Bulletin of Aichi Univ. of Education, 64（Humanities and Social Sciences）, pp. 1 − 6, March, 2015

割合概念における等全体の発達

栗山 和広* 村瀬 暁耶**

*学校教育講座（教育心理学）
**北城小学校

A Development of Equal-Whole in Learning Ratio Concepts

Kazuhiro KURIYAMA* and Akiya MURASE**

*Department of School Education (Educational Psychology), Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan
**Kitashiro Elementary School, Kasugai City 486-0813, Japan

割合概念は，小数，分数，比例といった有理数の下位概念の1つであり，中学校で学習する有理数へとつながっていく重要な概念である。しかし，文部科学省(2011)は，割合や比例の分野で継続的に問題があることを指摘している。また，多くの研究が，割合概念は小学校の算数の中で，子どもにとって理解することが極めて困難な概念の1つであると述べている（Kiren, 1988；Lamon, 2007)。割合概念は子どもにとって理解することの極めて困難な概念である。

割合概念の困難性について，これまでにも多くの研究がなされている（Hart, 1988；石田・神田, 2008；Kiren, 1983, 1988, 1993；中村, 2002, 2008；渡辺, 2011；Smart, 1980)。例えば，中村（2002）は，割合は基にする量と比べる量の2つの量の関係を表す際の数の相対的な見方が難しいこと，割合の2つの量の関係を表す際の表現が違うことが割合概念の理解を難しくさせる要因であると述べている。また，渡辺(2011)は，全体と部分の2量の関係を判断することが難しいことを指摘している。しかし，そうした研究は，行動主義的な理論や実践的な考えから検討したものであり，認知心理学の視点から検討されたものではなかった。

しかし，最近になり，認知心理学の視点から，割合概念について研究されるようになってきている（Jitendra et al., 2009；Jitendra et al., 2011；栗山, 2011, 2013；栗山・吉田, 2014；Lembke & Reys, 1994；Numes & Bryant, 1995；吉田・河野, 1999；吉田・河野・横田, 2000)。例えば，Jitendra et al.（2009, 2011）は，割合の難しさは問題スキーマや認知的な問題構造を獲得できないことにあると述べている。そして，問題スキーマの獲得を目指す指導(Schema Based Instruction；SBI）について検討している。SBIは，問題中の変数の関連性を示すスキーマ図により，問題の構造を意味的に理解させるものである。しかし，彼らの研究は，子どもが割合概念の理解のどこに困難性をもっているか，子どもの視点からは捉えていない。

また，現行の算数・数学のカリキュラムでは，教科がもつ論理構造から捉えた困難性を考えて構成されており，子どもの知識や思考についてはほとんど考慮していない。そこでは，子どもが理解する上で，教科の論理から見て困難であると考えられる内容は次の学年で指導するという構成になっており，子どもの視点から見た困難性については考慮されていない。算数・数学のカリキュラムでは，子どもの思考や子どもの視点から見た割合概念の困難性については，その重要性は指摘されながらも，具体的にはほとんど研究されてこなかった（Lamon, 2007)。

そうした中で，栗山（2007）は子どもの知識や思考から，割合概念の認知的障害について検討している。そして，割合の構成要素の同定の困難性を見出している。彼は，割合の3用法の問題を提示し，構成要素を同定する課題を行った。その結果，基にする量や比べる量を正しく同定できる子どもの割合は，第1用法で45％，第2用法で27％，第3用法で18％と低いことが示された。割合の文章問題では，問題から基にする量，比べる量，割合といった命題を正確に表象することが重要である。しかし，子どもはこうした最初の表象の段階でつまずいているのである。そこでは，子どもの思考と割合の構成要素の用語が合わないことが指摘されている。こうした割合の要素である基にする量，比べる量，割合を正確に同定できないことが，割合問題の解決の認知的障害の1つになっている。

さらに，栗山・吉田（2014）は，割合の認知的障害として，等全体について検討している。等全体とは，割合で比較すべき2つ（または3つ）の全体は，等しいという基本となる概念である。栗山・吉田（2014）は，基準量が異なり，比較する量が同じ時に，割合の量についての比較を6年生におこなった。その結果，等全体が一致していない問題の正答率は28％と極めて低かっ

