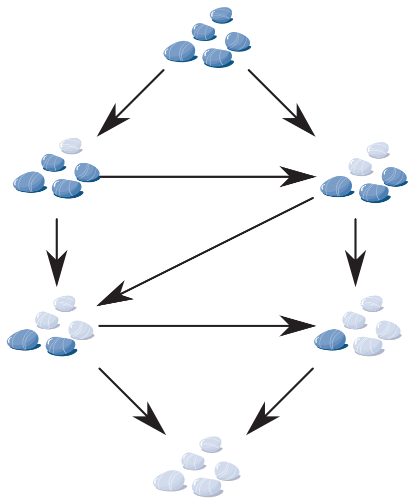
学籍番号		論文題目	「このゲームには必勝法がある.」 -グランディー数による組合せゲームの分析-
氏名	丸井 俊紀		

1 数学的定式化

定義 1.1 ゲーム G において起こりうる局面全体の集合を V とし，$u \in V$ から $v \in V$ へと移る手が存在するとき $\overrightarrow{uv}$ 又は (u,v) と表すことにする．このとき局面全体の集合 V を点，局面の遷移全体の集合 $E = \{\overrightarrow{uv} \mid u, v \in V\}$ を有向辺集合とする有向グラフ $G(V,E)$ を**ゲーム G の樹**と呼ぶ



定義 1.2 他の局面へと遷移する手段を持たない局面を**終局面**と呼ぶ．局面 $v \in V$ に対し，局面 v から一手で移行できる局面の集合を $F_v = \{u \in V \mid \overrightarrow{vu} \in E\}$ とおくとき，終局面の集合は $V^0 = \{v \in V \mid F_v = \emptyset\} \subset V$ と表される

定義 1.3 正規形のゲーム $G(V,E)$ について，局面の部分集合 $W, L \subset V$ が

(i) $V^0 \subset W$ かつ $V^0 \cap L = \emptyset$.

(ii) $l \in L$ と $N_l \cap W \neq \emptyset$ は同値である．

(iii) $w \in W$ と $N_w \subset L$ は同値である．

の条件を満たすとき，W を**勝利局面**の集合，L を**敗北局面**の集合とよぶ．

2 グランディー数

定義 2.1 有限なゲーム $G(V,E)$ の局面 $v \in V$ に対し，$\mathcal{G}_G(v) = \begin{cases} 0, & v \in V^0 \text{ のとき} \\ \min(\mathbf{N}_0 \setminus \mathcal{G}_G(F_v)), & v \notin V^0 \text{ のとき} \end{cases}$ とし，この $\mathcal{G}_G(v)$ を局面 v の**グランディー数**と呼ぶ．なお，混同が生じない場合は $\mathcal{G}_G$ を $\mathcal{G}$ と略記する．

命題 2.2 有限なゲーム $G(V,E)$ の局面 $v \in V$ に対し，$v \in W$ と $\mathcal{G}_G(v) = 0$ であることは同値である．

定義 2.3 2 進表記された非負の整数 $a = \sum a_i 2^i$，$b = \sum b_i 2^i$ に対し，2 進和 $a \oplus b$ を

$$a \oplus b = \sum c_i 2^i,\ c_i = a_i + b_i - 2a_i b_i$$

と定義する．

命題 2.4 (Sprague-Grundy の基本定理) $I \subset \mathbf{N}$ を有限集合，$G_i(V_i, E_i)$，$i \in I$ を互いに独立で有限なゲームとするとき，直和 $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ とその元 $v = \bigoplus_{i \in I} v_i$，$v_i \in V_i$ について

$$\mathcal{G}_G\left(\bigoplus_{i \in I} v_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{G}_{G_i}(v_i)$$

が成り立つ．

3 同型なゲーム

定義 3.1 ゲーム $G(V,E)$ について $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ とする．局面 v_1 から局面 v_n へと遷移する経路が存在する，すなわち $\overrightarrow{v_1 v_2}, \overrightarrow{v_2 v_3}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1} v_n} \in E$ となっているとき，$v_1 \overset{G}{\to} v_n$ と表す．

定義 3.2 ある有限なゲーム $G(V,E)$ の局面 $v \in V$ に対し，部分ゲーム $G(v)(V(v), E(v))$ を

$$V(v) = \{u \in V \mid v \overset{G}{\to} u\} \cup \{v\},\ E(v) = \{e \in E \mid \exists u, u' \in V(v), e = \overrightarrow{uu'}\}$$

と定める．

定義 3.3 有限な二つのゲーム $G_1(V_1,E_1)$ から $G_2(V_2,E_2)$ への有向グラフ写像 $\phi: G_1 \to G_2$ を考える．すなわち $\phi(V_1) \subset V_2$ かつ任意の辺 $e=\overrightarrow{uv} \in E_1$ に対し $\phi(e)=\overrightarrow{\phi(u)\phi(v)} \in E_2$ となっているとする．更に ϕ が終局面を終局面に写す，すなわち $\phi(V_1^0) \subset V_2^0$ となるとき，ϕ をゲームの**準同型**という．特に写像 ϕ が全単射であるとき，G_1 と G_2 は**同型**であるといい，$G_1 \cong G_2$ と表す．

