学籍番号		論文題目	数には屈しない！ ―ランチェスターの法則と戦力の分割問題―
氏名	織田　桂輔		

1　戦争の微分方程式

時間 $t \geq 0$ に対して時刻 t での A 軍の残存兵数を $A(t)$，B 軍の残存兵数を $B(t)$ と表す．また兵士一人当たりかつ単位時間当たりに減らす相手の兵数を**武器効率**という．A 軍の武器効率を α，B 軍の武器効率を β とおく．

2　一次法則

単位時間における戦闘では A 軍が α,B 軍が β のダメージを相手に与えるとすると，時刻 t における両軍の兵力数 $A(t)$,$B(t)$ は，味方の損害が敵の数に依存しない場合，

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}A(t) = -\beta \\ \dfrac{d}{dt}B(t) = -\alpha \end{cases} \tag{1}$$

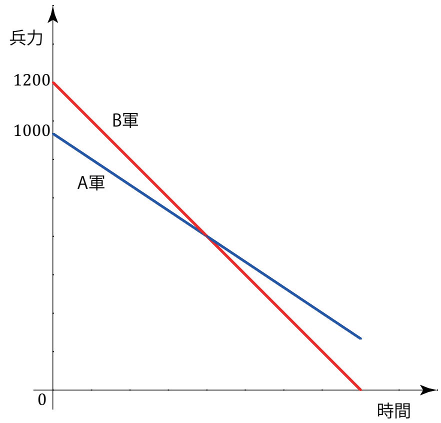

図 1: モデル (1) の解曲線．初期条件は $A_0 = 1000$, $B_0 = 1200$ とし，$\alpha = 1.5\beta$ と設定した．

と表せる．またこの解は $\boxed{\alpha(A_0 - A(t)) = \beta(B_0 - B(t))}$ を満たす．これを**ランチェスターの一次法則**という．

3　二次法則

味方の損害が敵の数に比例しない場合の特徴は，戦いに参加する人数が時間によらず一定になっていることである．では，その時点で戦闘可能な兵士の全員が戦闘に参加していた場合，残存兵力数はどのように変化するだろうか．この場合，単位時間当たりの戦闘で相手に与えるダメージは，

(自軍の武器効率）×（その時点での自軍の兵力数）

と考えられる．平原などでの大戦闘はこのタイプとなっており，銃や大砲を使うような近代戦に見られる法則である．その残存兵数の推移は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}A(t) = -\beta B(t) \\ \dfrac{d}{dt}B(t) = -\alpha A(t) \end{cases} \tag{2}$$

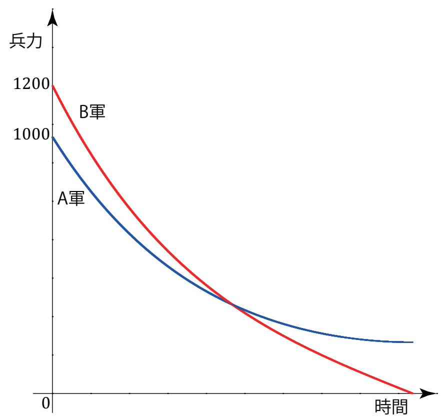

図 2: モデル (2) の解曲線．初期条件は $A_0 = 1200, B_0 = 1000$ とし，$\alpha = 1.5\beta$ と設定した．

と表せる．(2) の解 $A(t), B(t)$ は，$\boxed{\alpha({A_0}^2 - A(t)^2) = \beta({B_0}^2 - B(t)^2)}$ を満たす．これを**ランチェスターの二次法則**という．この微分方程式は実際に解けて，解は以下となる．

$$A(t) = A_0 \cosh(\sqrt{\alpha\beta}t) - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}B_0 \sinh(\sqrt{\alpha\beta}t), \quad B(t) = B_0 \cosh(\sqrt{\alpha\beta}t) - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}A_0 \sinh(\sqrt{\alpha\beta}t).$$

4　三次法則

自軍と相手の軍の割合が残存兵数に依存するモデルを考える．例えば単位時間当たりの戦闘で相手に与えるダメージは，

(自軍の武器効率）×（その時点での残存兵数の割合）

で与えられるとしよう．この場合，両軍の損害は (3) と表されるだろう．またこの解は $\boxed{\alpha({A_0}^3 - A(t)^3) = \beta({B_0}^3 - B(t)^3)}$ を満たし，**ランチェスターの三次法則**という．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}A(t) = -\beta\dfrac{B(t)}{A(t)} \\ \dfrac{d}{dt}B(t) = -\alpha\dfrac{A(t)}{B(t)} \end{cases} \tag{3}$$

5　一般化

二次法則が導かれるモデルから，

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}A(t) = -\beta\left(\dfrac{B(t)}{A(t)}\right)^{\gamma-1} B(t) \\ \dfrac{d}{dt}B(t) = -\alpha\left(\dfrac{A(t)}{B(t)}\right)^{\gamma-1} A(t) \end{cases} \tag{4}$$

と変更したモデルを考える. これは味方と敵の兵力比が戦局に影響を与え，たとえば $\gamma > 1$ のとき，自軍が多いときほど被害が抑えられる様子を表している．