た。等全体については，現行の学習指導要領(啓林館，2014）では指導目標に入っていない。等全体は，大人にとって見れば当然のことであるが，子どもにとってはかなり難しい概念であるといえる。さらに，有理数の一つである分数においても，子どもにとって等全体の概念の理解はかなり難しいことが明らかになっている（Yoshida ＆ Sawano，2002)。分数における等全体は，全体は1であり，どのような分数であっても分数の大きさは全て等しいことである。そして，彼らは等全体の概念が獲得されていないために，分数の概念的理解が難しいことを明らかにしている。分数概念や割合概念において，等全体の概念を獲得することは，かなり困難であると考えられる。

ところで，こうした認知的障害としての等全体の概念は，割合の学習後にどのように変化するのであろうか。本研究の目的は，割合概念の中の等全体について，小学5年生で割合を学習した後，等全体概念の理解が小学6年生と中学1年生においてどのように変化するかについて検討することにある。そこで，割合を学習して8ヶ月後の小学6年生と1年8ヶ月後の中学1年生を対象として検討する。また，割合の3用法の問題と割合の3用法の構成要素の問題についても，等全体との関連から検討する。

方　法

対象者

愛知県内の公立小学校6年生39名，中学1年生84名が対象者であった。

材料

用いられた問題は，以下のようであった。小学6年生：(1）3用法の問題3問：第1用法，第2用法，第3用法の問題が各用法ごとにそれぞれ1問。(2）グラフを用いた等全体の問題1問。(3）表を用いた等全体の問題1問。中学1年生：(1）小学6年生で用いた3用法の問題と同じ問題。(2）小学6年生と同じグラフを用いた等全体の問題1問。(3）割合の3用法の構成問題2問。

小学6年生の問題

(1）3用法の問題：

第1用法：「200cmの棒があります。この棒の40cm分は，全体の何％ですか。」

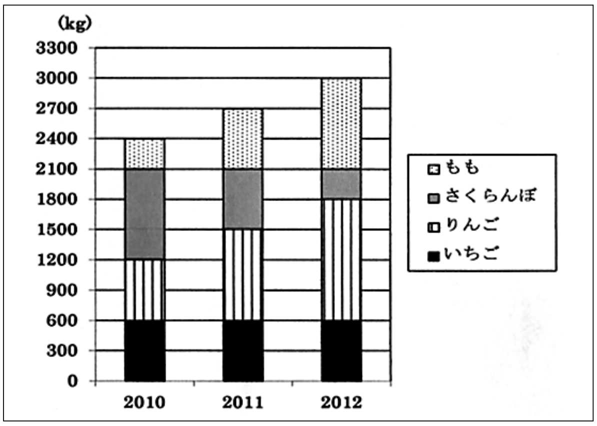
第2用法：「ある会場に小学生が集まりました。集まった小学生100人のうち40％が女子でした。女子の人数は何人でしょうか。」

第3用法「ある量のジュースがあります。このジュースの20％が3リットルのとき，ジュースは何リットルありますか。」

(2）グラフを用いた等全体の問題

下のグラフは，2010年，2011年，2012年のある町の果物の出荷量を果物の種類別にまとめたものです。以下の問いに答えましょう。

2010年から2012年のある町の果物の出荷量



①グラフを見ると，2010年から2012年までの，それぞれの年に出荷したさくらんぼの量の変化について，どのようなことがわかりますか。下の1から3までの中から正しいものを1つ選んで，その番号をかきましょう。

1　さくらんぼの量は，だんだん減っている。
2　さくらんぼの量は，変化していない。
3　さくらんぼの量は，だんだん増えている。

②2010年の全体の量を基にしたいちごの割合と，2012年の全体の量を基にしたいちごの割合を比べると，どのようなことがいえますか。1から3までの中から正しいものを1つ選んで，その記号を書きましょう。また，その番号を選んだわけを，言葉や式を使って書きましょう。

