのよさと、これまで活用が広がらなかった問題点について、内外の先行研究から明らかにする。その上で、問題点の克服のために、新たな方法として、教材をコンテンツ化することの意義と基本的理念について述べる。

3. 数学の表現様式にプログラミングが加わることによる、新たな表現体系

(1) コンピュータが加わった、数学の表現体系

平林（1987）は、数学概念が最後的には言語で表記されることを指摘した。しかし、現実的表現と数学的表記（記号的表現）の間には、抽象のレベルの異なった、いくつかの表現様式が存在する。広島大学の研究者のグループにおいて戸田、平林、中原を中心として、30年以上に渡って受け継がれた研究では、Bruner（1966）のEIS原理、Lesh（1981）の表現体系、Haylock（1982）の表現体系を取り入れながら、聴覚的言葉を除いた表現様式について、図1の表現体系としてまとめた（中原1995）。図の上部ほど抽象度が高く、矢印は表現様式間および表現様式内の変換を表す。子どもは、現実的表現から始まって、この矢印の経路のどれかをたどって、記号的表現へと進む。もちろん、逆の方向も、現実場面への数学の活用という点で重要である。表現様式間の翻訳は、学習者の認知・認識といった内面的活動として行われる。なお、図的表現は、情景図、場面図、手続き図、構造図、概念図、関係図、グラフ図、図形図に分類される。

コンピュータを活用して、これらの表現様式を関連づける研究としては、楢円の幾何学的な定義（言語的表

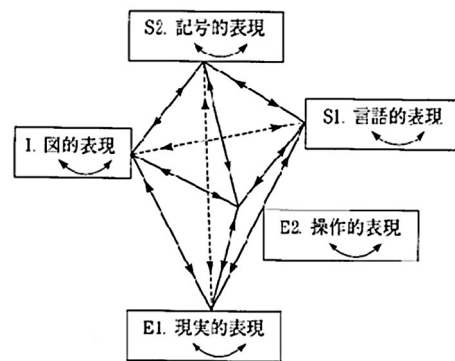


図1 数学の表現体系（中原1995）

現）と図形（図的表現）及び方程式（記号的表現）の3つの表現様式を関連付けるために、関数グラフツールGRAPES²⁾を活用した研究がある（佐伯他2013）。GRAPESによって、方程式とグラフ図の関連付けは直接的になるが、言語的表現は、楢円の性質に関して生徒が気付いた性質についての発言や記述に留まっている。

ところで、コンピュータを活用した表現様式は、テクノロジーによる新たな表現を含むため、図1の表現体系にそのまま埋め込むことは難しい。そこで、これまでの現実や具体物・教具および紙・黒板上での表現以外の、コンピュータによる表現体系について考察する必要がある。コンピュータによるテクノロジーを活用した5つの表現体系を以下に挙げる（t：テクノロジー活用）。

E1t. 映像としての現実的表現

E2t. コンピュータシミュレーション操作

（コンピュータが埋め込まれた3次元道具やロボット操作、あるいは3次元空間における擬体体験など。また、これまで3次元物体であったタングラムやジオボードなどの平面図形用教具は2次元画面上で操作・表示されることになる。）

It. コンピュータ画面上での図的表現

（図形図、グラフ図をはじめ、中原の表現体系にある8種類を画面で表現するもの）

S1t. 言語をコンピュータに入力すること

（言語命令によるコンピュータ操作や自然言語に近いプログラミング、音声入力による命令など）

S2t. 記号や数値をコンピュータに入力すること

（記号的表現を備えたプログラミングや数値入力）

テクノロジーを活用した5つの表現体系が、中原の表現体系と異なる特徴として、主に以下の3点が挙げられる。

- ① 時間を扱うことができる。
- ② 画面は、無数回の書き直しが可能である。
- ③ 表現体系同士を接近させることができる。

コンピュータは時間を扱い制御できるという特徴があるため、Itにおいては、情景図にアニメーションを取り入れたり、図形図やグラフ図を、一定のスピードで連続的变化をする動画として表現したりすることが可能とな

る。また、表現媒体としての画面は、書き直しが可能であるため、いったんかかれた図形図は、紙や黑板上とは違い、消してすぐに新しい図の表出が可能なことにより、動的幾何環境が実現される。さらに、ツールの活用においては、コンピュータは上記の5つの表現様式のうち、少なくとも2つを含む場合が多く、それらの強化や接近を、テクノロジーの力によって実現することが可能となる。例えば、GCは、It(図形図)とE2tを接近させ、S2tの表示が付加される。また、GRAPESでは、It(グラフ図)とS2tを接近させる。

図形概念形成におけるプログラミング活用は、It(図形図)とS1t・S2tを接近させようとするものである。実際には、コンピュータに言語や数値を入力することで、画面の図的表現の操作が行われる。この場合の表現様式について、図2に示す。プログラミング言語内に、算数・数学用語や生活用語といった言語表現と、記号的表現の両方を備えることで、S1tとS2tを同時に使用することができる。このことは、一般の算数・数学の授業でも行われている。例えば、中学校程度の証明問題は、数学用語と記号の併記によって解かれる。S1tとS2t間の変換は、これまでの学習と同じように存在するが、プログラム内での置き換えが可能となる。例えば、小学校での変数の導入にあたっては、いきなり文字を使用しないで、最初は算数用語などで表現することができる。

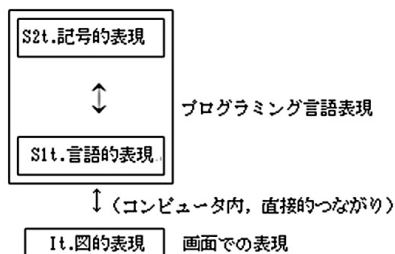


図2 プログラミングによる表現様式の関係

コンピュータによる表現体系について考察をしたが、中原の表現体系と別々に存在するものではなく、関連性や重なる部分もあるため、今後、数学学習と授業における両者の関わりについても究明していく必要がある。

