

【研究ノート・資料】

数学教育でのテクノロジー利用が生み出すさまざまな研究課題について — 作図ツール Geometric Constructor の研究開発に関連して —

飯島 康之

愛知教育大学 (数学教育講座)

1. はじめに

教科開発学とは何かあるいは何であるべきかという問いに対して考察する上で、数学教育学（あるいは広く教科教育学）の一研究者として、他の研究領域とのコラボレーションという観点を取り上げてみたい。教科教育学はもともと複合領域的な研究分野であるため、さまざまな学問のコラボレーションを行いやすい領域ではあるけれども、他大学での教育学研究科と比較して、私たちの共同大学院では教科教育学以外にも、教科内容学や教育環境学のさまざまな研究分野の方々とのコラボレーションの可能性がある。さらに、教育に関わる問題に関して、「開発」を一つの主軸として取り組むことは、理論中心の学究的な研究でのコラボレーションとは異なった研究成果を生み出せることも期待できる。そこで得られた知見は単に数学教育学の中だけで機能するのではなく、教科開発学全体で生かせる知見に昇華することが、教科開発学としての研究のスタンスでもあると考える。

たとえば、私は数学教育学に対するテクノロジー利用のインパクトに関わる研究に取り組んでいるが、テクノロジー利用のインパクト自体は他の教科学あるいは教育環境学にとっても重要なテーマの一つといえる。私自身の作図ツール Geometric Constructor (GC と略す) の開発に関連して発生するさまざまな研究課題やコラボレーションの可能性を概観することによって、教科開発学のあるべき姿について考察するための資料となれば幸いである。

2. 研究の出発点としての「図形の探究」と、それを可能にするものとしてのソフト開発

テクノロジー利用に関わる研究は、「実現が難しい教育目標」への注目と、「教育可能性を高める手段としてのテクノロジーの利用」という具体的な開発という出発点から始まる。作図ツールに関わる研究の場合も、直感的な表現をするならば、「図形を動かして調べることで、どんな数学的探究や授業が可能になるのか」ということができる。逆にいえば、このようなシンプルな課題からもさまざまな副次的な研究課題が発生する。その様子を

以下で検討してみよう。

2.1 問題点の所在：手計算やフリーハンドの作図による「図形の探究」の限界

たとえば、図形を動かして調べる目的の一つとして、「条件を満たすいろいろな場合を調べる」ことに注目してみたい。このことは教科書の中でも次のような問題として扱われている。

 ひろげよう どうなるかな


四角形 ABCD をかき、4 辺 AB, BC, CD, DA の中点を、それぞれ、P, Q, R, S とします。このとき、四角形 PQRS は、どんな四角形になるでしょうか。

図 1 いろいろな場合を調べる例(啓林館(2011))

ここではフリーハンドでいろいろな四角形 ABCD を作図し、それぞれの場合の PQRS を観察することで、「どんな場合も PQRS は平行四辺形になる」ことや「ABCD が長方形のときには PQRS はひし形になる」ことなどを発見することを想定している。このような「いろいろな場合について調べる」ということは、この問題に限定して価値があることではなく、さまざまな問題に対して一般的に価値があることなのだが、別の問題に対しても同様の方法、つまりフリーハンドで行うことは必ずしも簡単ではない。実際、上記の問題に対する図と、上記の問題を少し変えた問題「四角形 ABCD をかき、4 つの角 A, B, C, D のそれぞれの二等分線をかき、それらの交点をそれぞれ P, Q, R, S とする。このとき、四角形 PQRS は、どんな四角形になるでしょうか。」に対する図をフリーハンドで描くと次のようになる。



図 2 4 辺の中点を結ぶ



図 3 4つの角の二等分線をひく

図 2 では、「どうも平行四辺形になりそうだ」ということは分かるが、図 3 では中の四角形の特徴は分かりにくい。

2.2 実現不可能な数学的探究を可能にするものとしてのテクノロジー：ソフトの設計と開発

上記のような課題に対して、テクノロジーは一つの解決の可能性を与えてくれる。つまり、(図形を動かして調べるという)教育目標を、(フリーハンドよりも)より広い範囲に関して実行可能な道具を開発することによって、それを解消するという方法である。これを解決するためには、「図形を動かして調べる」とはどういうことなのか。図形やそれに対する操作をどのようにオブジェクト化し、実装し、利用可能なソフトウェアとして仕上げていくのかという課題を提供する(飯島(1990A))。