1　いちごの量の割合は，2010年のほうが大きい。
2　いちごの量の割合は，2010年と2012年で同じ。
3　いちごの量の割合は，2012年のほうが大きい。

(3）表を用いた等全体の問題

下の表は，ある学級の男子と女子のそれぞれが，どの領域に住んでいるか調べたものです。男子と女子それぞれで，合計の人数を基にしたＡ地区に住んでいる人数の割合を比べます。男子と女子ではどちらの方の割合が大きいでしょうか。下の1から3までの中から正しいものを1つ選んで，その記号を書きましょう。

1　男子の方がＡ地区に住んでいる人数の割合が大

住んでいる地区調べ

（人）

	Ａ地区	Ｂ地区	合計
男子	9	6	15
女子	12	8	20

きい。

2　女子の方がＡ地区に住んでいる人数の割合が大きい。

3　男子と女子のＡ地区に住んでいる人数の割合は同じ。

中学１年生の問題

(1) 3用法の問題は小学6年生と同じ。

(2) 等全体のグラフ問題は小学6年生と同じ。

(3) 割合の３用法の構成問題2問は中学１年生のみ用いられた。

次の文章の中のア，イ，ウは，「基にする量」「比べる量」「割合」のそれぞれどれでしょう。（　）の中に「基にする量」「比べる量」「割合」のいずれかの言葉を書きましょう。

1　ある商品があります。この商品の値段はア．800円でしたが，値引きがされていて，イ．80％の値段で売られていたのでウ．640円となっていました。

ア．（　　　）イ．（　　　）ウ．（　　　）

2　ア．500ページある本があります。この本のイ．350ページを読んだので，本のウ．70％を読んだことになりました。

ア．（　　　）イ．（　　　）ウ．（　　　）

手続き

問題は一斉テストの形式で，授業時間中に実施された。調査者と学級担任が，用紙を配布して学校のテストではなく，調査問題なので，緊張しないで答えるようにと話した後に解答を求めた。解答時間は15分であった。

結　果

1．3用法の正答率

小学6年生と中学1年生の3用法の3問の平均正答率をFigure 1に示した。小学6年生と中学1年生の平均正答率において有意な差が見られた（$t(121)=2.59$，$p<.05$）。6年生の平均正答率は40％，中学１年生の平均は60％と満足できる状況ではない。Figure 2に，小学6年生と中学1年生の3用法のそれぞれの問題の正答率を示した。小学6年生，中学1年生とも，第2用法の正答率が最も高く，次に第1用法で，第3用法が最も低かった。それぞれの用法ごとに小学6年生と中学1年生の正答者の人数の偏りについてχ^2検定をおこなったところ，第2用法（$\chi^2(1)=8.96$，$p<.01$）と第3用法（$\chi^2(1)=4.81$，$p<.05$）において人数の偏りが有意であった。第1用法では正答者の人数の偏りは有意でなかった。

2．等全体のグラフ問題

①の問題　正答率は小学6年生が84.6％，中学1年生が86.9％であった。小学6年生，中学1年生とも，8割を超える正答率であり，このグラフの読み取りについては十分に理解しているといえる。