(2) ツールとしてのプログラミング

算数学習では、学習具(教具)が重要な役割を果たしている。学習の導入期において、子どもは現実的場面の絵を見たり文章問題を読んだりして、いきなり数式に当てはめて問題を解決するわけではない。例えば、たし算の学習では、ブロックなどの学習具が用いられる。文章問題中にある「3匹のかえる」の代わりに「3個のブロック」を使う。ブロックは、かえるの代わりに、りんごの代わりに也成为、本来実態のない数としての「3」を可視化し、具体的操作の対象とすることができる。ブロックを使った外的具体的操作は、子どもが念頭操作のため

の心的表象(イメージ化されたモデル)を獲得するためには有効であるとする教授の表象アプローチと、数学的意味は学習具にあるものではなく、学習具に対して行った子どもの活動の中にある内面的な操作にあるとする立場がある。中原(1993)は、第1次的な源泉は子どもの活動にあるが、学習具はそれを支える重要な役割をになうとし、協定表象アプローチとしている。本研究においても、この立場で学習具をとらえ、内面的操作や言語に結びつくことこそ、重要とする。

しかし、例えば、定規・コンパスや分度器を用いた作図、あるいはストローなどを辺に見立てた図形の構成においては、用いる道具や材料の制約があったり、経験回数などの制約があったりする。コンピュータ活用によって、より多様な多くの経験を学習に取り入れることが可能となる。したがって、道具や物を用いた作図とのバランスを取りながら活用することが期待される。

また、学習具を使用することによって、必ずしも心的表象を獲得できるとは限らないし、心的表象の操作は、そのまま言語的表現に結びつくとは限らない。図形の構成においては、図形の完成自体が目標となり、使った手順や性質などを言葉で表現することが難しい場合がある。具体的操作活動は、抽象化への橋渡しをする役目を果たすものの、操作と数学的言語は、あくまでも、学習者である子どもの思考の中でつながれる。このところで、学習が困難になる場合が多い。プログラミングでは、図2に示したように、入力する言語と、画面の図的表現が直接的につながっている。プログラミングは、言語によって画面の図的表現を操作することができるツールとなり、教具に比べて、言語化を意識できるという特徴をもつ。

4. 図形概念の理解の様相モデルとプログラミング

概念は言葉で表されるとともに、5感で感じることのできる実態として存在したり、心的表象として個人の思考や記憶の中に存在したりする。特に幾何学的図形は、厳密には実体として存在しないものとしての概念的な特徴と、図的な特徴を同時にもつ特殊なものとしてFishbein(1993)は、「figural concept」と名づけた。一方、Pimm(1987)は、代数での文字は、どんな数の代わりにもなり得るが、図のシンボルとしての役割を考えた場合、ひとつの描かれた三角形で全ての三角形を代表させることは、描かれた三角形の独自性により、不可能であることについて言及している。教科書に載っている図は、「形」の代表(時には典型)を表しているにすぎない。図形学習では、これらのことに注意を払う必要がある。

Vinner(1991)は、図形概念は言語的に表現される「概念定義」と、イメージの表象である「概念イメージ」の

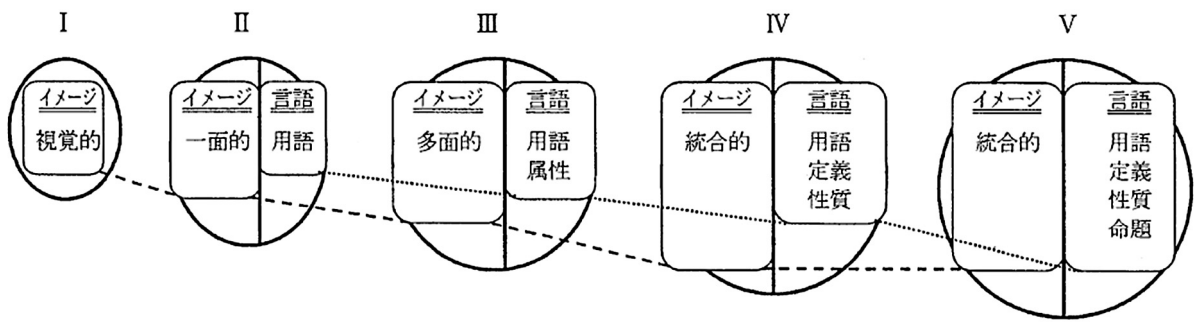


図3 図形概念の理解の様相モデル (川寄2005)

2面からなり、「概念定義」は客観的で厳密な数学的定義であり、「概念イメージ」は主観的で視覚的イメージを含む広い意味のイメージとした。また、川寄 (2005) は、Vinner の研究を、授業における図形の認識過程に融合し、個人が主観的に認識する図形概念の理解の様相モデルを示した(図3)。図形概念の指導過程においては、図形概念のイメージ的表象の理解が言語的表象の理解に先行し、最終的には両者の理解が融合することにより、確かな図形概念が認識される (川寄, 2007)。

プログラミング活用では、まず画面上にかこうとする図のイメージが想起される。また、プログラミング言語は個人的言語よりも客観的であり、Vinner の概念定義へと接近させることができるものである。さらに、画面の図は言語とつながっていることから、イメージ的側面と言語的側面の不整合を小さくすることが可能になる。

様相 I では、図形概念は、図形の形についての視覚的なイメージにより認知され、言語的表現は意識されない。したがって、この段階でのプログラミング活用は適切ではない。現実のモノを見たり触ったりする経験による視覚的イメージが個人の中に形成される時期として、コンピュータを使わない期間を保障する必要がある。様相 V では、言語のみによる、図形の証明が行われる。本研究では、言語的表現と図的表現をつなげることも、プログラミング活用の目的をおくため、様相 II、III、IV におけるプログラミングの役割について考察を進める。

