Quark Mixings in $SU(6) \times SU(2)_R$ and Suppression of V_{ub}

松田　正久*(愛知教育大)、松岡　武夫（皇學館大）

概要

The quark mixing matrix V_{CKM} is studied in depth on the basis of superstring inspired $SU(6) \times SU(2)_R$ model with global flavor symmetries. The sizable mixings between right-handed down-type quark D^c and colored Higgs field g^c potentially occur but no such mixings in up-type quark sector. In the model the hierarchical pattern of V_{CKM} is understood systematically. It is shown that due to large D^c-g^c mixings V_{ub} is naturally suppressed compared to V_{td}. It is pointed out that the observed suppression of V_{ub} is in favor of the presence of $SU(2)_R$ gauge symmetry but not in accord with generic $SU(5)$ GUT.

以下の話は、主として Ref.[1] によっている。クォーク・レプトンの質量と混合行列の特徴として (1)V_{CKM} は単位行列ではないが、ほとんど 1 に近い (レプトンセクターの V_{MNS} $\simeq$Bi-maximal), (2) クォークの up-と down-type の間には階層性 $(m_u/m_d(\simeq 0.2-0.8) < m_c/m_s(\simeq 7-18) < m_t/m_b(\simeq 38-45)$ がある。一般に GUT から期待される混合行列の構造は up-と down-type は、大きなゲージ群の同一の規約表現に入ることから，V_{CKM} は厳密に単位行列となることが期待される（実験的には 1 ではない)。一方全然別の規約表現に入るとすれば up-と down の湯川結合が独立となり、、V_{CKM} は大きな非対角要素をもつことが期待される。これは実験事実 $V_{CKM} \sim 1$ と大きく異なっている。実際には単位行列に近い V_{CKM} は非対称性であって,

$$V_{CKM} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^4 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 0.22$$

である。この非対称性は, $V_{MNS,e3} \ll 1, V_{MNS,\tau 1} \sim \mathcal{O}(1)$ のようにレプトンにも共通している性質かもしれない。ここでは特に $V_{CKM,ub}$ が $V_{CKM,td}$ に比べ抑制されている事実 [2] に注目する。すなわち $|V_{td}| \simeq |V_{cd} \cdot V_{ts}| \simeq \lambda^3$　$|V_{ub}| \simeq \lambda\, |V_{cb} \cdot V_{us}| \simeq \lambda^4$ 、 $|\frac{V_{ub}}{V_{cb}}| = 0.08 \pm 0.02 \simeq \lambda^2$ であり，これらの特徴を如何に理解すべきかについて, string inspired model の枠組みの中で $SU(6) \times SU(2)_R$ 模型 [3] で分析した。

この模型では物質場は **27** 次元に属し，ここでは，これを世代数に合わせ 3 組 $(\Phi_{1,2,3})$，また一組の $\mathbf{27}(\Phi_0) - \overline{\mathbf{27}}(\overline{\Phi})$ を考える。**27** 次元の内訳は

$$\Phi(\mathbf{27}) = \begin{cases} \phi(\mathbf{15}, \mathbf{1}) & : \quad Q, L, g, g^c, S, \\ \psi(\overline{\mathbf{6}}, \mathbf{2}) & : \quad (U^c, D^c), (N^c, E^c), (H_u, H_d), \end{cases}$$

であり，R-Parity は $\Phi_{1,2,3}$ に対し $\ominus$，$\Phi_0, \overline{\Phi_0}$ に対し $\oplus$ とする。この模型の特徴は colored Higgs の g, g^c と $SU(2)_L$ doublet Higgs の H_u, H_d が，$SU(6)$ の異なる規約表現に入っていることから triplet-doublet 問題が最初から解決されていることであ

*報告者

る。また，N^c は right-handed neutrino，S は $SO(10)$-singlet である。ゲージ対称性の破れは，

$$G = SU(6) \times SU(2)_R \xrightarrow{\langle S_0 \rangle} SU(4)_{\rm PS} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \xrightarrow{\langle N_0^c \rangle} G_{SM}$$

