知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌）Vol.21, No.2, pp.222－229（2009）

解説

ファジィ部分集合論の基礎(2)†

佐々木 守寿＊

1．関係とファジィ関係

日常生活においてよく耳にする言葉が，数学用語として特別な意味で使われることがあります．「関係」も，そのひとつです．しかし，これから導入するファジィ関係は，普段の会話に登場する「友人関係」のように，関係の強さを伴う概念を数学的に表現できる道具のひとつです．

●直積と関係

平面の座標において，(3, 5)と(5, 3)は異なる点を表す．このように，集合 X の要素 a と集合 Y の要素 b の順序を考慮し，(a, b)と(b, a)を異なるものとするとき，(a, b)や(b, a)を順序対とよぶ．さらに，n 個の集合$X_1, X_2, \cdots, X_n$から，ひとつずつ要素を選び，順序を考慮して並べたもの

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　←x_i **は** X_i **の要素である**

を n 組(*n-tuple*)とよぶ．すべての n 組からなる集合

$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid$ **任意の** i **に対して** $x_i \in X_i\}$

を$X_1, X_2, \cdots, X_n$**の直積とよび，**

$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

と書く．

n 個の集合$X_1, X_2, \cdots, X_n$が，すべて同じ集合 X である場合，$X \times X \times \cdots \times X$を$X^n$と書くことがある．

〈直積の例〉

$X=\{$**卓球，野球**$\}$

$Y=\{$**ラケット，バット**$\}$

$Z=\{$**屋内，屋外**$\}$

とする．このとき，$X \times Y \times Z$は，次のようになる．

$X \times Y \times Z$

$=\{$**(卓球，ラケット，屋内)，(卓球，ラケット，屋外)**
(卓球，バット，屋内)，(卓球，バット，屋外)
(野球，ラケット，屋内)，(野球，ラケット，屋外)
(野球，バット，屋内)，(野球，バット，屋外)$\}$

直積の部分集合

$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

を，$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$上の n 項関係とよぶ．

〈関係の例〉

次のRは，$X \times Y \times Z$上の 3 項関係である．

$R=\{$**(卓球，ラケット，屋内)，(野球，バット，屋外)**$\}$

●

X，Yを集合とし，Rを$X \times Y$上の関係とします．$(a, q) \in R$であることを，aRqと書くことがあります．この解説では，状況に応じて使い分けることにします．

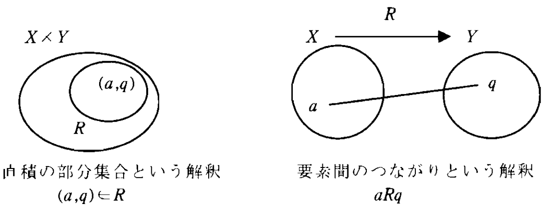


図1　関係の表現

数学的には，関係は直積の部分集合です．ファジィ集合は，部分集合の特性関数の終域を[0, 1]に拡張して得られる概念です．そこで，次の定義を採用しましょう．

［定義1］

$X_1, X_2, \cdots, X_n$：考察対象の世界

R：$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上の概念〔の名前，ラベル〕

とする．

$$\mu_R : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to [0,\ 1]$$

なる写像が定められ，任意の$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$に対して，$\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$が

1に近い→$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ にRという関係がある度合いが大きい

0に近い→$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ にRという関係がある度合いが小さい

と解釈することにする．

このとき，

◆Rを，$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上の n 項ファジィ関係とよぶ

◆μ_Rをファジィ関係 R のメンバシップ関数とよぶ

† Fundamental Theory of Fuzzy Subsets (2)
Moritoshi SASAKI
＊ 愛知教育大学　情報教育講座
Programs in Education for Information Sciences, Aichi University of Education

◆Rを，μ_Rによって特徴づけられるn項ファジィ関係とよぶこともある　■

以下では，2項ファジィ関係を扱い，単にファジィ関係とよぶことにします．

XとYを考察対象の世界とし，Rを$X \times Y$上のファジィ関係とします．$X \times Y$には本来向きはありませんが，図2のように，XからYへの向きを考えると，わかりやすいことがあります．

