知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌）Vol.21, No.1, pp.107－115（2009）

解説

ファジィ部分集合論の基礎(1)†

佐々木 守寿＊

1．ファジィ集合

「帯に短し，たすきに長し」，という言葉があります．ご存じのように，何に使うにしても中途半端で，役に立たないことのたとえです．しかし，この表現は，ファジィ集合を理解するために，とても役に立ちます．

ある布が，伸び縮みするわけではありませんが，

帯の集まりの中では，短い

たすきの集まりの中では，長い

と，異なる評価を得ています．これは，「短い」，「長い」という言葉で表現される概念が，どのような集まりの中で話をしているのかによって，異なることを意味します．

また，同じ布でも，A君は「帯としては短い」と感じ，B君は「帯としてちょうどよい」と思うことがあるかもしれません．帯の集まりという世界を定めても，「短い」という言葉で表現される概念は，主観的なものです．

ある布が「帯としては短い布の集まり」にはいるかどうか，判定に苦しむことがあります．これは，「帯としては短い布の集まり」が，数学的な「集合」ではないことを意味しています．

※この解説では，数学的な定義を，必要と思われる場所に，少し丸くて小さいフォントで書くことを試みてみました．定義をご存じの方は，そこを読みとばしていただければ幸いです．

●集合とは

ものの集まりであり，次の２つの条件を満たすものを，集合とよぶ．

(set1)集まりの範囲が明確である

(set2)集まりに属するものの異同を区別できる

集合に属するひとつひとつのものを，要素とよぶ．

要素 x が，集合 X に属することを $x \in X$ と記述する．

集合を記述する方法は，次の２通りある．

◆要素を｛ ｝内に書き並べる

$\{1,\ 2,\ 3\}$

◆｛要素｜真偽を判定できる，要素を含む叙述｝

$\{x \mid x$ は，1以上3以下の整数$\}$

a 以上 b 以下の実数の集合を，$[a,\ b]$ と記述し，実数の閉区間とよぶ．

すべての整数からなる集まりを考えてみる．0.5や今読んでいる学会誌は，その集まりに属さない，と判定できる．また，-5 や 123は，その集まりに属す，と判定できる．これが，(set1)で述べていることである．

また，-5 と 123は異なるものである，と区別することができる．これが，(set2)で述べていることである．

以上より，すべての整数からなる集まりは，集合である．

ここに挙げた定義は，素朴集合論における集合の定義である．この定義に基づいて，レベルの異なるものも混在する巨大なものの集まりを考えていくと，矛盾を生じることが知られている．(Russellの逆理など)それをさけるため，いくつかの公理を採用した，公理的集合論が提案されている．●

以下では，考える対象の集まりを，おかしなことのおこらない集合 X としましょう．この X を，ファジィ集合論の英語の文献では，

universe of discourse

field of reference

などとよんでいます．よい日本語訳が見あたらないので，「考察対象の世界」とよぶことにします．

さて，A君が思い描く「帯としては短い布の集まり」というものを，数学的に表現する方法を考えましょう．まず，考察対象の世界 X を決めます．次に，X の要素である布 x が「帯としては短い布の集まり」にあてはまる，とA君が思う度合いを，次のようなものさし上で答えてもらいます．

全くそう思わない　　　　　　　完全にそう思う

↓　　　　　　　　▽　　　　↓

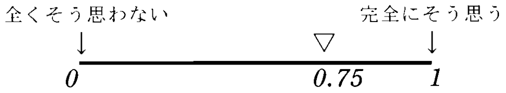
これを，数学の世界に持ち込むために，線分を実数

---

† Fundamental Theory of Fuzzy Subsets (1)
Moritoshi SASAKI

＊ 愛知教育大学 情報教育講座
Programs in Education for Information Sciences, Aichi University of Education

の閉区間［0, 1］とします．



布 x が帯としては短い布であると思う度合いに，実数0.75が対応することを

$$\mu_{\text{帯としては短い布}}(x) = 0.75 \qquad (1)$$

と書きましょう．この方法を数学的に記述すると，［定義1］のようになります．

●写像とは

X，Y：集合

とする．任意の $x \in X$ に，ひとつの要素 $y \in Y$ を対応させる規則 f を，X から Y への写像とよび，

$f: X \to Y$

$f: X \to Y: x \mapsto y$

などと書く．X を f の始域（定義域），Y を終域（値域）とよぶ．y を f による x の像とよび，$f(x)$ と書く．

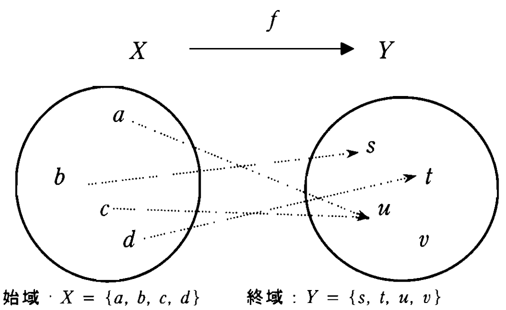


図1　写像

上記の写像 f に対して，値域という用語は，Y を意味することもある．しかし，$\{s, t, u\}$ を値域とよぶことも多い．ここで，$\{s, t, u\}$ は，ある X の要素と f によって対応づけられている Y の要素を集めたものである． ●