5. LOGO が算数・数学学習に適している理由

プログラミング言語 LOGO は、日本語でプログラムを作ることができるため、算数科において低学年から使用することが可能である。開発者のパパート (1980) は、LOGO を「子どもが数学を生きる言語として学ぶために創った」と述べている。例えば、LOGO のプリミティブ命令を使って画面に正三角形を描くためには、図4のように言語命令を入力する。子どもは、サイバネティックな動物としてのタートルに身体同調しながら、タートルの視点で、「前へ」「右へ」という言葉と、正三角形の1辺に相当する線分の長さの数値や、タートルの回転角度の数値を入力する。辺の長さや外角の角度などについ

て正しく入力しないと、正三角形をかくことは出来ない。タートルは入力したとおりに動き、誤りがある場合、子どもは、どの言葉や数値が正しくないのかその場で気づき、修正することができる。プログラミングでは、学習者は、入力者であるとともに、画面の観察者でもあり、メタ認知が働きやすくなる。言語と図の対比から、正三角形の性質について学習したり、正三角形の形のイメージを養ったりすることが可能となる。

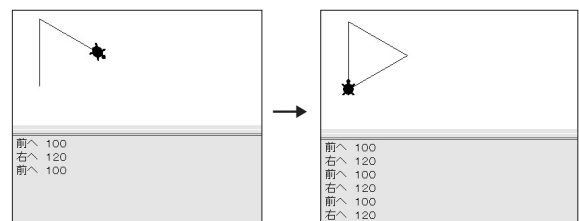


図4

また、LOGO は構造化プログラミングが可能のため、プログラミングで使う言葉 (言語) を自由に作ることができ、それまで備えていた言葉と区別なく使用できる。プログラミングを数学学習における言語活動の一部とすると、プログラミングで用いる言語自体が、学習者の用いる算数用語や数学言語に近いことが要求される。LOGO では、学習の進化とともに、プログラミングに使う「言葉」も教師側があらかじめ作っておいたり、子ども自身が学習の過程で変化させたりすることができる。さらに、プログラムの中身を見たときに、何が書かれているのか分かりやすく、他者と共有しやすいため、授業では、子ども同士がプログラミング言語を介したコミュニケーションをすることが可能となる。また、教師の協同によりコンテンツを作成したり、コンテンツを自分の学級の子どもの実態に合わせて改良したりすることも比較的容易となる。本研究においてはマイクロワールド EX³⁾ を使用する。

6. プログラム活用 の 先行研究 と 問題 の 所在

(1) アメリカでのプログラミング活用研究

1980年代前半までは、算数・数学においては BASIC によるプログラミングが主流であったが、80年代後半

になると、LOGOによる実践研究が行われた。Papertと共にLOGO研究に携わったLawlerは、6歳の娘ミリアムが、タートル幾何によるシューティングゲームによって、角度の加法性を学習すると共に、加法構造について理解した例を報告している(佐伯1995)。また、Olson(1987)やClementsら(2001)は、LOGOプログラミングによって、van Hieleの幾何学習水準の移行が促されることを示した。さらに、ClemensとBattistaは、LOGOによるカリキュラムの開発や実践研究を精力的に進めた。両氏による30以上の研究があり、それらの集大成として、2001年に、著書“Logo and Geometry”がまとめられた。タートル幾何による独自のカリキュラムを実践し、延べ千数百名の幼稚園から小学校6年までの子どもに学ばせ、実験群では、角の理解において統制群より有意に優れていることを検証したことが記された。

しかしその後、LOGO研究はほとんど進展をみない。2007年NCTMによるセカンドハンドブックでは、Battistaが「幾何と空間思考」の章でLOGOについて5ページ余りを執筆しているが、2001年までの研究を基にした内容である。

(2) わが国でのプログラミング活用研究

学校にコンピュータが普及し始めた80年代後半、研究指定校や一部の熱心な教師によって、プログラミング活用が模索された。LOGOの実践例は、1982年から始めた戸塚を皮切りに、1980年代に集中している(戸塚1995、土橋1988など)。ただし、理科・社会・総合的な内容を含み、算数では、タートル幾何で思い思いの形や正多角形などを描くものに限られていた。現在、新たなLOGOとして、オブジェクト指向の強い言語へと進化を遂げた「ドリトル」⁴⁾や「スクラッチ」⁵⁾などが再注目されているが、プログラミング自体は技術家庭科の内容として扱われている。算数・数学における研究としては、LOGOがvan Hieleの幾何学習水準の移行に有用であることを示した研究がある(真田1988、杉野1989)。近年では、タートルグラフィクスによる角と角の大きさの理解に関する研究(杉野2002)、図形の包摂関係の理解に関する研究(杉野2005)、変数プログラムによる動的イメージと図形概念の形成に関する研究(杉野2010)などがある。また、大学生が算数教材をプログラミングによって作成した事例研究(杉野2011、杉野2012)がある。しかしながら現在、継続的な実践研究は行われていない。

(3) 問題の所在

現在LOGOによる実践や研究が少ない原因は、大きく分けて3つある。

1つめは、タートル幾何のみに焦点が当たっていたことである。タートル幾何でのプログラミングを前面に押

し出すと、LOGOが使える単元は、正多角形とその外角など、限られたものとなり、本来言語活動でもあるプログラミングの継続的な活用は、現行のユークリッド幾何によるカリキュラムでは行えない。

2つめは、マイクロワールドという言葉に象徴されるように、個人的な構成主義に基づく利用形態での活用事例が多かったことが挙げられる。LOGOによるプログラミングは、個人の探求に向いているとともに、同じ言語を用いるという観点から、授業において、コミュニケーションを通じた社会的構成主義の立場での活用も見逃すことはできないが、事例研究が少なかった。