となる。ここで，$\langle S_0 \rangle = 10^{17\sim18} GeV$,　$\langle N_0^c \rangle = 10^{15\sim17}$GeV を仮定する。こうして、$SU(6) \times SU(2)_R$ 不変な superpotentia を構成し、質量行列を求めることができる。また、質量行列の階層性の源として、Froggatt-Nielsen Mechanism[4] を用い、flavor symmetry として global $U(1)_F$ を M_S のエネルギー領域で仮定する。この対称性のもとで質量行列 $M_{ij}\, Q_i U_j^c H_{u0}$ となる。ここで $M_{ij} = m_{ij}\left(\frac{\langle X \rangle}{M_S}\right)^{b_{ij}} = m_{ij}\, x^{b_{ij}}$ で与えられ、$m_{ij} = \mathcal{O}(1))$ かつ rank(m_{ij})=3$x \equiv \langle X \rangle / M_S < 1$ である。

この模型の特徴として，$< N_0^c >$ より下のスケールで $D^c - g^c$、$L - H_d$ 混合が可能であり [?]，これは U^c にはない。

Up-quark の質量行列は

$$M = \begin{pmatrix} m_{11}x^{\alpha_1+\beta_1} & m_{12}x^{\alpha_1+\beta_2} & m_{13}x^{\alpha_1} \\ m_{21}x^{\alpha_2+\beta_1} & m_{22}x^{\alpha_2+\beta_2} & m_{23}x^{\alpha_2} \\ m_{31}x^{\beta_1} & m_{32}x^{\beta_2} & m_{33} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 = 0, \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 = 0)$$

であり，$M^{diag} = \mathcal{V}_u^{-1} M \mathcal{U}_u$ に従い固有値を求めると

$$m_u \simeq x^{\alpha_1+\beta_1}\left|\frac{\det M_0}{\Delta(M_0)_{11}}\right|, \quad m_c \simeq x^{\alpha_2+\beta_2}\left|\frac{\Delta(M_0)_{11}}{m_{33}}\right|, \quad m_t \simeq |m_{33}|$$

が求まり，ここで $(M_0)_{ij} = m_{ij}$、$\Delta(M_0)_{ij}$ は、M_0 の (ij) 成分の余因子である。また二重項に対する対角化行列は

$$\mathcal{V}_u \simeq \begin{pmatrix} 1 - \mathcal{O}(x^{2(\alpha_1-\alpha_2)}) & -x^{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{\overline{m}_{21}}{\overline{m}_{11}}\right)^* & x^{\alpha_1}\frac{m_{13}}{m_{33}} \\ x^{\alpha_1-\alpha_2}\frac{\overline{m}_{21}}{\overline{m}_{11}} & 1 - \mathcal{O}(x^{2(\alpha_1-\alpha_2)}) & x^{\alpha_2}\frac{m_{23}}{m_{33}} \\ x^{\alpha_1}\frac{\overline{m}_{31}}{\overline{m}_{11}} & -x^{\alpha_2}\left(\frac{m_{23}}{m_{33}}\right)^* & 1 - \mathcal{O}(x^{2\alpha_2}) \end{pmatrix}$$

となる。ここで $\overline{m}_{ij} \equiv (M_0^{\dagger^{-1}})_{ij} = \left(\frac{\Delta(M_0)_{ij}}{\det M_0}\right)^*$ である。$\mathcal{V}_u$ の第一列は $\overrightarrow{M_1}$($\vec{M_i}$ は M の i-th row vector) に比例している。

次に Down-quark の質量行列を議論する。ここで特徴的なのは，$D^c - g^c$ 混合が生じ，これが V_{CKM} に大きな影響を与えることである。これを以下で考察する.

$$\widehat{M}_d = \begin{array}{c} \\ g \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g^c & D^c \end{array} \\ \begin{pmatrix} y_S Z & y_N M \\ 0 & \rho_d M \end{pmatrix} \end{array}.$$

