学籍番号		論文題目	偏らないあみだくじ —有限群の表現とあみだくじへの応用—
氏名	内田 英典		

1　推移確率行列によるあみだくじの解析

n 本の縦棒からなるあみだくじは，n 個の場所 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ から $[n]$ への置換と考えられる．また横棒を 1 本引く操作は隣り合う縦棒 $i,i+1$ の間の互換 $(i\ i+1)$ に他ならない．p_{ij} で場所 i から j へ移動できる確率を表せば，等確率で互換 $(i\ i+1)$ を選ぶ操作の推移確率行列 $P=(p_{ij})$ は (1) で与えられる．このとき，横棒を無限に等確率で引き続けると，$[n]$ のどの場所から $[n]$ のどの場所へも等確率で移動できることが分かる．すなわち，

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}, & |i-j|=1,\\ 1-\dfrac{2}{n-1}, & i=j\notin\{1,n\},\\ 1-\dfrac{1}{n-1}, & i=j\in\{1,n\},\\ 0, & \text{その他}.\end{cases} \tag{1}$$

定理 1.1 $\boldsymbol{p}\in[0,1]^n$ を任意の確率分布，P を縦線の数が n 本のあみだくじに対する推移確率行列とすると $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{p}P^k=\overbrace{\left(\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}\right)}^{n}$ が成立する．

2　ランダム置換としてのあみだくじ

n 本の縦棒からなるあみだくじは n 次対称群 $\mathbb{S}_n$ 上のランダム置換として捉えることもできる．

定義 2.1 (あみだくじ) 次の方式で得られるランダム置換 π を k 段**あみだくじ**と呼ぶ．

1. 等確率で l を $\{k,k+1\}$ から選ぶ．

2. 各 $1\le i\le l$ に対して，π_i を隣接互換の集合 $\{(j\ j+1)\mid 1\le j\le n-1\}\subseteq\mathbb{S}_n$ から等確率で抽出する．

3. $\pi=\pi_l\cdots\pi_2\pi_1$ とする．

また条件 *2.* を

2' 各 $1\le i\le l$ に対して，π_i を隣接互換の集合 $\{(j\ j+1),1\le j\le n-1,\ \text{または}\ (1\ n)\}\subseteq\mathbb{S}_n$ から等確率で抽出する．

に変えたものを**環状あみだくじ**と呼ぶ．

一回の隣接互換による置換 π_i は横棒一本引くことに対応し，定義 2.1 の *2.* および *2'.* の操作に対応する $\mathbb{S}_n$ 上の確率分布 p,p° はそれぞれ

$$p(\pi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}, & \pi\text{が隣接互換のとき},\\ 0, & \text{それ以外のとき},\end{cases}\quad,\quad p'(\pi)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \pi\text{が隣接互換または互換}\ (1\ n)\ \text{のとき},\\ 0, & \text{それ以外のとき}\end{cases} \tag{2}$$

で与えられる．すると 2 段あみだくじでは確率分布が畳み込み $p*p(\pi)=\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}p(\sigma)p(\sigma^{-1}\pi)$ によって与えられるので，定義 2.1 の k 段あみだくじの $\mathbb{S}_n$ 上の確率分布 f_k は $f_k=\dfrac{1}{2}(p^{(*k)}+p^{(*(k+1))})$ で与えられる．一方 $\mathbb{S}_n$ 上の一様分布は $u(\pi)=\frac{1}{n!}$ で与えられる．以下では一様分布 u と f_k との距離 $\|u-f_k\|_2^2$ を $\mathbb{S}_n$ 上のフーリエ変換を用いて評価していく．

3　有限群の表現とフーリエ変換

定義 3.1 (表現) V をベクトル空間とし，$GL(V)$ で V 上の可逆な線形写像の全体を表す．群 G に対し準同型 $\rho:G\to GL(V)$ を G の V 上の**表現**と呼ぶ．V の部分空間 U であって $\rho(G)U=U$ となるものを G **不変部分空間**，あるいは V の**部分表現**と呼ぶ．明らかに 0 または V それ自身は部分表現であり，これを自明な部分表現と呼ぶ．V の部分表現が自明なものしかないとき，V を**既約**であるという．G の有限次元表現 (π,V_π) に対し，$\chi_\pi(g)=\mathrm{tr}[\pi(g)]$, $g\in G$ を表現 π の**指標**と呼ぶ．特に π が既約のとき χ_π を既約指標と呼ぶ．

定義 3.2 (フーリエ変換) 群 G 上の関数 f と G の表現 ρ に対し，$\widehat{f}(\rho)=\displaystyle\sum_{x\in G}f(x)\rho(x)$ を f の**フーリエ変換**と呼ぶ．