3つめは、汎用性の高いプログラミング言語という特徴から、その活用方法が教師個人に任されてしまいがちであったことである。本田(1985)は、LOGOを子どもに与えると、しばらくすると関心を示さなくなり、そこには、LOGOを活かせる良いインストラクターの存在が必要であることについて言及している。また、Pimm(1987)は、LOGOを用いて子どもが華々しい図形を画面にかくことに興味を持つものの、言語は2次的になり、置き去りにされてしまう傾向があることを指摘している。使う目的と、使う方法について教師や子どもが分かるように提供すること、換言すれば、授業(単元)での具体的な活用方法が示されないと、プログラミング言語は使いにくく、また一貫性をもった学習としての活用ができない。このための教材のコンテンツ化がされなかったことが、LOGOが使用されない一因となっていた。しかしながら、教材は本来教師自ら作成もしくは選択するべきものである。学習内容と授業目標に基づき、子どもの実態および自身の授業観が反映されるものとして、決定される。一般的な提示型デジタル教材に比較して、プログラミング用コンテンツは、この柔軟性をも備えたものと期待できる。

以上の他に、特にわが国においては、一般教室におけるコンピュータなどの情報機器やインターネットといったICT環境整備の遅れにより、授業での実践や、教師同士のコンテンツ使用や改良に関する情報交流が難しかった。ICT環境が整いつつある現状を踏まえ、今後の新たなプログラミング活用に向けて、これまでの問題を克服したプログラミング用コンテンツを開発する。

7. プログラミング用コンテンツの開発とその理念

問題点の克服のために、教材を単元や課題毎にコンテンツ化するという方法をとる。これまでは、プログラミング用の命令群と課題例を示したに留まっていた。命令群を用意するだけでは、どの課題にどの命令を使って、実際にどのようなプログラミングをさせればよいかについては、教師個人に任せがちとなり、プログラミング言語は使いにくい。そこで、単元や課題毎に使う命令だ

けを備えたコンテンツを用意する。

子どもが、学習する数学内容にフィットする部分をプログラミングさせ、そうでない部分については教師側でプログラミングして教材コンテンツとして準備することで、学習対象である数学概念に焦点を当てる事が可能になる。このために、子どもの学習に合わせた擬似プリミティブ命令を準備したコンテンツを単元や課題ごとに開発する。また、授業での活用場面と、子どもが作成するプログラム例も示す。

タートル幾何とユークリッド幾何との相違に関しては、LOGO 自体をユークリッド幾何にフィットさせるために、これまで、描かれる図形の頂点に名前を付けるなど、視点をタートルではなく、図形の外に置く方法が開発されている (Battista1987)。また、描かれる図形の頂点で、タートルが内角に視点を向ける方法も開発されている (杉野 1988)。どちらも、擬似プリミティブ命令を用意する方法であり、今後も取り入れていく。コンテンツ化を実現させるにあたっての理念とその方法を次に挙げる。

①算数数学用語の擬似プリミティブをおく

プログラミングに使う「言語」は算数・数学用語や、授業で子どもが使う言葉に極めて近いものである必要がある。場合によっては、「生活用語」→「算数用語」→「数学言語」と、子どもの学習の進化によって、プログラミングで使用する言語も変化させていくことが必要となる。図5では、画面上に11個の擬似プリミティブ命令がある。

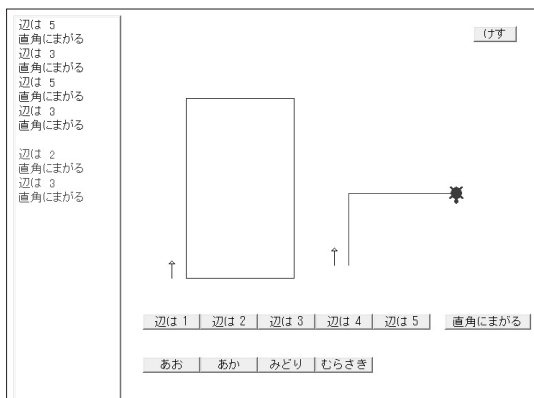


図5 長方形をかくコンテンツ

「辺は 1」という命令では、印刷すると辺の長さが1cmになる線分が描かれ、「直角にまがる」という命令では、タートルが進行してきた方向に向きを変え、内角で90°回転する。対応している図形と言語を同色で表示するための、色を変える命令なども用意した。

②技能を要するキーボード入力の負担を軽減するボタン入力

特に低学年から中学年の児童用に、画面上のボタンをクリックすることで入力ができる「1単語-ボタン入力」

教材を開発した(図5)(杉野, 2013 b)。これによって、1単語であっても、言葉で命令するプログラミングが可能になった。ボタンの配置および、タートルの位置や動く速度など、画面からのアフォーダンスにも配慮した設計が必要である。過渡期としては、ボタン入力と数値のみキーボードから入力する方法を併用し、後の正式なプロセスで作成へとつなげていく(図9)。

③入力した言語(言葉)の、画面上での逐次表示

言語で入力していることの意識化のために、ボタン入力した言語を、同一画面上のテキストボックスに逐次表示する(今後はウィンドウ8やタブレット端末用に、画面タッチ入力ができるLOGOが開発される予定である)。このことは、画面に描かれた図形と言語との対比のためにも、有効である(図5)。

④言語(言葉)による命令を貯めてから実行する方法

1単語ごとの試行錯誤による描画だけでなく、イメージした形に対する一連の言葉による手続きとして実行するために、ボタンによる入力をテキストボックスに貯めてから実行する機能も採用した(図6)。これは、スクラッチLOGOなどにある方式でもある。1単語ずつボタン入力した命令は、いったんテキストボックスに貯められた後、「動け!」ボタンによって、一連の命令として実行される。1連の言語を貯めることにより、図形をひとつのまとまったもの(全体性)として捉えるとともに、その構成要素(部分)についても注意を払うことができるといえる。