有向グラフ写像の定義から任意の $v \in V_1$ に対し $u \in F_v$ ならば $\phi(\overrightarrow{vu})=\overrightarrow{\phi(v)\phi(u)} \in E_2$ なので，$\phi(u) \in F_{\phi(v)}$ となる．したがって，$\phi(F_v) \subset F_{\phi(v)}$ が成り立つ．そこで少し強い条件を考える．

定義 3.4 ゲームの準同型 $\phi: G_1(V_1,E_1) \to G_2(V_2,E_2)$ が任意の $v \in V_1$ について $\phi(F_v)=F_{\phi(v)}$ を満たすとき，ϕ を**局所同型**と呼ぶ．

命題 3.5 有限なゲームの局所同型 $\phi: G_1(V_1,E_1) \to G_2(V_2,E_2)$ はグランディー数を保存する．すなわち，任意の $v \in V_1$ に対し

$$\mathcal{G}_{G_1}(v)=\mathcal{G}_{G_2}(\phi(v))$$

が成り立つ．

定義 3.6 有限なゲーム $G(V,E)$ の局面 $v,v' \in V$ について $G(v) \cong G(v')$ となるとき $v \sim v'$ と表せば，$\sim$ は局面集合の同値関係になる．すると 2 辺 $\overrightarrow{uv},\overrightarrow{u'v'} \in E$ についても $u \sim u'$ かつ $v \sim v'$ のとき $\overrightarrow{uv} \sim \overrightarrow{u'v'}$ と定めることにより，辺集合 E の同値関係が導かれる．そこでこれら同値関係による剰余類をそれぞれ $\overline{V}=V/\sim, \overline{E}=E/\sim$ と表せば，$\overline{G}(\overline{V},\overline{E})$ は有向グラフとなる．この $\overline{G}$ を，G の**簡約ゲーム**とよぶ．特に $G \cong \overline{G}$ のとき，G は**既約**であるという．ゲーム G が有限であることに注意すると，簡約化を繰り返すことで既約なゲーム $\overline{G}$ が得られる．このとき，$\overline{G}$ を G の**既約ゲーム**と呼ぶ．

命題 3.7 ゲーム $\overline{G}(\overline{V},\overline{E})$ を有限なゲーム $G(V,E)$ の簡約ゲームとする．このとき同値類 $\overline{v} \in \overline{V}$ に属する局面 $v \in V$ の取り方によらず

$$\mathcal{G}_{\overline{G}}(\overline{v})=\mathcal{G}_G(v)$$

が成り立つ．

4 具体例：チョコレート完食ゲーム

ルール それぞれ任意個数 N の縦ブロックおよび M の横ブロックからなる長方形の板チョコレートを K 枚用意する．対局者は手順の度にどれか一つのチョコレートを選び，一枚すべてを食べるか，縦または横の溝にそって二つに分割して片方を食べる．全てのチョコレートがなくなった時点で終局となり，最後のチョコレートを食べた対局者の勝ちとなる．

このゲームについて考察する前に，次の set ニムの各一対のグランディー数を求める．

4.1 set ニム

ルール 任意個数の石からなる二山を一対とし，これを K 対用意する．対局者は手順の度にどれか一つの山を選び，そこから一つ以上石を取り除いていく．石のなくなった山と同じ対に属する山からは石を取り除けなくなるものとし，どの山からも石を取り除けなくなった時点で終局となり，最後の石を取った対局者の勝ちとなる．

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
2	0	2	1	4	3	6	5	8	$\cdots$
3	0	3	4	1	2	7	8	5	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

命題 4.1 $n,m \in \mathbf{N}$ とする．$K=1$ のチョコレート完食ゲーム $G_1(V_1,E_1)$ について，縦ブロックが n_1，横ブロックが m_1 の局面 $v_1 \in V_1$ に対し，$K=1$ の set ニム $G_2(V_2,E_2)$ で二つの山がそれぞれ n_1 個および m_1 個の石からなる局面 $v_2 \in V_2$ とするとき，

$$\mathcal{G}_{G_1}(v_1)=\mathcal{G}_{G_2}(v_2)$$

が成立する．

参考文献

[1] 山崎 洋平, 組み合わせゲームの裏表, シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 1989.
[2] M. H. Albert, R. J. Nowakowski and D. Wolfe, 組合せゲーム理論入門 -勝利の方程式-, 共立出版, 2007.
[3] 秋山 仁, 中村 義作 ゲームにひそむ数理, 森北出版株式会社, 1998.