このことを解決するためには、図形・作図手続き等の設計・実装などが最も基本的な課題になるけれども、それで終わるわけではない。想定する学習活動との関わりの中で、(複数の)学習環境としての設計を行うことや、教師中心で使う場合を想定するときは、教授活動との整合性を高めるインターフェイスの工夫など副次的に必要な課題がさまざまに生まれてくる(飯島(2005))。

2.3 教具開発とソフト開発の類似点と相違点

既存の教育学研究において、このような取り組みに対応するのは、教具開発であろう。たとえば、「四角形の4つの辺の中点を結んだ四角形」について、生徒が試行錯誤しやすくするための教具として、輪ゴムなどで特定の問題に取り組む教具を開発したり、(汎用の教具である)ジオボードの使い方を考察するというような取り組みである。

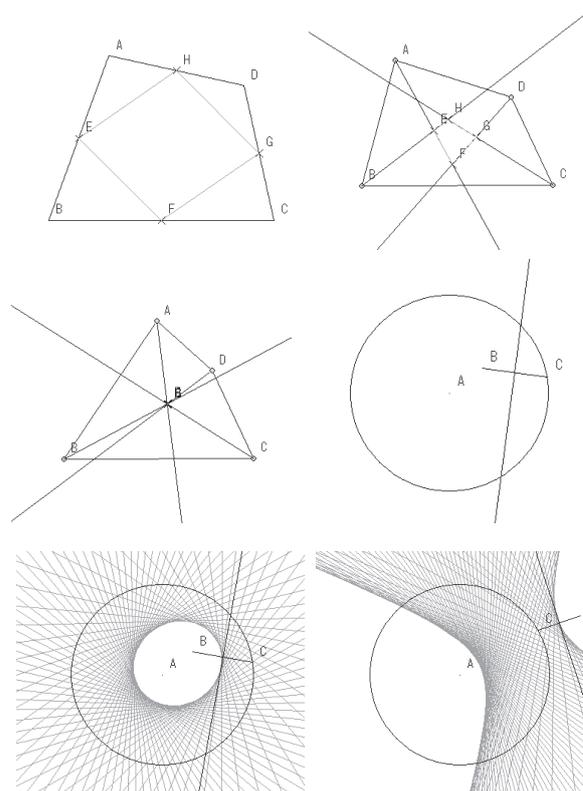


図 4 GCによる図の例

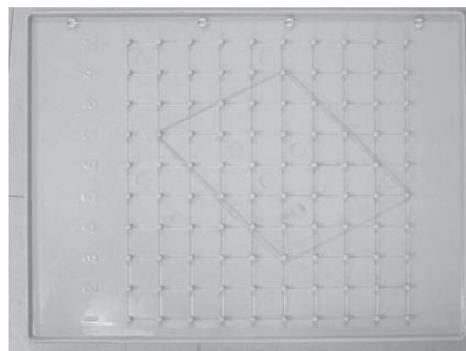


図 5 ジオボードに輪ゴム

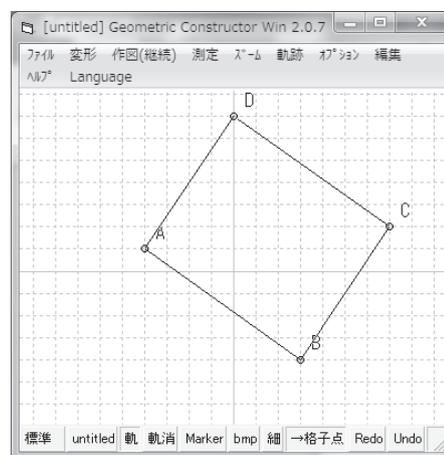


図 6 GC上の格子点で四角形

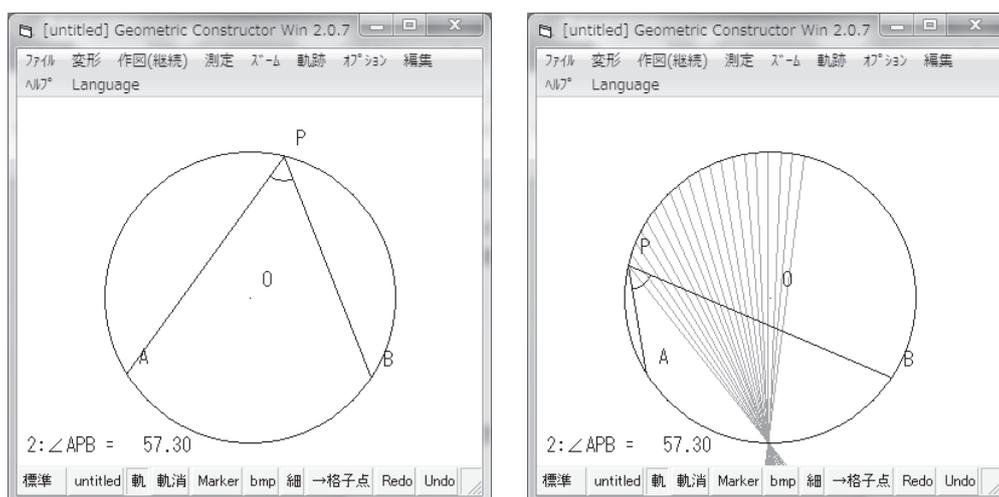


図7 GCで作成した円周角

たとえば、ジオボードは、さまざまな目的に利用可能な教具としての評価を得ているが、上記のような「さまざまな場合を調べる」ことを想定する場合に、利用可能な図形(問題)の範囲は必ずしも多くはない。元の点を格子点上にとり、それらの内分点などをゴムという属性によって実現するので、それらの属性を使って表現可能な図形のみしか扱うことができない。たとえば、上記の問題の条件をほんの少し変えただけの問題「四角形の4つの角の二等分線によってできる四角形」について調べることはできない。

それに対して、ソフト開発によって実現できる汎用性はとても広い。たとえば、GCでは、垂直二等分線、角の二等分線などを直接メニューから選択して作図できるだけでなく、基礎的な作図の組み合わせでさまざまな作図を表現することができるので、ジオボードと比較すると非常に汎用な道具だということができる。