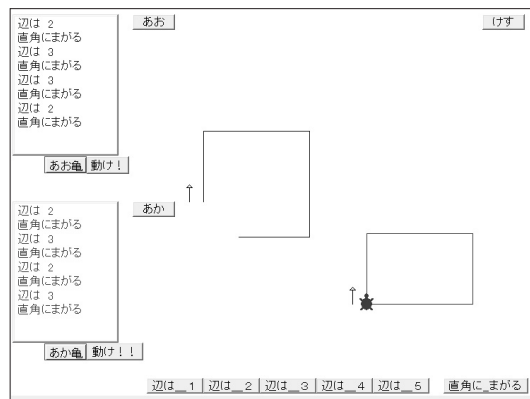


図6 命令を貯めてから実行するコンテンツ

8. プログラミング形態の変化と、図形概念の理解の様相との関係

四角形概念の学習過程における、プログラミング形態の変化について、(1)～(4)の4段階に分け、各段階で養える図形概念のイメージ的側面と言語的側面について、川崎の図形概念の理解の様相モデル(図3)の様相Ⅱ・Ⅲ・Ⅳに照らし合わせて示す。

(1)「1単語-ボタン入力」によって、プログラミングをする段階

図5にあるようなコンテンツを用いて長方形をかく探

求をする場合、いくつかかいて長方形の性質が分かった時点で、バグ（誤り）をしないで長方形をかくことができるようになる。長方形の性質に気付くきっかけとなり、van Hiele の 0 水準から 1 水準への移行が可能になる。この段階をさらに a . b . c . に細分して考察する。

a. 辺の長さや角度の感覚的理解と、図形についての試行・観察の段階

様相Ⅱでは、「長方形」という用語と、一面的イメージが形成されているので、プログラミングが開始できる。長方形の属性である、辺や角について、最初は、「辺は 1」「直角に曲がる」という算数用語の命令で、タートルがどのような動きをするか観察的に見ながら、辺の長さや直角についての感覚をともなった理解をし、様相Ⅲへと移行していく（図 5）。長方形は試行錯誤的にかかれ、長方形の性質についての理解が曖昧であることにより、うまくかけないことがある。その理由について、画面の図と言語を見比べて気付くことが可能であり、性質についての関心が起きる。授業ではまず、個人探求の場で行う。ある程度図形の性質に気付くにつつある場面で、図 6 のコンテンツを用いて、命令のひとつとまとりの手順で図形をかき、うまくかける場合とそうでない場合についての対比から、性質についての関心をより高める。授業では、個人探求の場および、発表の場で行う。

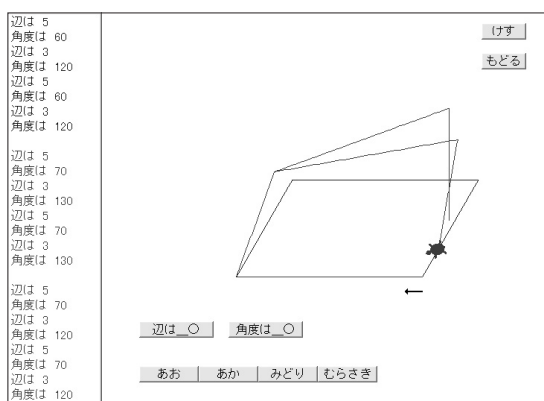


図7 四角形をかくコンテンツ

図 7 は、平行四辺形のとなりあう角度についての理解について、実践研究した例（杉野 1988）をコンテンツを用いて表現したものである。1 つめの角度を 60° にし、2 つめの角度を 120° にしたら、平行四辺形が完成した。これだけで、「隣り合う角度の和を 180° にすれば平行四辺形がかけれる。」とまとめてしまうことの危険性が、この実践から明らかになった。授業者は、子ども達が角度の和が 180° であることに気付いたに違いないと思い、それを確かめるために、1 つめの角度を変えて平行四辺形を完成する課題を与えた。予想に反して、子ども達は、隣り合う角度の性質については気付いておらず、「増えれば増える。減れば減る。」という方略を使ったため、平行四辺形がかけなかった。その後、図を見ながら、

2 つ目の角度の修正を行い、平行四辺形が完成する角度について、実験的に入力操作をし、隣り合う角度の和が 180° であることに気付いていった。

教科書などでも、ひとつの図形の角度を測ったりして確かめたあと、すぐに性質として記述されている場合がある。プログラミングで、角度や辺の長さを実験的に確かめることによって、言語や記号での一意的な表現と、実際の図形感覚とのずれの修正や、図形がもつ多面的イメージとの繋がりをもたせることができる。このような活動は、様相Ⅱから、様相Ⅲへと進むきっかけになる。

b. 図形の多面的イメージを形成し、概念定義を理解する段階

図 8 のように、図形の性質を理解し、バグをしないで図形を構成する場では、多面的な長方形のイメージを形成することが可能である。タートルの向きはマウスのドラッグによって変えられるため、傾いた長方形もかける。ひとりで 3 つの長方形をかくだけでなく、授業ではさらに、各自の長方形とプログラムを発表し観察し合うことで、自分が作らなかった長方形の形も含め、より多面的なイメージを形成するきっかけとなる。また、3 つの正しく長方形がかけるプログラムの共通性に目を向けることによって、「4 つの直角がある」、「1 つおき（向かい合う）辺の長さが等しい」といった、長方形の概念定義の理解が促され、様相Ⅲへの移行が確実になる。

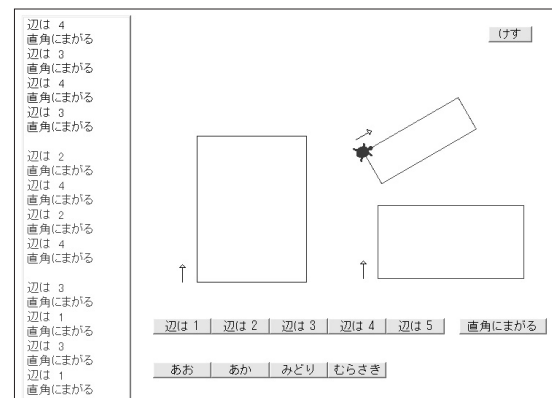


図8 いろいろな長方形の構成

教科書では、長方形の定義に図が描かれているが、出版社によって図の数は 0~3 個であり、2 辺の長さの比率や向きもまちまちである（杉野 2013 a）。続いて、方眼や等間隔に並んだドット上に、長方形をかく課題が設けられているが、言語とのつながりの面では、プログラミング活用がより強力である。

c. 図形を用いた描画を通して、より豊かな図形のイメージを形成する段階

長方形による自由描画のコンテンツによって、より豊かな長方形のイメージを獲得することができる（杉野, 2010）。図 9 では、ボタンのクリックによって、画面下のコマンドエリアに「長方形」という言葉が表示される。