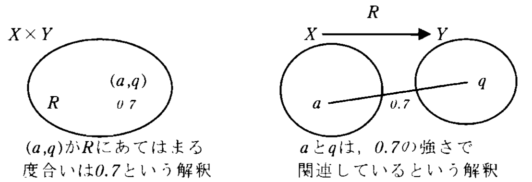


図2　ファジィ関係の表現

図2の右側の表現方法は，直観的に理解しやすいのですが，関連を表す線分の数が増えると，見づらくなることがあります．XとYが有限集合であれば，図3のような，行列的な表現が有効です．

$$X = \{a, b, c\}$$
$$Y = \{q, r, s, t\}$$
$$R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad q \quad & \quad r \quad & \quad s \quad & \quad t \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_R(a,q) & \mu_R(a,r) & \mu_R(a,s) & \mu_R(a,t) \\ \mu_R(b,q) & \mu_R(b,r) & \mu_R(b,s) & \mu_R(b,t) \\ \mu_R(c,q) & \mu_R(c,r) & \mu_R(c,s) & \mu_R(c,t) \end{bmatrix} \end{array}$$

図3　ファジィ関係の行列的な表現

2．関係とファジィ関係の合成

「家光君が秀忠君の子供である」ことと，「秀忠君と信康君が兄弟である」ことを知ったとき，私たちは，「家光君は信康君の甥である」という関係を見出します．これは，図4において，関係RとSを合成して，$X \times Z$上の関係$R\ S$を求めていることになります．

aRt　⇔　aは，tの子供である
tSw　⇔　tとwは，兄弟である
$aR\ Sw$ ⇔　aは，wの甥である

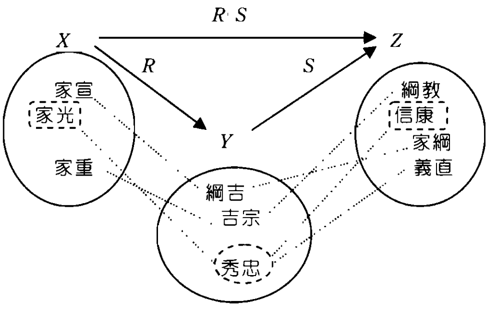


図4　徳川家の人間関係の例

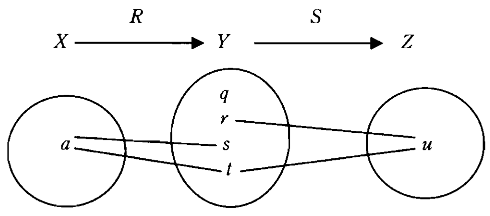
関係の合成を，図5のもう少し単純な例で見てみましょう．Xの要素aと，Zの要素uを固定してながめてみましょう．関係の合成においては，

$$aRy \quad \text{かつ} \quad ySu \tag{1}$$

が成立するYの要素yが存在すれば，

$$aR\ Su \tag{2}$$

であると約束します．



$(a,u) \in R\ S$

図5　関係の合成（その1）

このことを，関係の特性関数を用いて表現すると，次のようになります．

$\chi_R(a, y)=1$かつ$\chi_S(y, u)=1$となるyが存在する
$\Rightarrow \chi_{R\ S}(a, u)=1$　(3)

ファジィ関係の合成を導入するために，図6のように，特性関数の値が0であることも明示して考えましょう．関係の合成を，次の2段階の操作を行うことであると解釈します．

1．Yの要素yに対して，aからyへの道とyからuへの道をつなぐ．つないだ道に，次のようにして値をつける．
　　1　$\chi_R(a, y)=1$かつ$\chi_S(y, u)=1$のとき
　　0　それ以外
2．つないだ道につけた値の集合から，
　　$\chi_{R\ S}(a, u)$
　の値を決める．

●**2項演算とは**
　X：集合
とする．写像
　$◎ : X \times X \to X$
をX上の2項演算よぶ．
　任意の$(a, b) \in X \times X$に対して，$◎(a, b)$を$a◎b$と書くことが多い．　●