ここで，$Z_{ij} g_i g_j^c \langle S_0 \rangle, M_{ij} g_i D_j^c \langle N_0^c \rangle, M_{ij} Q_i D_j^c \langle H_{d0} \rangle$ である。これを $\widehat{M}_d^{diag} = \widehat{\mathcal{V}}_d^{-1} \widehat{M}_d \widehat{\mathcal{U}}_d$ に従い対角化する。ここで二重項の対角化に関係する $\widehat{\mathcal{V}}_d$ は

$$\widehat{\mathcal{V}}_d \simeq \begin{pmatrix} \mathcal{W}_d & -\epsilon(A+B)^{-1}B\mathcal{V}_d \\ \epsilon B(A+B)^{-1}\mathcal{W}_d & \mathcal{V}_d \end{pmatrix},$$

、ここで $A = y_S^2 ZZ^\dagger, B = y_N^2 MM^\dagger$ である。この対角化の手続きは省略するが，軽いセクターの固有値はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
m_d &\simeq \frac{x^{\alpha_1+\beta_1}}{\sqrt{|\overline{z}_{11}|^2 + |\overline{m}_{11}|^2}}, \\
m_s &\simeq x^{\alpha_2+\beta_1} \frac{\sqrt{|\overline{z}_{11}|^2 + |\overline{m}_{11}|^2}}{\left\| \begin{array}{cc} \overline{m}_{11} & \overline{z}_{11} \\ \overline{m}_{21} & \overline{z}_{21} \end{array} \right\|}, \\
m_b &\simeq x^{\beta_1-\alpha_1+\alpha_2} \frac{|\det M_0 \cdot \det Z_0| \cdot \left\| \begin{array}{cc} \overline{m}_{11} & \overline{z}_{11} \\ \overline{m}_{21} & \overline{z}_{21} \end{array} \right\|}{\sqrt{\| \ \vec{z}_3 \quad \vec{m}_2 \quad \vec{m}_3 \ \|^2 + x^{-2\eta} \| \ \vec{m}_3 \quad \vec{z}_2 \quad \vec{z}_3 \ \|^2}},
\end{aligned}
$$

となり、Down-quark(Q_L) の対角化行列は

$$
\mathcal{V}_d \simeq \begin{pmatrix} 1-\mathcal{O}(x^{2(\alpha_1-\alpha_2)}) & -x^{\alpha_1-\alpha_2} a_{21}^* & x^{\alpha_1} a_{13} \\ x^{\alpha_1-\alpha_2} a_{21} & 1-\mathcal{O}(x^{2(\alpha_1-\alpha_2)}) & x^{\alpha_2} a_{23} \\ x^{\alpha_1} a_{31} & -x^{\alpha_2} a_{23}^* & 1-\mathcal{O}(x^{2\alpha_2}) \end{pmatrix}
$$

となる。ここで $a_{21}, a_{13}, a_{31}, a_{23} = \mathcal{O}(1)$ である。ここで，V_d の第三列は、$\vec{M}_1 \times \vec{Z}_1$ に比例することに注意しよう。

以上の手続きから，V_{CKM} を求まり，

$$
\begin{aligned}
V_{CKM} &= \mathcal{V}_u^{-1} \mathcal{V}_d \\
&\simeq \begin{pmatrix} 1-\mathcal{O}(x^{2(\alpha_1-\alpha_2)}) & -x^{\alpha_1-\alpha_2} c_{21}^* & 0 \\ x^{\alpha_1-\alpha_2} c_{21} & 1-\mathcal{O}(x^{2(\alpha_1-\alpha_2)}) & x^{\alpha_2} c_{32}^* \\ x^{\alpha_1} c_{31} & x^{\alpha_2} c_{32} & 1-\mathcal{O}(x^{2\alpha_2}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで，$c_{21}, c_{32}, c_{31}, c_{32} = \mathcal{O}(1)$ である。ここで $V_{ub} \propto \vec{M}_1 \cdot (\vec{M}_1 \times \vec{Z}_1) = 0$ となることに注意しよう。この混合行列を数値的に見積もると V_{CKM} の観測値とクォークの質量を用いて $V_{us} \simeq x^{\alpha_1-\alpha_2} = \mathcal{O}(\lambda)$　$V_{cb} \simeq x^{\alpha_2} = \mathcal{O}(\lambda^2)$ かつ $x^{\alpha_1} \sim \lambda^3$,　$x^{\alpha_2} \sim \lambda^2$ となる。$m_u \simeq m_d \simeq x^{\alpha_1+\beta_1} = \mathcal{O}(\lambda^7)$ を用いて $x^{\beta_1} \sim \lambda^4$, $m_c \simeq x^{\alpha_2+\beta_2} = \mathcal{O}(\lambda^4)$ より $x^{\beta_2} \sim \lambda^2$ となるので