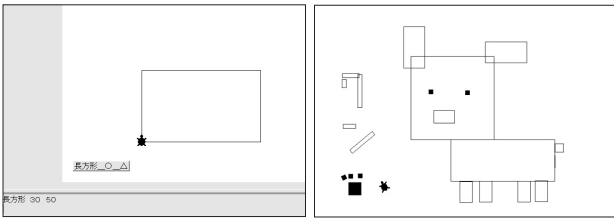


図9 長方形による自由描画

続いて2辺の長さの値のみ、キーボードから入力することで、画面に長方形が描かれる。文字入力を避けるとともに、2変数によって長方形の形が変わる経験をする。さらに、この命令を用いて自由描画をする。自由描画のよさは、先に描きたいと思う絵が想起されることにより、そのために必要とする長方形の形のイメージを思い浮かべることである。イメージしたとおりの長方形になるように、辺の長さについての図形感覚を働かせることになるとともに、多面的なイメージの獲得に繋がる。したがって、b段階よりも強力なイメージ形成が期待できる。大学生に長方形による自由描画をさせたところ、ほとんどの学生が斜めに傾いた長方形を使用した(杉野, 2010)。タングラムを使って図形を構成する活動との違いは、より自由なサイズの長方形がコンピュータ上では可能であり、数値との関係も含めた図形感覚が養えることである。

(2) プロシージャを作成し、他の図形のプロシージャと比較する段階

平行四辺形の辺や角度の性質が理解できると、プロシージャを作成することができる(図10)。様相Ⅲに相当する。ここで、キーボード入力へと移行させる。例えば、長方形と平行四辺形のプロシージャを比較して、長方形が平行四辺形の特殊な場合であることに気付くことが可能になる(杉野 2005)。このような活動は様相Ⅳへ進むきっかけとなる。

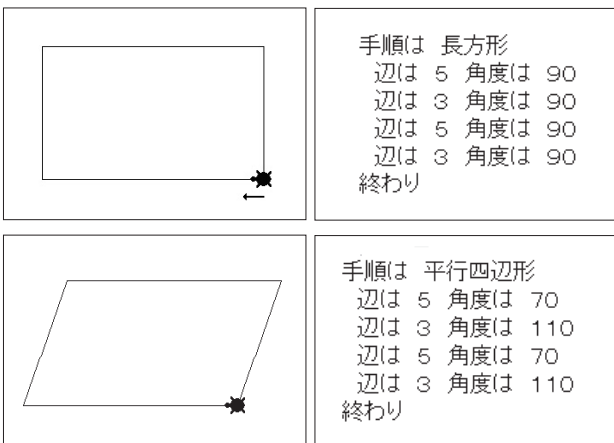


図10 長方形と平行四辺形のプロシージャ

(3) 変数を用いたプロシージャを作成する段階

変数を用いることで、平行四辺形についてのイメージを統合し、ひとつのプロシージャにまとめることができる。換言すれば、ひとつのプロシージャで、全ての平行

四辺形をかくことができる。

図11の平行四辺形のプロシージャには3つの変数があり、変数に数値を入力して、さまざまな平行四辺形をかくことができる。3つの変数のうち2つは一定の数値を入力しておくことによって固定化し、1変数の変化によって、図形の変化を実験的に観察することができる。例えば、角度を変化させたり、辺の長さを変化させたりする。この活動を通して、平行四辺形・ひし形・長方形・正方形の包摂関係に気づくことが示された(杉野 2005)。また、ひし形の変数プロシージャは、変数名をアルファベットで表示してある。子どもの発達や理解の状態によって、変数名を、用語から記号へと変化させられる。ひし形のプロシージャには2つの変数がある。平行四辺形とひし形のプロシージャを比較し、共通点と相違点を見出し、相違点にあたる変数(この場合は、辺の長さ)に注目することで、包摂関係に気付くことができる(杉野 2005)。これらの活動は様相Ⅳに相当する。

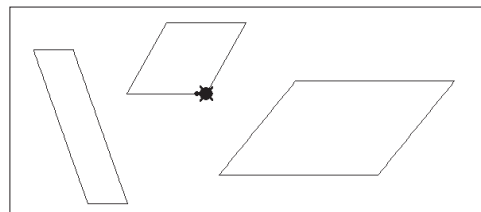
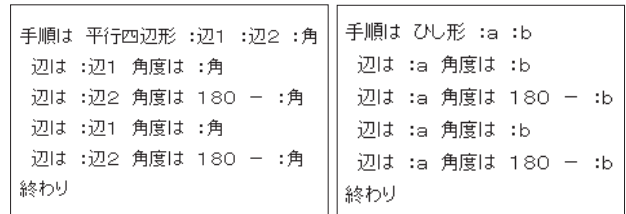


図11 平行四辺形とひし形の変数プロシージャ

(4) プロシージャの中でプロシージャを使用する段階

a. リカージョンを用いたプロシージャ

LOGOでは、フラクタル図形を描くために、リカージョン(再帰)が用いられる。図12は、フラクタル図形ではないが、図11の平行四辺形のプロシージャの中に、角の大きさを10°ずつ増加させるためのリカージョンを用いたプロシージャでかいた図である。規則性のあ

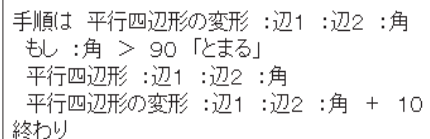
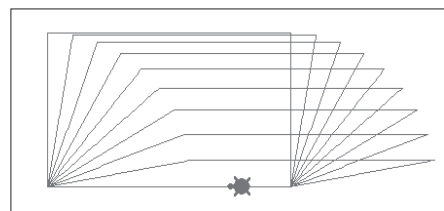