$\{0, 1\}$上の2項演算◎で，

$$0◎0 = 0,\ 0◎1 = 0,\ 1◎0 = 0,\ 1◎1 = 1 \tag{4}$$

を満たすものを使えば，つないだ道につける値は，

$\chi_R(a,y) \circledcirc \chi_S(y,u)$

と表すことができます．

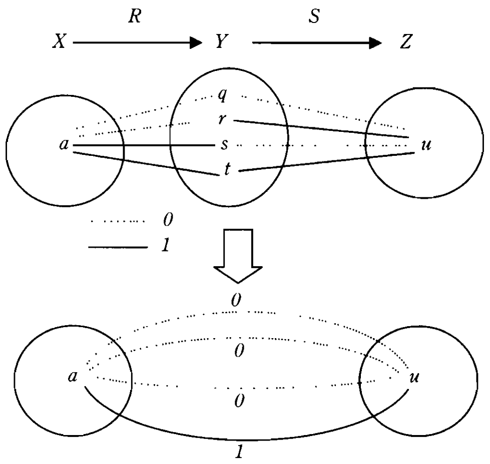


図6　関係の合成（その2）

最後に，4本の道についた値，0，0，0，1から，$\chi_{R\,S}(a, u)$の値を1としています．0が複数個ありますが，値の集合としては{0, 1}となります．集合{0, 1}から，1を決める操作が必要になります．

さて，上述の関係の合成における{0, 1}を[0, 1]に置き換えて，ファジィ関係の合成を定義しましょう．{0, 1}上の2項演算◎を[0, 1]上に拡張したものとして，*triangular norm*（以下では，T-ノルム と書く）が知られています．

●T-ノルムとは

2項演算

$\circledcirc : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$

で，次を満たすものをT-ノルムとよぶ．

(T1) $0 \circledcirc r = 0$

(T2) $1 \circledcirc r = r$

(T3) $r \circledcirc s = s \circledcirc r$

(T4) $r \leqq t$ かつ $s \leqq u \Rightarrow r \circledcirc s \leqq t \circledcirc u$

(T5) $(r \circledcirc s) \circledcirc t = r \circledcirc (s \circledcirc t)$

ただし，$r, s, t, u \in [0, 1]$は，任意とする． ●

図7を見ながら，合成の手順を考えていくことにしましょう．ファジィ関係の場合，

a から y_i への道

y_i から u への道

a から y_i への道と y_i から u への道をつないだ道につく値は，0 以上 1 以下の実数になります．合成を，次の2段階の操作を行うことであると解釈しましょう．