$$
V_{CKM} \simeq \begin{pmatrix} 1-\mathcal{O}(\lambda^2) & \sim -\lambda & \sim 0 \\ \sim \lambda & 1-\mathcal{O}(\lambda^2) & \sim \lambda^2 \\ \sim \lambda^3 & \sim \lambda^2 & 1-\mathcal{O}(\lambda^4) \end{pmatrix}
$$

となって，$m_s \sim \lambda^6, m_b \sim \lambda^3$ が得られる。また，質量比として

$$
\frac{m_d}{m_u} : \frac{m_s}{m_c} : \frac{m_b}{m_t} = \mathcal{O}(1) : \mathcal{O}(\lambda^2) : \mathcal{O}(\lambda^3)
$$

を得る. 一次の近似では $V_{ub} \simeq 0$ で，次のオーダーから $V_{ub} \simeq x^{\alpha_1+2(\beta_1-\beta_2)} c_{13} \simeq \lambda^5$ となる。しかしこれは実験の λ^4 には少し合わない。M_S のスケールでの D と U に対す

る同じ質量行列 M は繰り込み群の効果が up と $down$ でお互い異なるので、低エネルギーでこの直交性がはずれることが予想される。したがって、Yukawa Coupling に対する補正が leading term に対して 10%程度あれば、低エネルギーでは、$\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_d$ への補正は、こちらが主になることが予想される（現在解析中)。

$S(6) \times SU(2)_R$ 模型で V_{CKM} を解析し、V_{CKM} の構造、とりわけその非対称性 $(V_{td} \gg V_{ub})$ に、$D^c - g^c$ 混合が重要な役割を果たしていることが明らかになった。また、sum rule として、$V_{td} = V_{cd} \cdot V_{ts}$ も得られた。これらの結果は、この模型において (1)$\widehat{M}_d$ の $(D - D^c)$ 部分行列 M は、up-type quark の質量行列 M と同じであり、(2)$\widehat{M}_d$ の $(D - g^c)$ 部分行列は 0 であり、(3)$| < N_0^c > | \gg | < H_{d0} > |$ のもとで、$D^c - g^c$ の大混合が起きる ことが条件である。今後の課題として、(1) 繰り込み群を用いて低エネルギーでの V_{CKM}, とりわけ $V_{ub} \simeq \lambda V_{td}$ の再現性を解析し、(2) 本稿では扱っていない、CP 対称性の破れの解析を行うこと、(3) この模型では同様にしてレプトンセクターの質量と混合行列を得ることができる。この場合 down-sector と同様に $L - H_d$ 混合が起こり、またニュートリノでは、15×15 の質量行列と混合行列を解くことになる。しかし、質量行列が Froggatt-Nielsen 機構により階層性をもつので、これを利用して解くことができると考えている [6]。この場合の V_{MNS} を検討し、現在の実験と比較することによる $S(6) \times SU(2)_R$ 模型の妥当性の検討 [6] などである。

参考文献

[1] M. Matsuda and T. Matsuoka, Phys. Lett. **B87** (2000) 104.

[2] Particle Data Group,C. Caso et. al., Eur.Phys.J. **C3**, (1998) 1-794.

[3] N. Haba, C. Hattori, M. Matsuda and T. Matsuoka, Prog. Theor. Phys. **96**, (1996) 1249.
N. Haba and T. Matsuoka, Prog. Theor. Phys. **99**, (1998) 831.
T. Matsuoka, Prog. Theor. Phys. **100**, (1998) 107.

[4] C. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B147**, (1979) 277.

[5] J.Hisano,H.Murayama,T.Yanagida, P.R. **D49** (1994) 4966.

[6] M. Matsuda and T.Matsuoka, in preparation.