図12 リカージョンのプロシージャによる描画

る変数の増減によって図形の形がどのように変化するかについて観察し、特殊な場合（長方形）との関わりに気付くことも可能である。図形の動的イメージが整理される。様相Ⅳに相当する。

b. 別のプロシーダを用いたプロシーダ

方眼を画面に表示するプロシーダを作成する場合、構造化によるいろいろな方法が考えられる。

i) 「平行線」を使う

「平行線」のプロシーダを、 90° 傾けて2回用いることで、方眼のプロシーダが完成する。

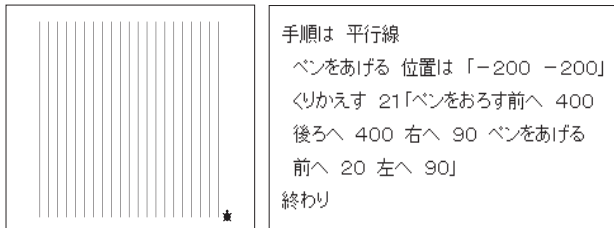


図13 平行線のプロシーダ

ii) 「正方形」をしきつめる

小さな「正方形」を20個縦にくっつけたものを、例えば「はしご」という言葉を使ったプロシーダにする。さらに、「はしご」を20列横にくっつけることで、方眼のプロシーダが完成する。

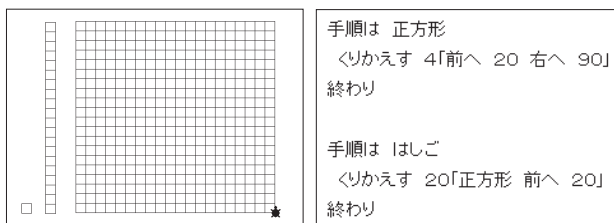


図14 正方形をしきつめるプロシーダ

iii) 「相似な正方形」を使う

リカーションを用いた「相似な正方形」のプロシーダを、2回(左下と右上から)用いることで、方眼のプロシーダが完成する。

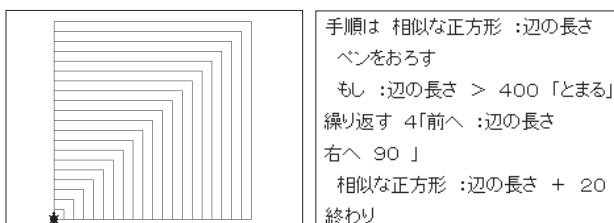


図15 相似な正方形のプロシーダ

同じ方眼をかくプロシーダでありながら、それぞれ「平行線」、「正方形」、「相似な正方形」といった異なる言葉が使われ、図形の異なる見方（構成方法）について、言語的側面からの理解が促される。複雑性を含んだ様相Ⅳに相当する。

9. プログラミングによる図形概念認識

様相Ⅱでは、学習者に、「何をかくか」という目標をもたせることで、まず図形についてのイメージを想起させることができる。算数・数学用語によるプログラミング言語を用いて図形を構成的にかくことで、用語の意味を獲得するとともに、図形の形についての理解をする。

様相Ⅲでは、手書きの作図に比べて、多くの図をかいたり見たりする経験から、これまでよりも、多面的なイメージ形成が可能になる。特にLOGOでは、傾いた図形が豊富になるという特徴がある。また、図形の性質や定義について気づくことは、言語によるプロシーダ作成の十分条件となる。さらに、図形間のプロシーダを比較することで、図形の包摂関係に気づききっかけとなる。

様相Ⅳでは、ひとつの概念を表す多くの図が、変数を用いたプロシーダによって、ひとつにまとめられる。変数に数値を入力する実験観察を通して、図形の統合的イメージを形成することができる。さらに、多変数プロシーダの変数に数値を当てはめて固定する（変化するものと変化しないものの区別をつける）ことによって、図形の包摂関係について調べることができる。この活動は、図形の性質や定義の検討をするきっかけとなる。

これらの各様相において、図形の形と言語との対比から、イメージ的側面と言語的側面の不整合を小さくし、概念イメージと概念定義のそれぞれをバランスよく発達させることが可能になる。川崎(2007)が述べたように、図形概念のイメージの表象の理解が言語的表象の理解に先行し、最終的には両者の理解が融合することにより、確かな図形概念が認識される。

今日わが国の算数・数学の授業では、「自力解決」、「練り上げ」という言葉に代表されるように、個人的な問題解決における主観的知識と、社会的構成主義に基づく客観的知識をバランスよく取り入れた立場が見受けられる(中原1999, 松島2013)。プログラミングは、個人的な問題解決のツールとして活用できるばかりでなく、共通の言語を用いるという観点から、図形の形や性質について、学級全体で探究する場面での活用という点でも意義が大きい。学習者がお互いのプログラムを比較しあうことや、プログラムを共創することによる学び合いによって、図形概念をより深く広く獲得することが望まれ、プログラミングは、共有化のためのツールともなる。

10. 今後の課題

開発したコンテンツを使った授業実践を行い、子どものプログラミングによるプロトコル分析によって、図形概念形成にプログラミングがどのように有効であるかについて示すことが今後の課題となる。特に、プログラミング活用による、ItとS1t・S2tの接近が、本来のIと

S1・S2間との翻訳に転移して影響を与えるかどうかについては、今後の授業検証における研究課題となる。プログラミングと言語的認識とのかわりについては、認知心理学的立場からの言語の獲得や、他者とのコミュニケーションとしての言語との関連について、さらに明らかにする必要がある。イメージ研究としては、コンピュータ画面上で実現可能な、動的イメージとの関連も明らかにする必要がある。

そのためには、学習目標に準拠した、一定量のコンテンツを開発し、インターネット配信によるプログラミング環境を整えることが急務となる。授業実践を重ねることによって、コンテンツの改良とプログラミング課題の適切正についての知見も得られよう。