［定義1］

X：考察対象の世界

A：X上の概念〔の名前，ラベル〕

とする．

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

なる写像が定められ，$\mu_A(x)$ が

1に近い→ x がAに当てはまる度合いが大きい

0に近い→ x がAに当てはまる度合いが小さい

と解釈することにする．このとき，

◆AをX上のファジィ集合とよぶ

◆μ_AをAのメンバシップ関数とよぶ

◆Aを，μ_Aによって特徴づけられるファジィ集合とよぶこともある ■

2．特性関数とメンバシップ関数

人間は，言語を使って，意思を伝達したり何かを考察したりしています．言語の中の，形容詞や形容動詞は，使用する人の主観を含むあいまいさをもっています．たとえば，

「優しい」，「面白い」，「きれいな」

といった言葉を用いて表現された概念は，なんとなく理解できるけれど，きちんと説明をすることは難しいでしょう．ファジィ集合は，そのようなあいまいさをもつ概念を，数学的に表現したものです．

一方，ファジィ理論では扱わないあいまいさもあります．たとえば，「この花は，明日，咲くかもしれない」といった，時間がたてば消滅するあいまいさや，「彼の誕生日は，1月だったかな」といった，知識（情報）が不足しているために生じるあいまいさなどです．

集合 X を考えます．部分集合 $A \subseteq X$ に対して，次のような関数

$$\chi_A : X \to \{0, 1\}$$

を Aの特性関数（*characteristic function of A*）とよびます．

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \text{ ではないとき} \\ 1 & x \in A \text{ のとき} \end{cases} \qquad (2)$$

つまり，$\chi_A(x)$の値は，x が A に属していないときに0，x が A に属しているときに1になります．

集合X上のファジィ集合は，Xの部分集合を一般化したものと考えることができます．Aの特性関数 $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ の終域を［0, 1］に置き換えることにより，ファジィ集合のメンバシップ関数を得ることができます．その意味で，ファジィ部分集合とよんでもいいと思います．実際，fuzzy subset という用語を採用している文献もあります．

ファジィ集合は部分集合を一般化したものであるという考えは，とても重要です．裏を返せば，**部分集合はファジィ集合の特別なもの**である，ということになります．メンバシップ関数の値が0か1だけであるファジィ集合は，部分集合とみなせるのです．これから，ファジィ集合に関わる種々の定義を導入していきます．それらは，既存の部分集合がもつ性質と整合性のあるものである必要があります．

集合論においては，部分集合の性質や演算を，特性関数を用いて記述することは，ほとんどありません．しかし，ファジィ集合に関わる性質や演算は，メンバシップ関数を用いて記述する方法が主になります．そこで，これからは，次のように話を進めていくことにします．

1．部分集合の性質や演算を，特性関数を用いて記述する
2．特性関数の終域{0, 1}を[0, 1]に広げ，メンバシップ関数を用いた記述とし，ファジィ集合の性質や演算として採用する

集合Xを考えましょう．AとBを，Xの部分集合とします．任意の$x \in X$に対して，

$$x \in A \Rightarrow x \in B \quad【xがAに属す ならば xはBに属す】 \tag{3}$$

が成り立つとき，AはBに含まれる，BはAを含む，AはBの部分集合である，といい，$A \subseteq B$と記述します．さらに，$A \subseteq B$かつ$B \subseteq A$が成立するとき，AとBは等しいといい，$A = B$と書きます．

(3)の条件を，特性関数を用いて表現すると，次のようになります．

$$\chi_A(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) = 1 \tag{4}$$

ここでは，$\chi_A(x)=0$の場合については，何も述べていません．しかし，χ_Aの終域は{0, 1}ですから，$\chi_A(x)=0$の場合，$\chi_B(x)$の値は0または1ということになります．このことと，(4)をあわせると，任意の$x \in X$に対して，

$$\chi_A(x) \leqq \chi_B(x) \tag{5}$$

が成り立ちます．

特性関数をメンバシップ関数に置き換えて，次の定義を得ます．

[定義2]