上記のようなことを考えると、ソフト開発は教具開発とかなり密接な関係にあると同時に、教具とはかなり異なった側面をもっていることが分かる。つまり、ツール型のソフト開発では、「プロセス」を定式化・実装することによって、かなり汎用な範囲において、それを実現する。つまり、「そのようなプロセスを汎用的に実行しやすい」汎用の教具であり、思考の道具と言ってもいいかもしれない。

一方、数学教育の中で扱われる教具の多くは、概念形成等を支援するために利用され、いずれ「それを使わなくても大丈夫」であることが求められる存在であるのに対して、このようなソフトは、その後の問題解決においても、文字通り「思考の道具」として利用し、解決を進めるために使うことを想定して開発されている(飯島(1990B, 1991A,B))。

3. ソフトが可能にする数学的探究の明確化

3.1 「思考の道具」としてソフトが機能するためには

前節で述べたように、ソフト開発に際しては、限られた問題だけに通用するソフトではなく、さまざまな問題に汎用に機能するソフトを目指している。出発点としている事例やソフトの仕様の中にそれらは内包されている。一方、実際にそのソフトが思考の道具として機能しているのかどうかはまた別の問題である。一度開発した後は、それがどのような数学的探究の中で利用可能と想定されるのか、また、どのような問題群に対して有効と思えるのかを明確にし、それが実際にはどうかを明らかにする必要がある。

3.2 エキスパートが利用した場合の数学的探究のケーススタディ

多くの場合は、研究者自身あるいは大学生など、数学的探究のエキスパートの場合のケーススタディを出発点として、関連する事例集を作ることが多い。このような研究は、教科内容学のスタンスから教科学を考察する方法論とかなり共通するといえる。というのも、次のような事例を対象とすることが多いからだ。

- (1) (紙と鉛筆のような)通常使う道具では、解決することが難しいと思える問題に対して、どのようなアプローチが可能になるかを調べてみる。
- (2) 通常使う道具を使った解決が、この道具を使うことでさらにどこまで発展するかを調べてみる。

(2)の例として、2.1で示した、四角形の4つの角の二等分線で作られる四角形の問題を挙げてみよう。この問題はフリーハンドでの探究は難しかったが、作図ツールを使うとさまざまな意味で興味深い結果を得ることができた。