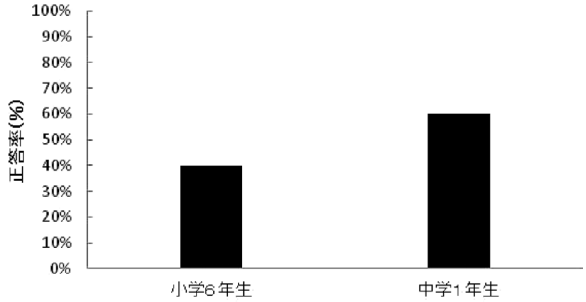


Figure 1　3用法の平均の正答率

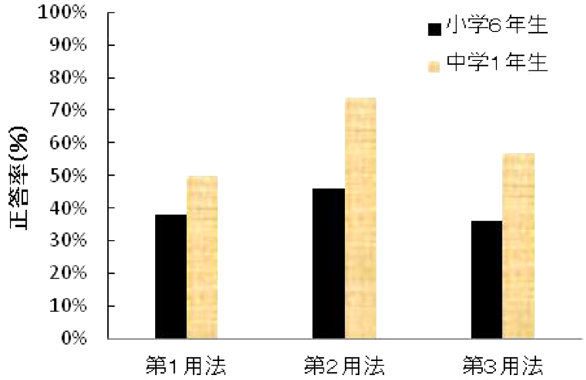


Figure 2　割合の3用法ごとの正答率

②の問題　グラフを用いた等全体について，小学6年生と中学1年生の正答率をFigure 3に示した。小学6年生は17.9％，中学1年生は44.0％であった。小学6年生と中学1年生の正答者の人数の偏りについて検定を行ったところ有意であった（$\chi^2(1)=7.89$，$p<.01$）。小学6年生より中学1年生の正答率は高いが，5割に満たないという低さである。中学1年生でも等全体の概念の獲得に困難性をもっている。

次に，等全体の問題において誤答した子どもは，どのような誤り方略をもっているかについて検討した。誤り方略を分析したところ3つの方略が見られた。部分の量方略と全体の量方略と未記入方略であった。部分の量方略とは，例えば，2010年と2011年と2012年の出荷量は600kgであり同じ，という方略である。全体の量方略は，例えば，2013年の出荷量が最も多い，とい方略である。未記入方略は，何も記入していない方略である。Figure 4に，全問題に占める，それぞれの方略の頻度についての割合を示す利用率について示した。Figure 4から見られるように，小学6年生，中学1年生とも，部分の量方略が最も多い。次に，全体の量方略が多く見られる。割合は2つの量を関係づける概念であるが，誤り方略からみられるように，1つの量から判断していることが示唆される。

さらに，等全体について正答した子どもは，どのような方略で問題を解決したかについて分析した。正答した子どもの方略には，計算方略と推論方略が見られた。計算方略とは，2010年と2012年のいちごの量の

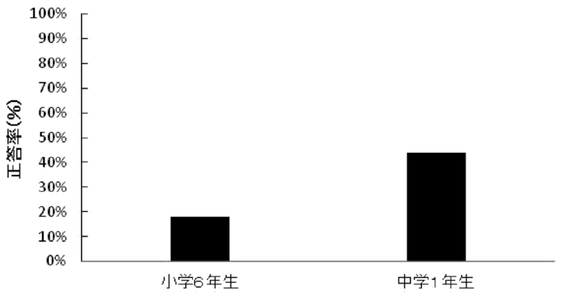


Figure 3 等全体の正答率

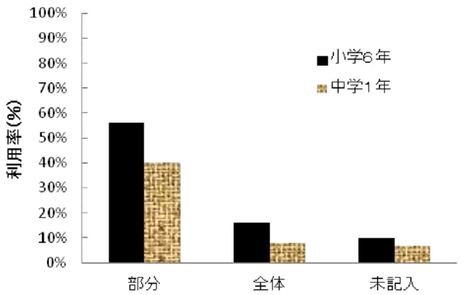


Figure 4 等全体の誤り方略の利用率

割合についてそれぞれ計算して判断した方略である。推論方略は，2010年と2012年では，いちごの量は同じでも，全体の果物の出荷量が異なり，全体の量が小さくなると割合は大きくなると推論した方略である。Figure 5に，正答に占めるそれぞれの方略の頻度についての割合を示す利用率について示した。Figure 5に見られるように，推論方略の利用率が，小学6年生，中学1年生とも多い。等全体を正答する者は，割合の概念的知識を獲得している。

3. 等全体の表問題

小学6年生が解いた等全体の表問題の正答率についても，15.4％と極めて低かった。等全体のグラフ問題の正答率の17.9％とほぼ同じである。等全体における困難性は，グラフ形式だけでなく，表の形式においても同じ結果であることが示された。

次に，誤答の選択肢について検討したところ，最も多く選択されたのは2の選択肢で76.9%であった。これは，女子の人数か合計の人数のどちらかにより判断したと考えられる。部分か全体のどちらかだけで判断している。このことからも，割合の基本的な概念である部分が全体に占める程度の理解が獲得されていないことが示された。