1．Yの要素y_iに対して，aからy_iへの道とy_iからuへの道をつなぐ．つないだ道に，次の値をつける．

$$\mu_R(a, y_i) \circledcirc \mu_S(y_i, u) \tag{4}$$

ただし，◎はT-ノルムとする．

2．つないだ道につけた値の集合から，

$\mu_{R\,S}(a,u)$

の値を決める．

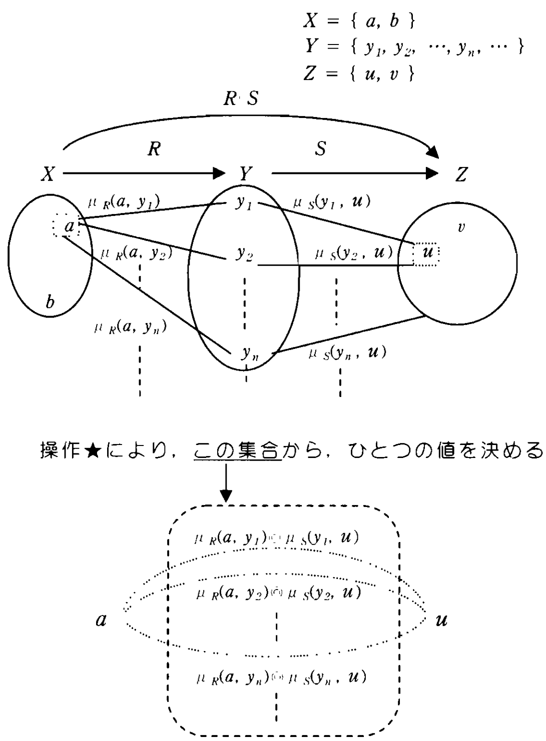


図7　ファジィ関係の合成

上記2の操作においては，無限本の道についた値

$\mu_R(a, y_1) \circledcirc \mu_S(y_1, u)$

$\mu_R(a, y_2) \circledcirc \mu_S(y_2, u)$

⋮

$\mu_R(a, y_n) \circledcirc \mu_S(y_n, u)$

⋮

から，ひとつの値を決める必要があります．

$\{\mu_R(a, y_i) \circledcirc \mu_S(y_i, u) \mid i \text{ は自然数}\}$

は，[0, 1]の部分集合であり，一般に，要素数は無限個あるからです．

そこで，[0, 1]の部分集合から，ひとつの[0, 1]の

要素を定める操作を★で表すことにしましょう．通常の関係の合成を含むためには，

$$★\{0,1\} = 1 \tag{5}$$

になる必要があります．★として，「上限を求めること」を採用しましょう．

以上より，ファジィ関係の合成を次のように定義します．

［定義 2］

X, Y, Z：考察対象の世界

R：$X \times Y$上のファジィ関係

S：$Y \times Z$上のファジィ関係

◎：T-ノルム

とする．

任意の$(x, z) \in X \times Z$に対して，

$$\mu_{R \cdot S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \{ \mu_R(x,y) ◎ \mu_S(y,z) \} \tag{6}$$

なるメンバシップ関数によって特徴づけられる，$X \times Z$ 上のファジィ関係 $R \cdot S$ を，R とS の sup-◎合成とよぶ．■

応用する問題の性質や，合成の解釈によって

★：$[0, 1]$の部分集合から，ひとつの$[0, 1]$の要素を定める操作

◎：T-ノルム

を適切に選び，★-◎合成を定義することができます．

$r, s \in [0, 1]$に対する r◎s の候補として，以下の，積ファジィ集合の定義に用いた演算があります．これらは，いずれもT-ノルムです．

$(p1)$ $r \wedge s$

$(p2)$ $(r + s - 1) \vee 0$　〔限界積〕

$(p3)$ rs　〔代数積〕

$$(p4) \begin{cases} r & if\ s = 1 \\ s & if\ r = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$　〔激烈積〕

《ここで，任意の実数r, sに対して，$r \vee s$ は，rとsの大きい方 $r \wedge s$ は，rとsの小さい方を表します．》

上の 4 種類の演算結果の大小関係は，

$$(p4) \leqq (p2) \leqq (p3) \leqq (p1) \tag{7}$$

となります．たとえば，$(p2) \leqq (p3)$となることは，$r, s \in [0,1]$と，次の式からわかります．

$$\begin{aligned}(r + s - 1) - rs &= -(rs - r - s + 1) \\ &= -(r-1)(s-1) \\ &\leqq 0\end{aligned} \tag{8}$$

「より派手である」のようなファジィ関係を考えてみましょう．

a より b が派手　かつ　b より c が派手

であるとき，a より c がかなり派手である，というように，派手である度合いは強まります．しかし，「似ている」については，どうでしょうか．

a と b が似ている　かつ　b と c が似ている

場合でも，a と c がそれほど似ていないこともありますね．

ファジィ関係の合成の式(［定義 2］)