たとえば, ABCD を代表的な四角形の形にしたときの PQRS について調べ, 対応表にまとめてみると, 次のような結果になる。

ABCD	PQRS	図
正方形	一点	
長方形	正方形	
ひし形	一点	
平行四辺形	長方形	
台形	四角形 (実際には, $\angle P = \angle R = 90^\circ$ の四角形)	
凸四角形	四角形 (実際には, 円に内接する四角形)	
くさび形	2つの三角形 (実際には, 4点 P, Q, R, S は同一円周 上について いる)	

表 1 対応表

この結果から次に何を考えたいかを問うと, さまざまな答えがあった。数学的探究における分岐点と多様性を示すといえる。四角形の4辺の中点を結ぶ事例と違って, すべての場合に共通な性質というものを見いだすことが難しい。むしろ, PQRS の形の中に「あってもいいはずなのにないもの」として, ひし形, 平行四辺形, 台形などを見いだすことがある。それらを構成してみようといろいろな場合を調べてみると台形を作ることはできるのだが, この場合も一般的な台形ではなく, 等脚台形になる。実はすべての場合に共通した性質として, PQRS は円に内接する四角形になることがある。「あってもよいのにない形」に注目し, 隠れた共通する性質を発見することで, それを証明する(不可能性の証明)ことにたどりつくような探究例もあった。これらは既存の道具でもありうるのかもしれないが, やはり短時間で正確な図によっていろいろな場合をインターラクティブに調べることができるからこそ可能になっていることといえるだろう(飯島(1994A,B))。

また,このような問題に取り組む中で, それまでは経験しなかった新しい発見をすることもある。予想はできるものの, その証明が見つからない場合に, 古典的な問題設定なので, すでにどこかで解決されている結果なのだろうが, どこで解決されているのかもわからないことも少なくない。たとえば, 5心の中で, 外心, 重心, 垂心などはその軌跡がきれいに求められる問題が多い。そこで, 「 $\triangle ABC$ の内心 I がある。点 A を BC の平行に動かしたときの軌跡を求めよ」という問題を作り, 取り組んでみた。

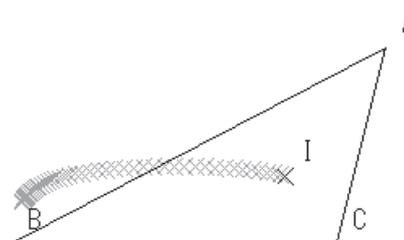
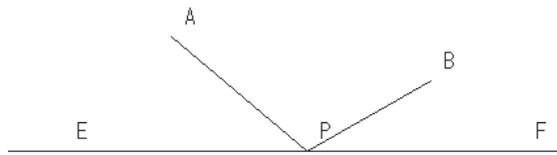


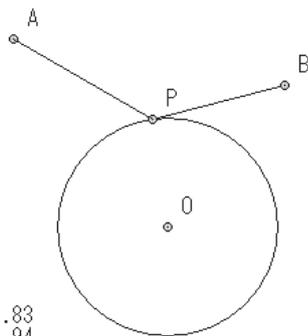
図 8 内心の軌跡

一見楕円のようにもみえるが, 少し違う。最初に, 「楕円ではなさそうだ」ということを確かめる探究を行うことができた。しかし, 形はきれいになっているのだから, 代表的な曲線になっていそうなのだがよくわからない。私の場合はそこで自分の探究は終了とし, 楕円ではないことを明確化したプロセスとして扱ってみた(飯島(1992))。その後, ある院生がやはりこの問題に取り組んだ。彼はいろいろな数学書を調べる中で, この曲線は楕円曲線として表現できることを見いだした。



2:AP	=	6.76
3:PB	=	5.41
4:AP+PB	=	12.17

図9 最短経路(1)



2:AP	=	5.83
3:PB	=	4.94
4:AP+PB	=	10.77

図10 最短経路(2)