4. 割合の3用法の構成問題

中学1年生の割合の構成問題2問については，それぞれの問題の3つの構成要素について全て正しく答えた場合を正答とみなし，1つでも誤っていた場合は誤答と見なした。正答率は79.8％であった。次に，構成要素の同定の正確さと，等全体の理解に関連があるかについて検討した。等全体で正解の子ども（正答群）と誤答の子ども（誤答群）に分けて，それぞれの群の構

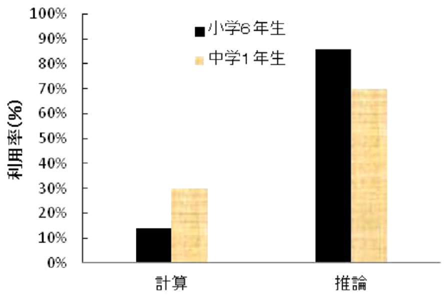


Figure 5 等全体の正答者の方略の利用率

成要素の正答の平均値を求めた。正答群と誤答群の構成要素の正答の平均値は，それぞれ1.73点，1.44点であった。t検定を行ったところ正答群が有意に高かった（t（80）=1.85，p<.05）。等全体と構成要素には強い関連のあることが示された。

考 察

本研究は，割合概念の認知的障害としての等全体の発達について検討することが目的であった。さらに，3用法の問題や等全体の概念と構成要素の関連についても検討した。

本研究における等全体の概念は，基準量が異なり，比較する量が同じとき，割合の量について判断することであった。基準量が不一致のときの等全体の理解は，小学6年生，中学1年生とも困難であることが示された。Figure 3から見られるように，小学6年生の正答率は17.9％，中学1年生は44.0％，と次第に学年があがると高くはなってはいるが，中学1年生でも正答率は5割にも満たない。基準量が一致していない時の割合の量に関する等全体の理解は，中学1年生でも困難であることが示された。

さらに，等全体の解決で見られた誤り方略の分析から，割合の基本的な概念的知識が獲得されていないことが明らかにされた。Figure 4から見られるように，部分の量方略や全体の量方略という，1つの量だけから判断している子どもが多く見られた。部分の量方略と全体の量方略を併せると小学6年生で66.8%，中学1年生でも48.8％見られた。これは，割合概念は2つの量を関係づける概念であるという知識を獲得していないことを示している。それも，子どもは整数系の知識で判断していることが考えられる。吉田･栗山（1991）は，分数概念の習得過程において，整数系の知識を用いて，分数の大小判断をする子どもがいることを見出している。このことから，割合概念においても，整数系の知識から脱却できていない子どもが多くいることが示唆される。さらに，Figure 2における第1用法の正答率から，割合の基本的な概念について，正しく理解している中学1年生は5割にすぎない。こうして，割合の基本となる等全体の概念の意味的理解の獲得は，小

学6年生･中学1年生においても，困難であることが明らかにされた。

また，構成要素の同定の正確さと，等全体の理解に関連があるかについて，中学1年生を対象に検討した。その結果，等全体で正答した子どもは，誤答の子どもより，構成要素の正答の平均値が高かった。これは，等全体と構成要素には関連があることを示唆している。等全体概念の獲得には，構成要素の概念的理解が重要であることを示している。

ところで，本研究では，中学2年生と3年生については検討していないが，等全体の概念が発達とともに次第に獲得されるとは考えにくい。というのは，吉田（2003）は，割合の3用法の正答率について，中学1年生から3年生まで調査を行っている。その結果，どの用法でも正答率は5割程度であり学年差が全く見られなかった。このことからすると，3用法よりも理解が困難な等全体の概念が，発達とともに理解していくとは考えにくい。等全体の獲得の困難性は，中学生2年生や3年生においても続くことが考えられる。

さて，我が国の子どもの学力において課題となっているのは，計算といった技能的知識ではなく，概念の意味的理解であることが指摘されている（国立教育政策研究所，2013)。割合概念においても，同じことがいえる。割合概念における，構成要素の同定や等全体の概念といった概念的知識の理解の困難さが，割合の知識を活用する力の大きな障害となっていると考えられる。それも，こうした認知的障害は割合の学習後の中学生でも続いていると考えられる。