$$\mu_{R \cdot S}(x,z) = \sup_{y \in Y} \{ \mu_R(x,y) ◎ \mu_S(y,z) \} \tag{9}$$

より，

$$\mu_{R \cdot S}(x,z) \geqq \mu_R(x,y) ◎ \mu_S(y,z) \tag{10}$$

となることに注意して，T-ノルムを選ぶとよいでしょう．

3．種々のファジィ関係

ここでは，$X \times X$ 上の特殊なファジィ関係を見ていくことにします．

●いろいろな関係の定義

X：集合

R：$X \times X$上の関係

とする．以下，$a, b, c \in X$は，任意とする．

◆　aRb かつ $bRc \Rightarrow aRc$

が成立するとき，R を推移的〔*transitive*〕であるという．

◆　$aRb \Rightarrow bRa$

が成立するとき，R を対称的〔*symmetric*〕であるという．

◆　aRa

が成立するとき，R を反射的〔*reflexive*〕であるという．

◆　aRb かつ $bRa \Rightarrow a=b$

が成立するとき，R を反対称的〔*antisymmetric*〕であるという．

◆推移的，対称的，反射的である関係を，同値関係とよぶ．

◆推移的，反対称的，反射的である関係を，半順序関係とよぶ．さらに，どのような $a, b \in X$ に対しても

aRb または bRa

が成立するとき，R を，全順序関係とよぶ．●

通常の $X \times X$ 上の関係 R を特別なファジィ関係であると解釈すると，そのメンバシップ関数 μ_Rは，任

意の$(a, b) \in X \times X$に対して，

$$\mu_R(a,b) = \begin{cases} 1 & aRb \text{ であるとき} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{11}$$

となります．

メンバシップ関数を用いて，Rが推移的であることを記述すると，任意の$a, b, c \in X$に対して，

$$\begin{aligned} &\mu_R(a,b) = 1 \quad \text{かつ} \quad \mu_R(b,c) = 1 \\ &\Rightarrow \ \mu_R(a,c) = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

となります．これは，

$$1 \blacktriangle 1 = 1 \tag{13}$$

をみたす$[0, 1]$上の２項演算▲を用いて

$$\mu_R(a,c) \geqq \mu_R(a,b) \blacktriangle \mu_R(b,c) \tag{14}$$

と表現できます．(13)式の条件は，とてもゆるく，▲の候補がたくさんあります．

そのような状況を確認したうえで，よく用いられる次の定義を採用します．

[定義３]

X：考察対象の世界

R：$X \times X$上のファジィ関係

とする．任意の$a, b, c \in X$に対して

$$\mu_R(a,c) \geqq \mu_R(a,b) \wedge \mu_R(b,c) \tag{15}$$

が成立するとき，Rを推移的〔*transitive*〕であるという．■

R を$X \times X$上の推移的なファジィ関係とします．$a, c \in X$を任意に選んで，その後固定して考えましょう（選ぶときは任意だが，そのあとは動かさない，という意味です）．このとき，どのような$b \in X$に対しても（このbは，X上をくまなく動き回るということになります），

$$\mu_R(a,c) \geqq \mu_R(a,b) \wedge \mu_R(b,c) \tag{16}$$

が成立します．ここで，上限(*supremum*)の定義を思い出せば，

$$\mu_R(a,c) \geqq \sup_{b \in X} [\mu_R(a,b) \wedge \mu_R(b,c)] \tag{17}$$

となることがわかります．さらに，右辺は，ファジィ関係の*sup*-∧合成の式ですから，

$$\mu_R(a,c) \geqq \mu_{R \circ R}(a,c) \tag{18}$$

と表せます．

このことを用いて，推移的ファジィ関係を次のように定義することもあります．

[定義４]

X：考察対象の世界

R：$X \times X$上のファジィ関係

とする．

$$R \supseteq R \circ R \qquad (\circ \text{は} sup\text{-}\wedge \text{合成}) \tag{19}$$

を満たすとき，Rを推移的〔*transitive*〕であるという．■

sup-∧合成を使った定義なので，*sup*-∧推移的とよばれることもあります．

この[定義４]は，有限個の要素からなるX上のファジィ関係Rが推移的であるかどうかを判定する場合に，大変便利です．

そこで，まず，行列的に表現されたファジィ関係の合成方法を，図８を見ながら確認しましょう．図８における$\mu_{R \circ S}(x_3, z_2)$は，$R$の$x_3$の行と，$S$の$z_2$の列から，

$$\mu_R(x_3, y_1) \wedge \mu_S(y_1, z_2) \tag{20}$$

$$\mu_R(x_3, y_2) \wedge \mu_S(y_2, z_2) \tag{21}$$

$$\mu_R(x_3, y_3) \wedge \mu_S(y_3, z_2) \tag{22}$$

を計算し，それらの最大値として求めることができます．通常の行列の積の計算において，積を∧で，和を*max*（有限個の要素の上限は，最大値であるから）で置き換えた形になっています．