図9は、定点A,Bと定直線EF上に動点Pがある。PA+PBが最小になるような点Pの位置を求めよという問題はよく知られた問題であり、中学校の教科書にも掲載されている。この問題の「直線」という条件を「円」に変えたものが図10である。GCを使うと実験的な意味で解答を見つけることができたり、その点を求めるための幾何的な条件を複数見つけることはできたのだが、それを(定規・コンパスを使って、あるいはGC固有の方法によって)作図する方法が見つからなかった。懸案の問題だった。2009年に出会ったイギリスの研究者に相談してみたところ、「この問題は実はかなり難しく、1998年にこの論文の中で論じられている」と数学の雑誌(American Mathematical Monthly)の掲載された論文(Neuman(1998))を紹介してくれた。

これらの事例は、シンプルな条件の問題を少し変えただけでもさまざまな問題が生まれうる可能性を示すと同時に、テクノロジーによって数学的探究の可能性が深化されていることを示すといっていいたいだろう。

3.3 扱いたい問題や解決過程の側からソフト開発を刺激する

ケーススタディを重ねる中で、ソフトで支援すべきプロセスやソフトを使って取り組みたい問題群が生まれてくる。そして、それを実現するための機能の追加やインターフェイスの工夫をする中で、ソフトは洗練されていく。「ソフト開発」→「数学的探究の研究」という一方向的な流れではなく、まさしく、両者のコラボレーションが新しい研究領域を形成していく。

4. コンテンツ開発・教材開発・カリキュラム開発とICT利用

4.1 実験可能・実用可能・実践可能な「学びの場」をつくる

モノによる教具の場合と違って、ソフトウェアは複製・配布が簡単である。特に、ブラウザ上で動作する形でソフト開発をしておくと、インターネットを介するだけであらゆる人々への利用可能性が開けていく。単体ソフトとマニュアルだけでは単に「可能性がある」というだけであり、その可能性をユーザーが実感し、自らの数学的探究や学習として実現していくためには、一定のまとまりのコンテンツという形で提供していくことが必要である。インターネット上に提供されたコンテンツは、実験的な開発であるだけでなく、さまざまな学校での日々の教育実践の中でも利用可能という側面に注目するならば、実践的・実用的な開発でもある。しかも、実践者の方々との開発・実践のサイクルが短時間の中で進めて行けることも考えれば、過去において典型的であったResearch and Developmentのモデルとは違ったスタイルの研究開発が行える可能性を持っている。

4.2 さまざまなねらいに基づくコンテンツ開発の可能性

コンテンツ開発のねらいは多様である。ソフトとマニュアルを提供することがまず第一段階である。代表的な事例を示すことによって、そのソフトが関わる数学的探究の全体像を示すコンテンツ群の開発というものもあるだろう。教育実践との関わりを意識するならば、現行の学習指導要領や教科書との併用を念頭におき、「標準的な授業」で使うべきコンテンツ開発もあるだろう。あるいは、現行の教科書の周辺に限定しながらも、発展的な扱いなどの可能性を示すコンテンツ開発もあるだろう。さらに、ソフトが支援する数学的探究そのものを中心にして、新しい学習の可能性をコンテンツとして提示し、将来的に新しいカリキュラム開発に資することを目指したコンテンツ開発もあるだろう(飯島(2000A, 2001, 2002))。

さらに、それらのコンテンツは、静的なコンテンツに限るものではない。教員が自らの授業のためにコンテンツ開発を行うことを支援するシステムのようなものもありえれば、生徒自身が自らの学びを残していくようなものも、その中で議論をするためのコミュニティ形成のようなものもありうる。そして、前項でも述べたように、インターネット上で開発されるコンテンツは書籍等での教材の提供と異なり、必ずしも完成品を提供しなければならないというわけではない。むしろ、コンセプトと典型的なサンプルを提示し、さらにどのようなものが必要なのか、またどのような修正が必要なのかを、それらを手がかりに議論したりテストし、随時サンプル等を追加していくという実践的な実験を行う場所でもありうる。