X：考察対象の世界

A, B：X上のファジィ集合

とする．任意の$x \in X$に対して

$$\mu_A(x) \leqq \mu_B(x) \tag{6}$$

が成立するとき，AはBに含まれる，または，BはAを含む，といい$A \subseteq B$と表す．

$A \subseteq B$かつ$B \subseteq A$であるとき，AとBは等しい，といい$A=B$と表す． ■

3．補ファジィ集合

補集合に対応する補ファジィ集合を定義しましょう．「補ファジィ集合」という用語は，あまり一般的ではないかもしれません．「ファジィ集合Aの補集合」とか *complement of A* が，よく使われているようです．しかし，前者は集合の一種のように感じますし，後者の訳として，「Aの補」は変なので，「Aの補ファジィ集合」とよぶことにします．

集合XにおけるAの補集合A^Cとは，次のようなXの部分集合です．

$$A^C = \{ x \mid xは，Aに属さない \}$$

この補集合の性質は，特性関数を用いて次のように表現できます．

任意のa, $b \in X$に対して，

(c1) $\chi_A(a) = 1 \Rightarrow \chi_{A^C}(a) = 0$

(c2) $\chi_A(a) = 0 \Rightarrow \chi_{A^C}(a) = 1$

(c3) $\chi_A(a) \leqq \chi_A(b) \Rightarrow \chi_{A^C}(a) \geqq \chi_{A^C}(b)$

(c4) $\chi_A(a) = \chi_{(A^C)^C}(a)$

が成立する．

性質(c3)は，メンバシップ関数に置き換えることを考慮したものになっています．これは，「Aにあてはまる度合いが小さい」ほど，「Aにあてはまらない度合い(=A^Cにあてはまる度合い)が大きい」，ということを表しています．値として0か1しかとらない特性関数に対しては，あまり意味のない性質ですが，成立することは確認できます．

この，補集合の場合，特性関数をメンバシップ関数に置き換えるという作業は，(c1)～(c4)のχをμに書き換えるだけなので，その結果を頭の中に思い描いてください．その頭の中の条件を満たすものは，なんと，無数に存在します．その中のいくつかを定義として挙げましょう．

[定義3]

X：考察対象の世界

A：X上のファジィ集合

とする．Aの補ファジィ集合とは，次のメンバシップ関数によって特徴づけられる，X上のファジィ集合A^Cのことである．

(*com1*)　$\mu_{A^C}(t) = 1 - \mu_A(t)$

(*com2*)

$$\mu_{A^C}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\mu_A(t) & (0 \leqq t \leqq 0.4) \\ 2 - 3\mu_A(t) & (0.4 \leqq t \leqq 0.5) \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mu_A(t) & (0.5 \leqq t \leqq 0.8) \\ 2 - 2\mu_A(t) & (0.8 \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

(*com3*)〔λ-補ファジィ集合〕

$$\mu_{A^C}(t) = \frac{1-\mu_A(t)}{1+\lambda\mu_A(t)} \qquad (-1 < \lambda < \infty)$$

ただし，$t \in X$とする．■

上の定義の(*com3*)は，私の恩師，菅野道夫先生がご提案になったものです．$\lambda=0$とすれば，(*com1*)の定義に一致します．この定義が，(*c1*)～(*c3*)を満たすことは，すぐに確かめられます．(*c4*)を満たすことを確かめるために，(*com3*)の$\mu_A(t)$をx，$\mu_{A^C}(t)$をyとおき式を見やすくすると，

$$y = \frac{1-x}{1+\lambda x} \tag{7}$$

となります．これを変形していくと，

$$y(1+\lambda x) = 1 - x \tag{8}$$

$$y + \lambda xy = 1 - x \tag{9}$$

$$x + y + \lambda xy = 1 \tag{10}$$

となり，xとyの対称式になります．よって，xをyの式で表しても，yをxの式で表しても同じ形になります．つまり，$y=f(x)$と表されれば，$x=f(y)$と表されます．従って，$x=f(y)=f(f(x))$となり，λ-補ファジィ集合のλ-補ファジィ集合は，もとのファジィ集合になることがわかります．

なんだか，ごまかされたような気がする場合は，(*com3*)の定義式の$\mu_A(t)$に，

$$\frac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)} \tag{11}$$

を代入して，次のように力ずくの計算でも確かめることができます．

$$\frac{1-\dfrac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)}}{1+\lambda\cdot\dfrac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)}} = \frac{\dfrac{1+\lambda\mu_A(x)-1+\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)}}{\dfrac{1+\lambda\mu_A(x)+\lambda-\lambda\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)}}$$

$$= \frac{\lambda\mu_A(x)+\mu_A(x)}{1+\lambda}$$

$$= \frac{(1+\lambda)\mu_A(x)}{1+\lambda}$$

$$= \mu_A(x) \tag{12}$$

(*com2*)の定義は，補集合と矛盾しない補ファジィ集合がいろいろ考えられる，ということを伝えるために，私が無理矢理考えたものです．

以下では，最も一般的に使われている，[定義3]の(*com1*)を補ファジィ集合の定義として，話を進めます．

4．和ファジィ集合と積ファジィ集合

和集合と積集合に対応する，和ファジィ集合と積ファジィ集合の定義を見ていきましょう．文献によっては，和集合は合併集合，積集合は共通集合あるいは共通部分，と書かれていることがあります．