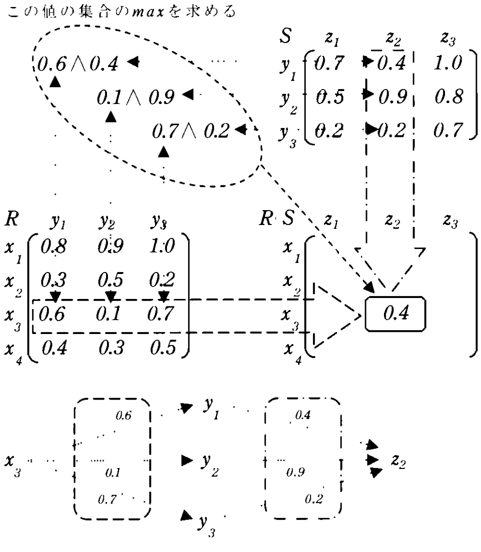


図８　行列的に表現されたファジィ関係の合成

$X=\{a,b,c\}$：考察対象の世界

とします．次の $X\times X$ 上のファジィ関係が推移的かどうかを判定してみましょう．

$$R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 1.0 \\ 0.5 & 0.9 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

それぞれのファジィ関係に対して

$$R\circ R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S\circ S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.7 \\ 0.5 & 0.9 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

となります．よって，$R\not\supseteq R\circ R$ なので R は推移的ではなく，$S\supseteq S\circ S$ なので S は推移的です．

次の定義は，自然な拡張と思えますので，通常の関係の特性関数を用いた考察なしに挙げておきます．

［定義５］

X：考察対象の世界

R：$X\times X$上のファジィ関係

とする．$a,b\in X$ は，任意とする．

$$\mu_R(a,b) = \mu_R(b,a) \tag{23}$$

が成立するとき，Rを対称的〔*symmetric*〕であるという．

$$\mu_R(a,a) = 1 \tag{24}$$

が成立するとき，Rを反射的〔*reflexive*〕であるという．

$$\mu_R(a,b) > 0 \quad かつ \quad \mu_R(b,a) > 0 \;\Rightarrow\; a = b \tag{25}$$

が成立するとき，Rを対称的〔*symmetric*〕であるという．■

次の２つの定義は，通常の同値関係と半順序関係に対応するものです．

［定義６］

ファジィ関係Rが，推移的，対称的，反射的であるとき，Rを，類似関係(*similarity relation*)とよぶ．■

［定義７］

ファジィ関係Rが，推移的，反対称的，反射的であるとき，Rを，ファジィ半順序関係(*fuzzy partial order relation*)とよぶ．■

さて，ここで特別なファジィ関係と通常の関係の関連を見ていくために，次の定義を導入しておきましょう．

［定義８］

X：考察対象の世界

A：X上のファジィ集合

とする．任意の $\alpha\in[0,1]$に対して，

$$\{\, x \mid \mu_A(x) > \alpha \,\} \tag{26}$$

を，Aのα-カット(強α-カット，*strong* α-*cut*) とよび，A_αとかく．■

［命題１］

X, Y：考察対象の世界

R：$X\times Y$ 上のファジィ関係

A：X上のファジィ集合

f：$X\to Y$：写像

とする．このとき，任意の $\alpha\in[0,1]$に対して，

$$f(A_\alpha) = f(A)_\alpha \tag{27}$$

が成立する．

〔証明〕

$$u \in f(A_\alpha) \;\Leftrightarrow\; u \in f(A)_\alpha \tag{28}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
& u \in f(A_\alpha) \\
\Leftrightarrow\;& u \in \{\, f(t) \mid t\in A_\alpha \,\} && \text{【fによる，Xの部分集合の像の定義】} \\
\Leftrightarrow\;& u \in \{\, f(t) \mid t\in \{\, x \mid \mu_A(x) > \alpha \,\}\} && \text{【α-カットの定義】} \\
\Leftrightarrow\;& \exists s(\, u = f(s) \text{ かつ } s\in \{\, x \mid \mu_A(x) > \alpha \,\}) \\
& \text{【$\exists s$(条件)は，「条件を満たす要素sが存在する」という意味である】} \\
\Leftrightarrow\;& \exists s(\, u = f(s) \text{ かつ } \mu_A(s) > \alpha \,) \\
\Leftrightarrow\;& \exists s(\, s\in f^{-1}(u) \text{ かつ } \mu_A(s) > \alpha \,) \\
\Leftrightarrow\;& \sup_{w\in f^{-1}(u)} \mu_A(w) > \alpha \\
\Leftrightarrow\;& u \in \{\, y \mid y\in Y \text{ かつ } \sup_{w\in f^{-1}(y)} \mu_A(w) > \alpha \,\} \\
\Leftrightarrow\;& u \in \{\, y \mid \mu_{f(A)}(y) > \alpha \,\} && \text{【fによる，X上のファジィ集合の像の定義】} \\
\Leftrightarrow\;& u \in f(A)_\alpha && \text{【α-カットの定義】}
\end{aligned} \tag{29}$$