つまり、このようなコンテンツ開発、学習環境の開発は、ソフト開発に連動して発生する研究テーマ群としてとらえるべきだといえるだろう。

5 授業研究 -教育実践とのコラボ-

5.1 「授業」の位置

たとえば、本研究にとって、授業というのは、研究の出発点であり、終着点でもある。新しい授業の創造をめざして、授業者と文字通り作り上げていくプロセスと成果が、ここで想定している授業研究である。授業研究を行う場合にはいくつかのケースがある。前節までで考察してきたような数学的探究などのケーススタディの中から中学生・高校生向けの教材を開発し、その授業化の検証を行うような研究主導の場合もある。しかし、多くの場合、むしろ共同研究者としての授業者と、扱おうとしている教材、使えるソフト、機器などを踏まえたときに、どういう授業作りをしてみたいかを議論し、その実現に何が使えるのか、何が足りないのかを議論し、必要に応じてそれを開発しながら、指導案の検討、模擬授業、他のクラスでの検証、最終的な研究授業の実施などのプロセスを経ながら授業研究として進めていくことが多い。この授業研究は、たとえばソフト開発にとっては実践的なアイデアからのニーズが生まれる場であると同時に、試作したものが実用に耐えるかどうかのテストの場でもある。また、さまざまな教授スキルや教材にとっても実験の場でもある。さらに、そのような新たな試みの中で、生徒の学びがどのような形で現れるかを観察する場でもある。本研究でのこれまでの授業研究の様子(飯島(1993, 1995, 2007, 2009, 2010))を大まかに概観してみたい。

5.2 これまで行った授業研究から

(1) コンピュータ室での実践 (1990年代)

コンピュータ上で図形を動かすということに授業として初めて挑戦したのが1990年代であった。この頃はコンピュータ室で2人1台を使って、2時間構成を中心とした授業が多かった。コンピュータを使った授業そのものが珍しい時期であると同時に、図形を動かすということが、教師にとっても生徒にとっても新鮮な時期だった。授業研究としては、さまざまな数学的活動(いろいろな場合を調べる、不可能の証明、共通する性質の発見、条件変え、軌跡で考える、など)の授業化をテーマとして共同研究を行った。



図 11 GC/DOS を使った実践(1992)

(2) 普通教室で提示型コンテンツを使った実践(2000-)

「教育の情報化」に伴い、普通教室にプロジェクタと1台のPCを持ち込んで行える授業や、デジタル黒板に適した授業に取り組んだ。この場合、問題提示や発表等においてはコンピュータを使うが、生徒自身の探究は紙の上で行うものが中心となった。授業研究の中ではさまざまな教授スキルも副次的に生まれた。たとえば、下図の示すように、プロジェクタ直接黒板に投影し、そこに記号や証明を書き込むことなども生まれた(飯島(2001))。