また、従来の授業方法と、プログラミング活用との組み合わせとして、授業のどの場面において、どの程度の時間をプログラミング活用に充てるのが適当であるかということも明らかにしてゆかねばならない。

注

- 1) GCはGeometric Constructorの略で、愛知教育大学の飯島康之が開発した、動的作図ツールである。
- 2) GRAPESは、大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久教諭が開発した、関数グラフツールである。
- 3) マイクロワールドEXは、アメリカで開発され、株式会社FCマネージメントから日本語版が発売されている、LOGOプログラミング言語である。
- 4) <http://dolittle.eplang.jp/>「ドリトル」
- 5) <http://scratch.mit.edu/>「スクラッチ」

参考・引用文献

Battista M.T. "MATHSUTUFF Logo Procedures: Bridging the Gap between Logo and School Geometry" *Arithmetic Teacher* September, 1987, pp.7-11

Battista M.T. "The Development of Geometric and Spatial Thinking", *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM, 2007, pp.868-873

Clements D.H., Battista M.T., "Logo and Geometry". NCTM, 2001

Olson A.T. "Linking Logo, Levels and Language in Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 1987, pp.359-370

Vinnner S., "The Roll of Definitions in the teaching and Learning of Mathematics", *Advanced Mathematics Teaching* Kluwer, 1991, pp.65-81

Pimm D. "symbols and meanings in school mathematics" Routledge, 1987

Papert S., 奥村喜世子訳, 『マインドストーム』, 未来社, 1980 (1982 邦訳)

川崎道広, 「直感的側面に着目した図形指導過程の研究」, *数学教育論文発表会論文集* 38, 2005, pp.379-384

川崎道広, 「図形概念に関する認識論的研究」, *日本数学教育学会誌 臨時増刊 数学教育学論究*, 88, 2007, pp.13-24

佐伯昭彦, 末廣聡, 中谷亮子, 「楕円の幾何学的な定義を図形及び方程式の表現様式を関連付ける数学的活動 - 表現様式間及び表現様式内の変換を支援するテクノロジー活用 -」, 『*科学教育研究*』 37, 1, 2013, pp.2-14

佐伯胖, 『「わかる」ということの意味』, 岩波書店, 1995, pp.138-155

杉野裕子, 「算数・数学の授業におけるコンピュータプログラミングの役割 - 自作ソフト “学校図形 Logo” を通して -」, *数学教育論文発表会論文集*, 21, 1988, pp.133-138

杉野裕子, 「van Hiele の幾何学習水準を認識するツールとしての LOGO プログラミング」, *数学教育論文発表会論文集*, 22, 1989, pp.401-406

杉野裕子, 「Logo プログラミングによって概念の意味と関係を認識する方法 - 四角形の構成を通して -」, *数学教育論文発表会論文集* 38, 2005, pp.571-576

杉野裕子, 「Logo プログラミングを利用した図形概念の形成に関する研究 (I)」, *数学教育論文発表会論文集* 43.2, 2010, pp.603-608

杉野裕子, 「Logo プログラミングによる算数教材コンテンツの作成 (I)」, *数学教育論文発表会論文集*, 44.2, 2011, pp.825-830

杉野裕子, 「Logo プログラミングによる算数教材コンテンツの作成 (II)」, *数学教育論文発表会論文集*, 45.2, 2012, pp.911-916

杉野裕子, 「算数学習におけるコンピュータプログラミング活用 - 長方形概念形成のための LOGO 教材開発 -」, *科教研報*, 27.5, 2013a, pp.43-48

杉野裕子, 「低学年算数のための「1単語 - ボタン入力」による LOGO プログラミング教材」, *日本科学教育学会年会論文集* 37, 2013b, pp.363-364

辻宏子, 「コンピュータ環境下の作図活動による figural concept の育成」, *科学教育研究*, Vol.27, No.2, 2003, pp.85-93

中原忠男, 「数学教育における表象体系の研究 (I)」, *数学教育論文発表会論文集*, 26, 1993, pp.49-54

中原忠男, 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社, 1995

中原忠男, 「数学教育における構成主義的授業論の研究 (II) - 数学学習の多世界パラダイムの提唱 -」, 全国

数学教育学会 数学教育学研, 5, 1999, pp.1-8
平林一栄, 『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社,
1987
本田成親, 三宅ほなみ編, 『教室にマイコンをもちこむ
前に』, 新曜社, 1985, pp.83-106

松島充, 「数学教育研究における学習者の外化と議論の
重要性」, 教科開発学論集, 1, 2013, pp.183-193

【連絡先 杉野 裕子
E-mail:y-sugino@kogakkan-u.ac.jp】

LOGO programming contents for supporting mathematical concept development —promotion of the verbalization and imaging of figure concepts—

Yuko SUGINO

Graduate School of Education Cooperative Doctoral Course in Subject Development, Aichi University of Education

Abstract

I have been studying to show the importance of adopting a programming in the mathematical education and developed the LOGO teaching materials which is made good use of in the field of Euclidean geometry, in order to improve understanding and learning figure concepts. The present article offers a theoretical framework with consistency about my study and also new programming materials in which I embody my theory. I consider logically the system of mathematical expression with computers and especially prove that programming is useful for the verbalization and imaging of figure concepts. Meanwhile, I used a series of tasks learning “square” with developed materials, checking it against “aspect models for understanding the figure concepts” (Kawasaki, 2005). I assume that programming is the linguistic tool to show figure expressions on the screen and it means image and language are connected. The new teaching materials were divided into several contents for lessons so as to improve something to be desired about the previous LOGO programming. These contents include four traits. ① “pseudo-primitive order” as the mathematical terms, ② the button input for decreasing the functional troubles, ③ the simultaneous indication of the words inputted, on the screen, one by one, ④ the methods of accumulating and giving all of orders at once.

Keywords

programming, LOGO, mathematical concept, figure, teaching material contents