よって，

$$u \in f(A_{\alpha}) \Leftrightarrow u \in f(A)_{\alpha} \tag{30}$$

が示された． 〔証明終〕■

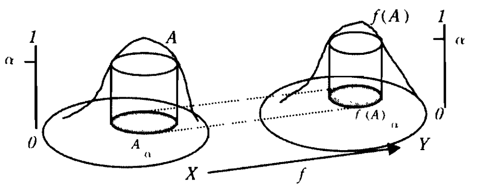


図9 $f(A_\alpha)=f(A)_\alpha$のイメージ

上記[命題１]において，使われている記号が表しているものは，図９にあるように，

A：X上のファジィ集合
$f(A)$：Y上のファジィ集合
A_α：Xの部分集合
$f(A)_\alpha$：Yの部分集合

です．集合X, Yを平面上の円盤，ファジィ集合を円盤上の山（高さがメンバシップ関数の値）にたとえると，α-カットは，山を高さαで水平に切った切り口を，下の円盤上に投影した影です．[命題１]は，A山の切り口の影をfで移すと，$f(A)$山の切り口の影と一致することを主張するものです．

α-カットは，ファジィ集合の世界と通常の集合の世界を結ぶ架け橋と言ってよいでしょう．

Aの α-カットを，任意の $\alpha \in [0, 1]$に対して，

$$\{ x \mid \mu_A(x) \geqq \alpha \} \tag{31}$$

とする定義（弱α-カット，*weak α-cut*）もあります．しかし，弱α-カットにおいては，上記の性質が成立しない場合があることに注意しましょう．

ファジィ関係も，ファジィ集合のひとつですから，同じようにα-カットを考えることができます．

[命題２]

X：考察対象の世界
R：$X \times X$上の類似関係

とする．このとき，任意の$\alpha \in [0, 1)$に対して，R_αは同値関係になる．ただし，

$[0, 1) = \{ r \mid r$は実数　かつ　$0 \leq r < 1\}$

である．

〔証明〕

$\alpha \in [0, 1)$を任意として，R_αを考える．R_αが，推移的，対称的，反射的であることを示せばよい．

(a, b)，$(b, c) \in R_\alpha$とすると，

$$\mu_R(a,b) > \alpha \quad かつ \quad \mu_R(b,c) > \alpha \tag{32}$$

である．Rは推移的であるから，

$$\mu_R(a,c) \geqq \mu_R(a,b) \wedge \mu_R(b,c) \tag{33}$$

が成立する．(32)，(33)より，

$$\mu_R(a,c) \geqq \mu_R(a,b) \wedge \mu_R(b,c) > \alpha \wedge \alpha = \alpha \tag{34}$$

となるので，$(a, c) \in R_\alpha$である．よって，R_αは推移的である．

$(a, b) \in R_\alpha$とすると，$\mu_R(a, b) > \alpha$である．Rが対称的であることより，

$$\mu_R(b,a) = \mu_R(a,b) > \alpha \tag{35}$$

となるので，$(b, a) \in R_\alpha$である．よって，R_αは対称的である．

Rは反射的であるから，任意のaに対して，

$$\mu_R(a,a) = 1 \tag{36}$$

である．$\alpha < 1$より，$(a, a) \in R_\alpha$となり，R_αは反射的である．

従って，R_αは，同値関係である． 〔証明終〕■

半順序関係についても，同様の命題が成り立ちます．

[命題３]