それでは，割合概念の認知的障害である等全体の概念を獲得するには，どのようなことが考えられるのであろうか。等全体の概念を獲得させるには，Yoshida & Sawano（2002）の分数の研究で見られるように，「教科の論理」に基づく指導ではなく，「子どもの論理」に基づく指導へ移行することが大きな効果をもつと考えられる。「教科の論理」に基づく指導とは，算数や数学の巨大な論理体系を，子どもが分かりやすいように短くまとめた内容で構成されたカリキュラムによる指導である。それに対して，「子どもの論理」に基づく指導とは，子どもがインフォーマルに獲得している知識や，新しい概念を学習する際に生じる認知的障害，を考慮してそれを組み込んだ新しいカリキュラム構成を行い，指導することである。栗山（2013）は，割合のインフォーマルな知識と割合の認知的障害である構成要素の同定を組み込んだカリキュラム構成に基づく教授介入により，割合の概念的知識を獲得させることを示唆している。今後の課題としては、等全体の認知的障害を，積極的に組み込んだ新しいカリキュラム構成について検討することが，割合の概念的理解を大きく深化させるかについて検討することが重要である。

付記

本研究は，平成26～28年度科学教育研究費補助金，基盤（C）（課題番号26380879）の補助を受けて行われた。

引用文献

Hart K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. J, Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle graders* (pp. 198–219). Hillsdale, NJ: Lawrence.

石田淳一・神田恵子（2008）．5学年「割合」単元における関係図や線分図をかいたり，よんだりする指導に関する研究，科学教育研究，**32**（**3**)，153-163.

Jitendra, A. K., Star, J., Starosta, K., Leh, J., Sood, S., Caskie, G., Hughes, C., & Mack, T. (2009). Improving students' learning of ratio and proportion problem solving: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology,* **34(3)**. 250–264.

Jitendra, A. K., Star, J. R., & Rodriguez, M., Lindell, M. & Someki, F. (2011). Improving students' proportional thinking using schema-based instruction. *Learning and Instruction,* **21**, 731–745.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning equivalence and the construction of rational number ideas. In W. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Poliak, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress of Mathematics Education* (pp. 506–508). Boston: Birkhauser.

Kieren,T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. A. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T.P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49–84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

国立教育政策研究所（2013)．平成25年度全国学力･学習状況調査の調査問題

栗山和広（2011)．割合の学習以前に子どもがもつインフォーマルな知識，愛知教育大学研究報告，**61**，83-88.

栗山和広（2013)．科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

栗山和広・吉田甫（2007)．割合概念における構成要素の同定，九州保健福祉大学研究紀要，**8**，9-14.

栗山和広・吉田甫（2014)．割合における認知的障害：等全体について，愛知教育大学研究報告，**63**，121-126.

啓林館（2014)．わくわく算数5下　指導書

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lembke, L. O., & Reys, B.J. (1994). The development and interaction between intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education,* **25**, 237–259.

文部科学省（2011)．平成23年度文部科学省白書　第2章　子どもたちの教育の一層の充実

中村亨史（2008)．割合概念の理解における児童の思考の様相：ノート記述の分析をとおして　日本数学教育学会誌，**90**

(**4**), 2-10.

Numes, T., & Bryant, P. (1995). *Children doing mathematics.* Blackwell: London.

Smart, J. R. 1980 The teaching of percent problems. *School Science and Mathematics,* **80**, 187–192.

渡辺敏 (2011). 児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究, 日本数学教育学会誌, **93** (**2**), 11-21.

吉田甫 (2003). 学力低下をどう克服するか 新曜社

吉田甫・河野康男 (1999). 割合における構成要素の同定の困難性と問題解決 宮崎大学教育文化学部紀要 教育科学, **1**, 1-9.

吉田甫・河野康男・横田浩 (2000). 割合概念の解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析, 宮崎大学教育文化学部紀要, **2**, 123-133.

吉田甫・栗山和広 (1991). 数概念の習得過程に関する発達的研究 教育心理学研究, **39**, 382-391.

Yoshida H. & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Reasearch,* **44**, 183–195.

(2014年9月22日受理)