Xを集合とし，AとBをXの部分集合とします．AとBの和集合$A \cup B$と，AとBの積集合$A \cap B$とは，次のようなXの部分集合です．

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \} \tag{13}$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \} \tag{14}$$

まず，和集合と積集合の概念を，特性関数を用いて表現してみましょう．任意の$x \in X$に対して，和集合については，

$$\chi_A(x) = 1 \text{ または } \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_{A \cup B}(x) = 1 \tag{16}$$

が，積集合については，

$$\chi_A(x) = 1 \text{ かつ } \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_{A \cap B}(x) = 1 \tag{17}$$

が成立します．

(16)と(17)の特性関数をメンバシップ関数に置き換えて，[定義4]と[定義5]を得ます．和ファジィ集合の定義も，積ファジィ集合の定義も，複数あります．以下では，式を見やすくするために，次の記法を採用します．任意の実数r，sに対して，

$r \vee s$　は，rとsの大きい方を，

$r \wedge s$　は，rとsの小さい方を，

表します．

[定義4]

X：考察対象の世界

A，B：X上のファジィ集合

とする．

AとBの和ファジィ集合とは，次のメンバシップ関数によって特徴づけられる，X上のファジィ集合$A \cup B$のことである．

$x \in X$は，任意の要素とする．

(s1) $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

(s2) $\mu_{A \cup B}(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x)) \wedge 1$

〔限界和〕

(s3) $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$

〔代数和〕

(s4) $\mu_{A \cup B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & if\ \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x) & if\ \mu_A(x) = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases}$

〔激烈和〕

■

［定義５］

X：考察対象の世界

A，B：X上のファジィ集合

とする．

AとBの積ファジィ集合とは，次のメンバシップ関数によって特徴づけられる，X上のファジィ集合$A \cap B$のことである．

$x \in X$は，任意の要素とする．

(p1) $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

(p2) $\mu_{A \cap B}(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \vee 0$

〔限界積〕

(p3) $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$

〔代数積〕

(p4) $\mu_{A \cap B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & if\ \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x) & if\ \mu_A(x) = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

〔激烈積〕

■

部分集合においては，次のド・モルガンの法則が成立します．

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \tag{18}$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \tag{19}$$

これらは，重要な性質です．AとBを，ある店で売っているパンの部分集合としましょう．Aは，クリームがはいっているパン，Bは，100円以下のパンの集まりとします．$A \cup B$は，クリームがはいっているか，または，100円以下のパンからなる部分集合です．$(A \cup B)^C$は，$A \cup B$に属さないパンの集まりです．私たちは，それが，クリームがはいっておらず，かつ，100円以下でもないパンの集合であることを納得できます．これは，(18)の性質が，私たちの使っている論理にあっていることを意味します．(19)の性質も同様です．

［定義４］の和ファジィ集合と，［定義５］の積ファジィ集合は，(s1)と(p1)，(s2)と(p2)，(s3)と(p3)，(s4)と(p4)の組み合わせにおいて，ド・モルガンの法則が成立します．

(s4)と(p4)の組み合わせについて，$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ が成立することを，確かめてみましょう．任意の$x \in X$に対して，

$$\begin{aligned}
&\mu_{(A \cup B)^C}(x) \\
&= 1 - \mu_{A \cup B}(x) && \text{【補ファジィ集合の定義より】} \\
&= 1 - \begin{cases} \mu_A(x) & if\ \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x) & if\ \mu_A(x) = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases} && \text{【(s4)より】} \\
&= \begin{cases} 1 - \mu_A(x) & if\ 1 - \mu_B(x) = 1 \\ 1 - \mu_B(x) & if\ 1 - \mu_A(x) = 1 \\ 1 - 1 & otherwise \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu_{A^C}(x) & if\ \mu_{B^C}(x) = 1 \\ \mu_{B^C}(x) & if\ \mu_{A^C}(x) = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \\
&= \mu_{A^C \cap B^C}(x) && \text{【(p4)より】} \qquad (20)
\end{aligned}$$

となり，$\mu_{(A \cup B)^C}(x) = \mu_{A^C \cap B^C}(x)$が示されました．よって，$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ が成立します．

和ファジィ集合と補ファジィ集合が定義されていれば，ド・モルガンの法則と３ページ目の性質(c4)を用いることにより，次のようにして，積ファジィ集合の定義を導き出すことができます．

$$\begin{aligned}
\mu_{A \cap B}(x) &= \mu_{((A \cap B)^C)^C}(x) && \text{【(c4)より】} \\
&= \mu_{(A^C \cup B^C)^C}(x) && \text{【ド・モルガン(19)より】}
\end{aligned}$$