6　更なる一般化

交戦中の A,B 両軍の時点 t の兵力を $A(t)$,$B(t)$，単位時間当たりの武器効率を α,β とする．$i = A, B$ に対し m_i を攻撃性，n_j を防御・抗堪性を表す指数として，次の微分方程式モデルを考える．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}A(t) = -\beta\dfrac{B(t)^{n_B}}{A(t)^{m_A}} \\ \dfrac{d}{dt}B(t) = -\alpha\dfrac{A(t)^{n_A}}{B(t)^{m_B}} \end{cases} \tag{6}$$

以下 $\mu_A = m_A + n_A + 1, \mu_B = m_B + n_B + 1$ とおく．

命題 5.1 モデル (4) において

$$\alpha({A_0}^{2\gamma} - A(t)^{2\gamma}) = \beta({B_0}^{2\gamma} - B(t)^{2\gamma}) \tag{5}$$

が成り立つ．さらに解は

$$A(t)^\gamma = {A_0}^\gamma \cosh(\sqrt{\alpha\beta}\gamma t) - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}{B_0}^\gamma \sinh(\sqrt{\alpha\beta}\gamma t),$$

$$B(t)^\gamma = {B_0}^\gamma \cosh(\sqrt{\alpha\beta}\gamma t) - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}{A_0}^\gamma \sinh(\sqrt{\alpha\beta}\gamma t)$$

で与えられる．

命題 6.1 モデル (6) において，

1．$\mu_A \neq 0, \mu_B \neq 0$ のとき，
$\boxed{\dfrac{\alpha}{\mu_A}({A_0}^{\mu_A} - A(t)^{\mu_A})\dfrac{\beta}{\mu_B}({B_0}^{\mu_B} - B(t)^{\mu_B})}$ が成り立つ．これを $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ 次則と呼ぶ．

2．$\mu_A = \mu_B = 0$ のとき，
$\left(\dfrac{A}{A_0}\right)^\beta = \left(\dfrac{B}{B_0}\right)^\alpha$ が成り立つ．

3．$\mu_A = 0$，$\mu_B \neq 0$ のとき，
$\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)^\beta = \dfrac{\alpha}{\mu_B}(B^{\mu_B} - B_0^{\mu_B})$ が成り立つ．

4．$\mu_A \neq 0$，$\mu_B = 0$ のとき，
$\log\left(\dfrac{B}{B_0}\right)^\alpha = \dfrac{\beta}{\mu_A}(A^{\mu_A} - A_0^{\mu_A})$ が成り立つ．

7　クープマンの戦力分割

味方が小兵力であっても敵の大兵力を何らかの方法で分割して戦えば勝てることがある．

定理 7.1 ((M, N) 次則下での最低勝利条件) 戦争モデルが (6)($\mu_A \neq 0, \mu_B \neq 0$) に従うとする．$B$ 軍を n 回に分割して戦う時に A 軍が勝利するのに必要な初期兵数を最小にするのは，B 軍を n 等分して戦うときである．

これは敵の分割割合を $\theta_1, \ldots, \theta_n$ としたとき，$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = 1$ の条件下での ${\theta_1}^{\mu_B} + {\theta_2}^{\mu_B} + \cdots + {\theta_n}^{\mu_B}$ の最小値を探す問題に還元される．

8　増援の最適タイミング

A 軍と B 軍が戦闘を始めて時刻 t_z で $A(t_z) = \theta A_0, 0 \leq \theta < 1$ になったとする．このとき A 軍に増援が現れ加勢し B 軍に勝ったとする．最終的な残存兵数を $\tilde{A}(s)$ とする．

定理 8.1 戦争モデルが (6) に従うとし，時刻 t_z で $A(t_z) = \theta A_0$ となったときに増援が現れ B 軍に勝利したとする．そのときの残存兵数 $\tilde{A}(s)$ は

1. $\mu_A > 1$ ならば θ の増加関数である．すなわち，援軍投入の時期はできるだけ早いほうが兵数の損失は小さくできる．
2. $\mu_A = 1$ ならば定数関数である．すなわち兵数の損失は援軍投入時期に依らない．

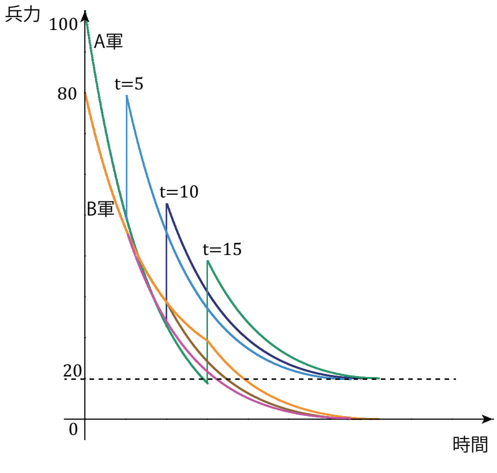

図 3: 初期兵力はそれぞれ $A = 100$,$B = 80$，武器効率は $1.5\alpha = \beta$ として，A 軍への援軍 30 投入時期と残存兵数の推移．A 軍への援軍が $t = 5$，$t = 10$，$t = 15$ にそれぞれ到来した場合．何れの場合でも戦争終結時の A 軍の残存兵数は等しい．ただし，戦争終結の時間は到来時間が遅いほど伸びていることが分かる．

参考文献

[1] 飯田 耕司, 拡張ランチェスター･モデル:K 次則, (M, N) 次則, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 アブストラクト集 2011, pp.26-27, 2011.

[2] 中野 明, Excel で学ぶランチェスター戦略, オーム社, 2009.