X：考察対象の世界
R：$X \times X$上のファジィ半順序関係

とする．このとき，任意の$\alpha \in [0, 1)$に対して，R_αは半順序関係になる

〔証明〕

$\alpha \in [0, 1)$を任意として，R_αを考える．R_αが，推移的，反対称的，反射的であることを示せばよい．

推移的，反射的であることは，[命題２]の証明と同じなので省略する

(a, b)，$(b, a) \in R_\alpha$とすると，

$$\mu_R(a,b) > \alpha \quad かつ \quad \mu_R(b,a) > \alpha \tag{37}$$

である．Rが反対称的であることと(37)より，

$$a = b \tag{38}$$

となる．よって，R_αは反対称的である．

従って，R_αは，半順序関係である．

〔証明終〕■

4．ファジィ関係によるファジィ集合の像

$f: X \to Y$を写像とします．ここで，次のような集合を考えてみましょう．

$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

これは，$X \times Y$の部分集合ですから，$X \times Y$上の関係です．このようにして，写像を特別な関係であると見てみましょう．

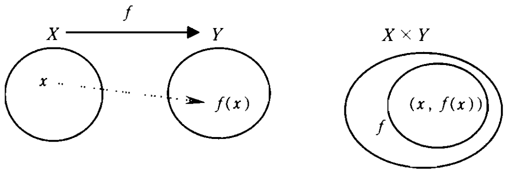


図10　写像を関係としてとらえる

さらに，関係は，特別なファジィ関係と解釈できます．そこで，fを，次のメンバシップ関数によって特徴づけられる，$X \times Y$上のファジィ関係ととらえましょう．

$$\mu_f(x,y) = \begin{cases} 1 & f(x) = y \text{ のとき} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{39}$$

これを用いると，X上のファジィ集合Aのfによる像$f(A)$のメンバシップ関数は，次のように表すことができます．

$$\begin{aligned} \mu_{f(A)}(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad \text{【写像によるファジィ集合の像の定義】} \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ \mu_f(x,y)=1}} \mu_A(x) \quad \text{【(37) より】} \\ &= \sup_{x \in X} [\mu_A(x) \wedge \mu_f(x,y)] \\ &\text{【} \mu_A(x) \text{は0以上1以下の実数，} \mu_f(x,y) \text{は0または1だから】} \end{aligned} \tag{40}$$

この考え方を，一般のファジィ関係の場合まで広げて，つまり，(40)の最後の式のμ_fをμ_Rに置き換えて，次の定義を得ます．

［定義８］

X, Y：考察対象の世界

R：$X \times Y$上のファジィ関係

A：X上のファジィ集合

とする．

任意の$y \in Y$に対して，

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} [\mu_A(x) \wedge \mu_R(x,y)] \tag{41}$$

なるメンバシップ関数で特徴づけられるY上のファジィ集合Bを，RによるAの像とよぶ．このBを，

$A \circ R$

とかく．■

上の定義で，$A \circ R$という記法を採用しているのは，(41)式の形が，ファジィの合成を表す

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y} [\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z)] \tag{42}$$

と似ているからです．

参考文献

[1] 青木利夫，高橋渉，集合・位相空間要論，培風館，1979
[2] *Didier Dubois, Henri Prade, Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications, Academic Press New York 1980*
[3] 水本雅晴，ファジィ理論とその応用，サイエンス社，1988
[4] 守屋悦朗，コンピュータサイエンスのための離散数学，サイエンス社，1992
[5] *Negoita, C.V. and Ralescu, D.A. Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis (Birkhauser-Verlag, Basel, 1975)*
[6] 赤攝也，集合論入門，培風館，1959
[7] 寺野寿郎，浅居喜代治，菅野道夫，ファジィシステム入門，オーム社，1987
[8] 寺野寿郎，浅居喜代治，菅野道夫，応用ファジィシステム入門，オーム社，1989

（2009年２月21日　受付）

[問い合わせ先]
〒448-0001　刈谷市井ケ谷町広沢１
愛知教育大学　情報教育講座
佐々木　守寿
TEL：0566-26-2617
FAX：0566-26-2617
E-mail：msasaki@auecc.aichi-edu.ac.jp