(s2)と(p2)の定義では，足して１を超えたら１で押さえるという，(s2)の方がわかりやすい定義です．(p2)の定義は，補ファジィ集合と(s2)から，次のようにして求めることができます．

$$
\begin{aligned}
&\mu_{A \cap B}(x) \\
&= \mu_{((A \cap B)^c)^c}(x) && \text{【(c4)より】} \\
&= \mu_{(A^c \cup B^c)^c}(x) && \text{【ド・モルガン(19)より】} \\
&= 1 - \mu_{A^c \cup B^c}(x) && \text{【補ファジィ集合の定義より】} \\
&= 1 - [\{(1-\mu_A(x))+(1-\mu_B(x))\} \wedge 1] && \text{【(s2)より】} \\
&= [1 - \{(1-\mu_A(x))+(1-\mu_B(x))\}] \vee (1-1) \\
&= (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \vee 0 && (21)
\end{aligned}
$$

双対的に，次のようにして，積ファジィ集合の定義から和ファジィ集合の定義を導き出すことができます．

$$
\begin{aligned}
\mu_{A \cup B}(x) &= \mu_{((A \cup B)^c)^c}(x) && \text{【(c4)より】} \\
&= \mu_{(A^c \cap B^c)^c}(x) && \text{【ド・モルガン(18)より】}
\end{aligned}
$$

(s3)と(p3)の定義では，かけ算をするという，(p3)の方がわかりやすい定義です．(s3)の定義は，補ファジィ集合と(p3)から，次のようにして求めることができます．

$$
\begin{aligned}
&\mu_{A \cup B}(x) \\
&= \mu_{((A \cup B)^c)^c}(x) && \text{【(c4)より】} \\
&= \mu_{(A^c \cap B^c)^c}(x) && \text{【ド・モルガン(18)より】} \\
&= 1 - \mu_{A^c \cap B^c}(x) && \text{【補ファジィ集合の定義より】} \\
&= 1 - \mu_{A^c}(x)\mu_{B^c}(x) && \text{【(p3)より】} \\
&= 1 - ((1-\mu_A(x))(1-\mu_B(x))) && \text{【補ファジィ集合】} \\
&= 1 - (1 - \mu_A(x) - \mu_B(x) + \mu_A(x)\mu_B(x)) \\
&= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) && (22)
\end{aligned}
$$

