

ある合同式の解の無数の存在性

初等教育教員養成課程 数学選修 竹内 桃子

本論文では, 次の定理 2 を主定理としている.

**定理 2.** 奇素数  $p$  に対して,  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は無数に存在する.

第 1 節では, 主定理を証明するための準備としてフェルマーの小定理の証明を与え, 第 2 節で, 主定理の証明を与えている. また, 第 3 節では, “ $n$  のすべての解を求めること” に視点を変え,  $p = 3, 5, 7, 11$  の場合において, その解を与えている.

**定理 3.**  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1, 2 \pmod{6}\}.$$

**定理 4.**  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 3, 4, 6, 17 \pmod{20}\}.$$

**定理 5.**  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 5, 6, 10, 26, 27, 31 \pmod{42}\}.$$

**定理 6.**  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{11}$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 6, 9, 10, 18, 24, 45, 47, 52, 71, 103 \pmod{110}\}.$$

さらに, 第 4 節では, 相異なる素数  $p, q$  に対して, 主定理の  $p$  を  $pq$  とおきかえ,  $n$  の無数性について考えている. 実際に  $(p, q) = (3, 5), (3, 7), (3, 11), (3, 13), (5, 7)$  の場合の解を与え, 次の予想を立てたが, 常に  $n$  が無数に存在するかどうかは研究中であり, 今後の課題としている.

**予想.**  $p = 3, q = 6a - 1$  の場合,  $n$  が

$$n = 3q(q - 1)k + 2q(q - 1) + (q - 1)$$

または

$$n = 3q(q - 1)k + 2q(q - 1) + (q - 2)$$

の形であれば,  $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{pq}$  を満たす.