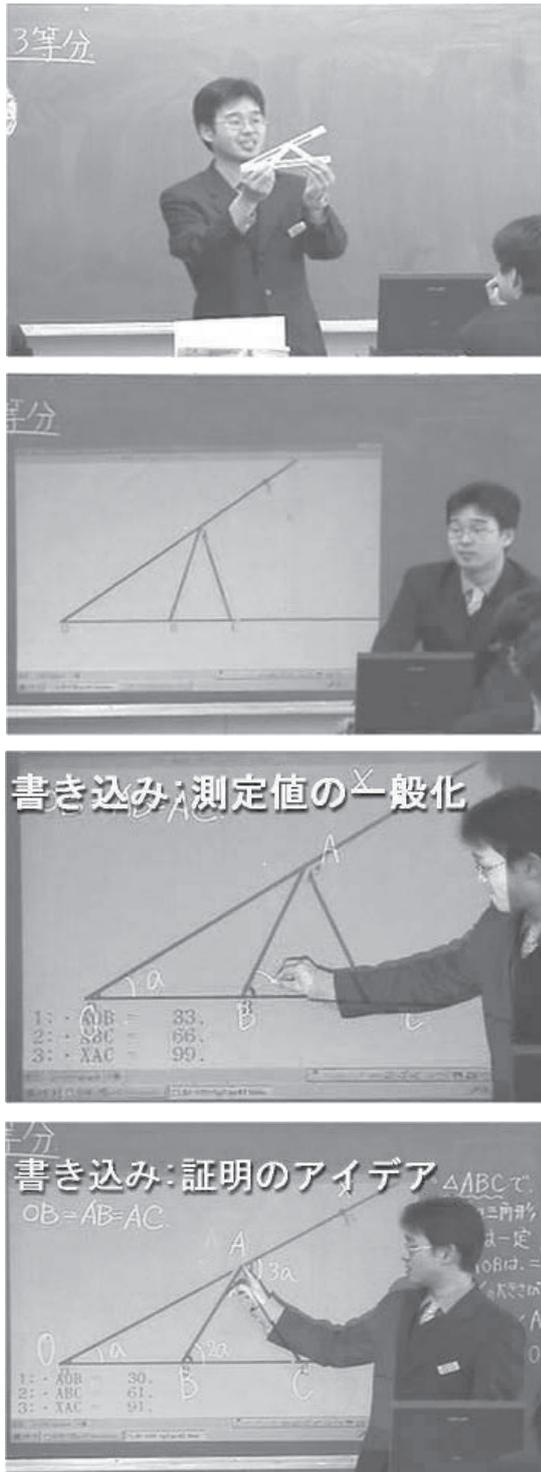


図 12 GC/Win を黒板に投影して使った実践(2000)

(3) 普通教室にネットブックやタブレットを持ち込んだ授業(2008-)

無線 LAN にも対応した安価な機器(ネットブック)の登場に伴い、90年代と同様に、コンピュータを使って調べる活動を普通教室でも行えることを目指して、ネットブックを4人に1台使った実践を行った。ネットブックで実感したさまざまな問題点が iPad では解消していることが分かり、2010年以降は iPad での実践に変わっていった。4人1台でこれらの機器を使うときに特徴的なのはグループ活動における言語活動であり、そこに焦点を置いた授業研究を進めつつある(飯島(2010B, 2011, 2012))。



図 13 ネットブックを使った実践(2008)



図 14 iPad と GC/html5 を使った実践(2010)

6 おわりに

教科開発学というのは、これから我々が作り上げていく新しい学問である。その新しさの源泉を検討するための素材の一つとして、たとえば、私の研究における「開発の現場」とそこにおけるコラボレーションの可能性を明らかにすることを本稿では試みた。たとえば、教育における ICT 利用に関する研究というのは、単に使う道具がアナログ的な機器からデジタル的な機器に変わっていくことを意味するだけでなく、それに連動して生まれるさまざまな研究の総体と考えるべきである。それが実りある研究であるためには、さまざまな分野の研究者、実践者がコラボレーションを行えることが一つの条件になるのではないだろうか。そして、それらが行える場こそが、「開発の現場」であり、教科開発学にとっては、そのような「開発の現場」を持つことはとても重要だと考えている。

参考文献

- Neumann, P.M.(1998) Reflections on Reflection in a Spherical Mirror, *The American Mathematical Monthly*, 105, 6, 523-528
- 飯島康之(1990A), Computer における図形の動的な扱いについて：幾何図形作図ソフト開発のための基礎的考察, *筑波数学教育研究* 9(A), 105-117
- 飯島康之(1990B), Computer による動的な図形教材の開発について —“Geometric Constructor”を用いた探究的学習のために—, *イプシロン*, 32, 56-75
- 飯島康之(1991A), 作図の構成的な性格とコンピュータによる支援について(その2) —作図と変形に内在する2つの関数的側面について—, *イプシロン*, 33, 33-54
- 飯島康之(1991B), 作図ツールの導入に伴う作図の新しい役割について, *数学教育論文発表会論文集* 24, 275-280
- 飯島康之(1992), 作図ツールを用いた問題解決における問題の変容と問題生成の一方略について - 作図の構成的な性格とコンピュータによる支援について(その3), *イプシロン*, 34, 32-48
- 飯島康之(1993), コンピュータで数学授業を変えよう, *明治図書*
- 飯島康之(1993), 作図ツールを用いた探究例と問題例：今町先生と松沢先生の問題に関連して *数学教育研究* 8, 37-48
- 飯島康之(1994A), コンピュータ利用による数学教育学における基本的な研究課題 —インタラクティブという観点からの考察—, *イプシロン*, 36, 63-81
- 飯島康之(1994B), インタラクティブな探究の状況依存性について：作図ツールを用いた探究のための