5．ファジィ集合の写像による像と原像

写像による，ファジィ集合の像と原像を考えてみましょう．

●写像と部分集合

X，Y：集合

f：$X \to Y$：写像

とする．

◆ $E \subseteq X$

とする．

$\{f(x) \mid x \in E\} \subseteq Y$

を，f による集合 E の像とよび，$f(E)$ と書く．

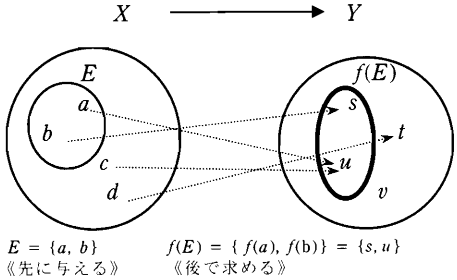


図2　写像による部分集合の像

◆ $\forall y \in Y$ に対して，

$\{x \mid x \in X$ かつ $f(x) = y\} \subseteq X$

を，写像 f による b の原像とよび，$f^{-1}(y)$ で表す．

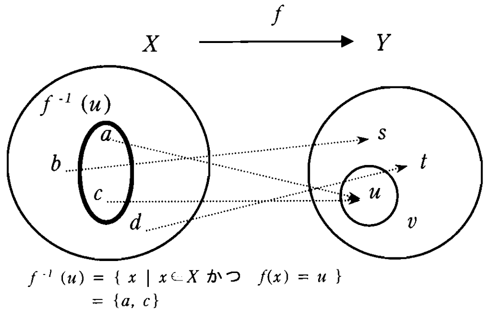


図3　写像による要素の原像

◆ $F \subseteq Y$

とする．

$\{x \mid x \in X$ かつ $f(x) \in F\}$

を，f による集合 F の原像とよび，$f^{-1}(F)$ と書く．

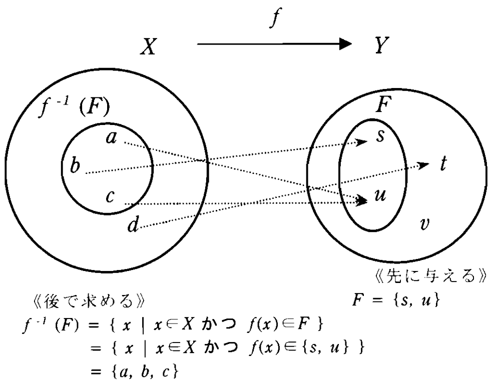


図4　写像による部分集合の原像 ●

ここで，ある $y \in Y$ について，$y \in f(A)$ となるのはどのような場合か考えてみましょう．

$y \in f(A)$

$\Leftrightarrow$ $y \in \{ f(x) \mid x \in A \}$

$\Leftrightarrow$ $\exists a \in A (f(a) = y)$

【$f(a) = y$ を満たす，要素a が，Aの中に存在する】

$\Leftrightarrow$ $\exists a \in A (a \in \{x \mid x \in X$ かつ $f(x) = y\})$

【Xに属し，fによってyに対応づけられる要素aが，Aの中に存在する】

$\Leftrightarrow$ $\exists a \in A (a \in f^{-1}(y))$

【fによるyの原像に属す要素aが，Aの中に存在する】

$\Leftrightarrow$ $\exists a \in X (a \in A$ かつ $a \in f^{-1}(y))$

【Aと，fによるyの原像の両方に属す要素aがXの中に存在する】

$\Leftrightarrow$ $\exists a \in f^{-1}(y) (a \in A)$

【Aに属す要素aが，fによるyの原像の中に存在する】

(23)

A は X の部分集合であり，$\chi_{f(A)}(y)$ は Y の部分集合であることに気をつけて，上の最初と最後の表現，つまり，

$$y \in f(A) \;\Leftrightarrow\; \exists a \in f^{-1}(y)\,(\,a \in A\,) \tag{24}$$

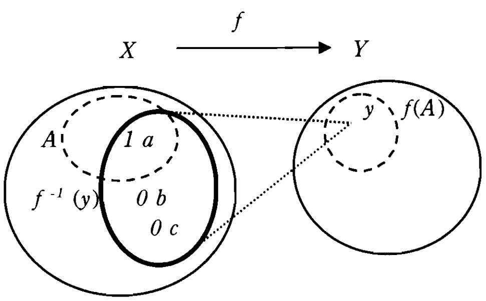
を，特性関数を用いて表現すると，次のようになります．

$$\chi_{f(A)}(y) = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists a \in f^{-1}(y)(\;\chi_A(a) = 1\;) \tag{25}$$

これは，図5のように，y の f による原像 $f^{-1}(y)$ の中に，χ_Aの値が 1 である要素がひとつでもあれば，$\chi_{f(A)}(y)$の値が 1 になることを意味しています．よって，次のように表現することができます．

$$\chi_{f(A)}(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \chi_A(x) \tag{26}$$

【右辺は，$f^{-1}(y)$に属す要素xに対する$\chi_A(x)$の最大値を表す】



a, b, c の左の数値は，それぞれ，
$\chi_A(a)$，$\chi_A(b)$，$\chi_A(c)$ の値

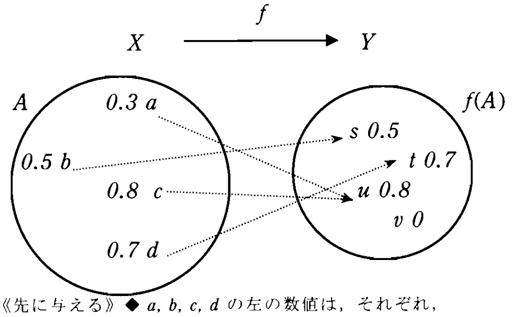
図5　$y \in f(A)$となる条件

上記の特性関数をメンバシップ関数に置き換えて，ファジィ集合の写像による像を定義しましょう．

[定義6]ファジィ集合の写像による像max版
　X, Y：考察対象の世界
　A：X上のファジィ集合
　f：$X \to Y$：写像
とする．任意の $y \in Y$ に対して，

$$\mu_{f(A)}(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{27}$$

なるメンバシップ関数よって特徴づけられる，Y上のファジィ集合 $f(A)$ を，写像 f によるファジィ集合Aの像とよぶ．　■

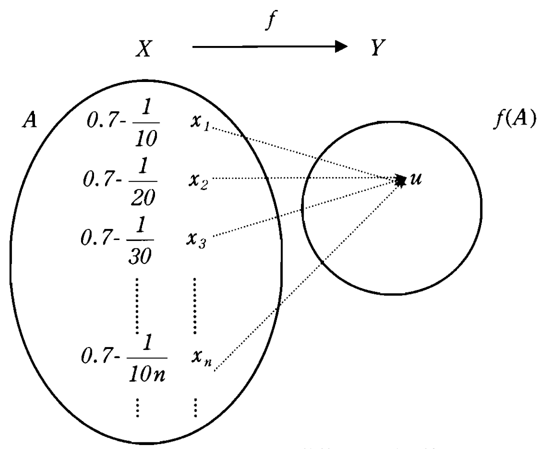


《先に与える》◆ a, b, c, d の左の数値は，それぞれ，
$\mu_A(a)$，$\mu_A(b)$，$\mu_A(c)$，$\mu_A(d)$ の値
《後で求める》◆ s, t, u, v の右の数値は，それぞれ
$\mu_{f(A)}(s)$，$\mu_{f(A)}(t)$，$\mu_{f(A)}(u)$，$\mu_{f(A)}(v)$ の値