命題 3.3 (合成積公式) G 上の関数 ϕ,ψ と任意の G の表現 ρ について，合成積公式 $\widehat{\phi*\psi}(\rho)=\widehat{\phi}(\rho)\widehat{\psi}(\rho)$ が成り立つ．

命題 3.4 k 段あみだくじの確率分布 f_k と一様分布 u の 2 乗距離の 2 乗は $d_\rho = \dim(\rho)$ として

$$\|f_k - u\|_2^2 = \frac{1}{n!}\sum_{\rho\in\widehat{\mathbb{S}}_n} d_\rho \mathrm{tr}\left[(\widehat{f}(\rho) - \widehat{u}(\rho))^2\right] \tag{3}$$

と表される．ただし $\mathbb{S}_n$ の既約表現全体を $\widehat{\mathbb{S}}_n$ と表した．

定理 3.5 あみだくじモデル *2.1* の確率分布 p に対し，$\mu_{\max} = \max_{\substack{\rho\in\widehat{\mathbb{S}}_n,\\ \rho\neq\rho_0,\rho_s}} \max\{|\mu| \mid \mu$ は $\widehat{p}(\rho)$ の固有値 $\}$ とおく．ただし，自明表現を ρ_0，符号表現を ρ_s と表した．$\mathbb{S}_n$ の任意の表現が直交表現となり，さらに $\mu_{\max} \leq 1$ であると仮定する．このとき k 段あみだくじの確率分布 f_k と一様分布 u の 2 乗距離の 2 乗は次の上界をもつ．

$$\|f_k - u\|_2^2 \leq \frac{1}{4}\mu_{\max}^{2k}(\mu_{\max}+1) \tag{4}$$

4　あみだくじの上界の計算

定理 3.5 を元に $\mathbb{S}_3$，$\mathbb{S}_4$ でのランダム置換と一様分布の距離を評価する．

$\mathbb{S}_3$ における既約表現は自明表現 ρ_0，符号表現 ρ_s および 2 次既約表現 ρ_2 の 3 つである．このうち評価 (4) に関わる既約表現は ρ_2 のみで，隣接互換に対する表現行列を求めると 2 次既約表現では $\widehat{p}(\rho_2)$ が

$$\widehat{p}(\rho_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

と分かり，$\mu_{\max} = \frac{1}{2}$ となる．

	分割	共役類	r_i	χ_0	χ_s	χ_2
C_1	(1,1,1)	(e)	1	1	1	2
C_2	(2,1)	(1 2)	3	1	-1	0
C_3	(3)	(1 2 3)	2	1	1	-1

表 1: $\mathbb{S}_3$ の指標表.

$\mathbb{S}_4$ における既約表現は自明表現 ρ_0，符号表現 ρ_s および 2 次既約表現 ρ_2，3 次の既約表現 ρ_3 および ρ_3' があり，このうち 2 次と 3 次が評価 (4) に関わる．隣接互換に対する表現行列を求めると $\widehat{p}(\rho_2)$ が

$$\widehat{p}(\rho_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

となり，その固有値は $\mu = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ である．3 次の既約表現 ρ_3，ρ_3' ではそれぞれ

$$\widehat{p}(\rho_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

で固有値は $\mu = \frac{1}{3}, \frac{1\pm\sqrt{2}}{3}$,

$$\widehat{p}(\rho_3') = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

で固有値は $\mu = -\frac{1}{3}, \frac{-1\pm\sqrt{2}}{3}$ である．したがって $\mu_{\max} = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ となる．以上から次の結果が得られる．

命題 4.1 縦線が n 本，横線が k 本の通常あみだくじから生じる $\mathbb{S}_n$ 上の確率分布を $f_k^{(n)}$，環状あみだくじから生じる $\mathbb{S}_n$ 上の確率分布を $g_k^{(n)}$，$\mathbb{S}_n$ 上の一様分布を u とすると，次の評価が得られる．

$$\|f_k^{(3)} - u\|_2^2 \leq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},\ \|g_k^{(3)} - u\|_2^2 = 0,\ \|f_k^{(4)} - u\|_2^2 \leq \frac{4+\sqrt{2}}{12}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^{2k},\ \|g_k^{(4)} - u\|_2^2 \leq \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \tag{5}$$

参考文献

[1] G.Blom, D.Sandell, 確率問題ゼミーコイン投げからランダム・ウォークまで, シュプリンガー・フェアラーク東京,1995.

[2] P.Diaconis, Group Representations in Probability and Statistics, IMS,1988.

[3] 中村彰吾, 武井由智, フーリエ変換によるあみだくじの解析, 数理解析研究所講究録 **1894**, pp.10-18, 2014.