教材開発のために, *数学教育論文発表会論文集* 27, 353-358

- 飯島康之(1995), GC を活用した図形の指導, *明治図書*
- 飯島康之(1997A), テクノロジーによって関数関係の探究を支援するために —Geometric Constructor を用いたケーススタディを中心に—, *イプシロン*, 39, 59-78
- 飯島康之(1997B), 作図ツールの「変形」と「変換」を用いた数学的探究について：エルランゲンプログラムのアプローチ, *年会論文集* 21, 255-256, 1997-07-29
- 飯島康之(1997C), Geometric Constructor による数学的探究の制約と多様性：主要3機能(変形・軌跡・作図)に関連して, *数学教育論文発表会論文集* 30, 385-390
- 飯島康之(2000A), 作図ツールを用いた写像・変換と複素数に関する数学的探究について, *数学教育論文発表会論文集* 33, 205-210
- 飯島康之他(2000B), 作図ツールを用いた複素数指導の可能性について, *愛知教育大学教育実践総合センター紀要* 3, 137-143
- 飯島康之(2001), 教育用ソフトと教材のインターネット上での整備：作図ツールコンソーシアムが行ったことの報告と提言, *日本数学教育学会誌* 83(12), 13-24
- 飯島康之(2002), 「教育の情報化」と Geometric Constructor に関するコンセプトの変化, *イプシロン*, 44, 17-28
- 飯島康之(2005), 作図ツール GC/Java を利用した多様な学習環境の開発, *科学教育研究* 29(2), 110-119
- 飯島康之(2007A), 作図ツールを用いた数学的探究の多様性を生かした教材研究について, *数学教育論文発表会論文集* 40, 715-720
- 飯島康之(2007B), 研究授業から GC の改良案と新しい授業像が生まれる様子のケーススタディ —附属名古屋中学校での岩田実践と GC のイベント機能の関わりについて—, *イプシロン*, 49, 1-12
- 飯島康之(2009), 普通教室での1時間の授業でグループ1台の GC を使う授業の設計と実践 —附属名古屋中学校での伊藤実践：「共同井戸を掘るべき場所を探せ」—, *イプシロン*, 51, 5-16
- 飯島康之(2010A), 作図ツール Geometric Constructor を使った探究事例と教育実践について (数式処理と教育), *京都大学数理解析研究所講究録* 1674, 99-111
- 飯島康之(2010B), 生徒用学習端末としての iPad の可能性と html5 による数学用ソフト・コンテンツ開発の可能性：GC/html5 の開発を手がかりに, *数学教*

育論文発表会論文集 43(2), 741-746,
飯島康之(2010C), 「壁にタッチする最短問題」とその周
辺 —附属名古屋中学校での後藤実践に関連して—,
イブシロン, 52, 23-33
啓林館(2011), 未来へひろがる数学 3
飯島康之(2011), iPad と GC/html5 を使った授業による
二つの提案 —附属名古屋中学校での鈴木実践に関
連して—, イブシロン, 53, 13-24
飯島康之(2012), 作図ツール GC/html5 ビューア版の開

発と iPad を使った教育実践 (数学ソフトウェアと
教育 —数学ソフトウェアの効果的利用に関する研
究—), 京都大学数理解析研究所講究録 1780,
243-254

【連絡先 飯島 康之
E-mail: yijima@aeuacc.aichi-edu.ac.jp】

Research problems derived from the development of interactive geometry software *Geometric Constructor*

Yasuyuki Iijima

Aichi Univ. of Education, Mathematics Education

Abstract

Technology changes the methods of mathematical research and application. For mathematics and mathematics education, technology provides many new research problems. To illustrate it, I analyze the case of the development of interactive geometry software *Geometric Constructor*.

We found the limitation of traditional method (e.g. free-hand drawing) as a tool for the problem solving of some problems in geometry. And we had an idea to change the limitation by the use of technology. It is the starting point of this study and it made various research problems as following.

First kind of problems is how to design and implement the software. I analyzed the nature of geometrical construction and made some classes (in programming language) and formulated the geometrical construction, measurement, deformation, trace and so on. This process has some similarity and difference with the process of development of subject materials.

Second kind of problems is to clarify the influence of the software to the mathematical problem solving, and to clarify the mathematical contents and processes, which is supported by the software.

Third kind of problems is to make web contents. We can distribute the software, its manuals, many educational resources, which is intended to be used at many schools and to activate the discussion in the community of users.

Fourth kind of problems is about lesson study. We started the lesson study with this software since 1990. In 1990s, it was focused on the students' mathematical activity in a computer room. In 2000s, we used it to present and discuss the problem with projector and screen in usual classroom. In 2010s, we used iPads to activate the group discussions.