図6　写像によるファジィ集合の像(その1)

図6における $\mu_{f(A)}(u)$の値の，具体的な求め方は，次のようになります．

$$\begin{aligned}\mu_{f(A)}(u) &= \max_{x \in f^{-1}(u)} \mu_A(x)\\ &= \max_{x \in \{a,\,c\}} \mu_A(x)\\ &= \max\{\,\mu_A(a),\ \mu_A(c)\,\}\\ &= \max\{\,0.3,\ 0.8\,\}\\ &= 0.8\end{aligned} \tag{28}$$



◆ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ の左側の数値は，それぞれ
$\mu_A(x_1)$，$\mu_A(x_2)$，$\mu_A(x_3)$，$\cdots$，$\mu_A(x_n)$，$\cdots$の値

図7　写像によるファジィ集合の像(その2)

さて，図7にあるように，
　$X = \{\,x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$
　$Y = \{\,u\,\}$
　f：$X \to Y$：写像
　　$f(x_n) = u$　　　　$(\,n = 1, 2, 3, \cdots\,)$
　A：X上のファジィ集合

$$\mu_A(x_n) = 0.7 - \frac{1}{10n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

という状況を考えてみましょう．$\mu_A(x)$の集合を，次のようにSと書くことにします．

$$S = \{\, 0.7 - \frac{1}{10n} \mid n\text{は，正の整数}\,\}$$

このように，Xの要素が無限個ある場合，Sに最大値が存在しないことがあります．そのようなときには，[定義６]に基づいて，ファジィ集合Aの像$f(A)$を求めることができません．

●上限とは

順序が定められた集合 W を考える．W の部分集合 S に対して，次のような要素 u を，S の上限(*supremum*)とよび

$\sup S$

と書く．

(sup1) $u \geqq x \quad for\ \forall x \in S$

(sup2) $v \geqq x \quad for\ \forall x \in S \ \Rightarrow\ u \leqq v$

$u \geqq x$ であることを，u が x に負けないことと解釈してみる．そのとき，(sup1)は，uが Sの誰にも負けないことを表し，(sup2)は，Sの誰にも負けないライバル v が登場すると，u は v には勝てないことをあらわしている．つまり，上限とは，Sの選手すべてに負けない者の内，一番弱い者のことである． ●

しかし，次のことは，容易にわかります．

★Sのどの要素も，0.7より小さい．

さらに，0.7より小さいどんな実数rを持ってきても，

$$0.7 - r > \frac{1}{m} \tag{29}$$

を満たす正の整数 m が存在するため，

$$0.7 - \frac{1}{m} > r \tag{30}$$

となり，r より大きい Sの要素が存在します．

以上より，0.7が，Sの上限となります．

上記のような場合を含んだ形で，ファジィ集合の写像による像を再定義しましょう．

[定義７]ファジィ集合の写像による像sup版

X，Y：考察対象の世界

A：X上のファジィ集合

$f: X \to Y$：写像

とする．任意の $y \in Y$に対して，

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{31}$$

なるメンバシップ関数よって特徴づけられる，Y上のファジィ集合$f(A)$を，写像fによるファジィ集合Aの像とよぶ． ■

[定義７]により，図７における$\mu_{f(A)}(u)$の値は，次のように求めることができます．

$$\begin{aligned}
&\mu_{f(A)}(u)\\
&= \sup_{x \in f^{-1}(u)} \mu_A(x)\\
&= \sup_{x \in \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}} \mu_A(x)\\
&= \sup\,\{0.7 - \frac{1}{10},\ 0.7 - \frac{1}{20},\ 0.7 - \frac{1}{30}, \cdots, 0.7 - \frac{1}{10n}, \cdots\}\\
&= 0.7
\end{aligned} \tag{32}$$

X，Yを集合，$f: X \to Y$を写像，FをYの部分集合とします．ある $a \in X$について，$a \in f^{-1}(F)$となるのはどのような場合か考えてみましょう．

$$\begin{aligned}
&a \in f^{-1}(F)\\
\Leftrightarrow\ & a \in \{\, x \mid x \in X \text{ かつ } f(x) \in F \,\}\\
\Leftrightarrow\ & f(a) \in F
\end{aligned} \tag{33}$$

$f^{-1}(F)$は Xの部分集合であり，Fは Yの部分集合であることに気をつけて，上の最初と最後の表現，つまり，

$$a \in f^{-1}(F) \ \Leftrightarrow\ f(a) \in F \tag{34}$$

を，特性関数を用いて表現すると，次のようになります．

$$\chi_{f^{-1}(F)}(a) = 1 \ \Leftrightarrow\ \chi_F(f(a)) = 1 \tag{35}$$

よって，次のように表現することができます．

$$\chi_{f^{-1}(F)}(a) = \chi_F(f(a)) \tag{36}$$

上記の特性関数をメンバシップ関数に置き換えて，ファジィ集合の写像による原像を定義しましょう．

[定義８]ファジィ集合の写像による原像

X，Y：考察対象の世界

A：X上のファジィ集合

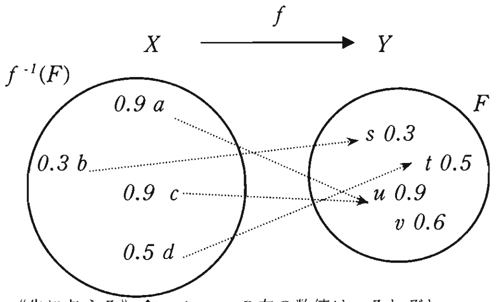
$f: X \to Y$：写像

とする．任意の $x \in X$に対して，

$$\mu_{f^{-1}(F)}(x) = \mu_F(f(x)) \tag{37}$$

なるメンバシップ関数よって特徴づけられる，X上のファジィ集合$f^{-1}(F)$を，写像fによるファジィ集合Fの原像とよぶ． ■

図8に，写像によるファジィ集合の原像の具体例をあげておきます．



《先に与える》◆ s, t, u, v の右の数値は，それぞれ $\mu_F(s)$, $\mu_F(t)$, $\mu_F(u)$, $\mu_F(v)$ の値

《後で求める》◆ a, b, c, d の左の数値は，それぞれ，$\mu_{f^{-1}(F)}(a)$, $\mu_{f^{-1}(F)}(b)$, $\mu_{f^{-1}(F)}(c)$, $\mu_{f^{-1}(F)}(d)$ の値

図8　写像によるファジィ集合の原像

参考文献

[1] 青木利夫，高橋渉，集合・位相空間要論，培風館，1979

[2] *Didier Dubois, Henri Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press New York 1980*

[3] 水本雅晴，ファジィ理論とその応用，サイエンス社，1988

[4] *Negoita, C.V. and Ralescu, D.A. Application of Fuzzy Sets to Systems Analysis (Birkhauser-Verlag, Basel, 1975)*

[5] 菅野道夫，ファジィ理論の展開－科学における主観性の回復－，サイエンス社，1989

[6] 赤攝也，集合論入門，培風館，1959

[7] 寺野寿郎，あいまい工学のすすめ（ブルーバックスB-486），講談社，1981

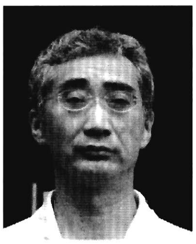
[8] 寺野寿郎，浅居喜代治，菅野道夫，ファジィシステム入門，オーム社，1987

[9] 寺野寿郎，浅居喜代治，菅野道夫，応用ファジィシステム入門，オーム社，1989

（2008年12月19日　受付）

[問い合わせ先]
〒448-0001　刈谷市井ケ谷町広沢1
愛知教育大学　情報教育講座
佐々木　守寿
TEL：0566-26-2617
FAX：0566-26-2617
E-mail： msasaki@auecc.aichi-edu.ac.jp

著者紹介



佐々木（ささき）　守寿（もりとし）［正会員］

1978年 東京工業大学理学部情報科学科卒業．1980年 東京工業大学大学院システム科学専攻修士課程修了．1984年 同博士後期課程終了，理学博士．同年 愛知教育大学数学教室助手．現在 愛知教育大学情報教育講座教授．同大学卓球部顧問兼準部員．

ファジィ部分集合論の基礎（1）　正誤表

《誤》

［定義8］ファジィ集合の写像による原像

X, Y：考察対象の世界

$A:X$上のファジィ集合

$f:X\to Y$：写像

とする．任意の$x\in X$に対して，

$$\mu_{f^{-1}(F)}(x)=\mu_F(f(x)) \qquad (37)$$

なるメンバシップ関数よって特徴づけられる，X 上のファジィ集合$f^{-1}(F)$を，写像 f によるファジィ集合 F の原像とよぶ.

《正》

［定義8］ファジィ集合の写像による原像

X, Y：考察対象の世界

$F:Y$上のファジィ集合

$f:X\to Y$：写像

とする．任意の$x\in X$に対して，

$$\mu_{f^{-1}(F)}(x)=\mu_F(f(x)) \qquad (37)$$

なるメンバシップ関数よって特徴づけられる，X 上のファジィ集合$f^{-1}(F)$を，写像 f によるファジィ集合 F の原像とよぶ.