学籍番号		論文題目	ピタゴラスの主題による変奏曲 －音律と音階に現れる数論的現象－
氏名	石田 奈々		

1　12 音音階における幹音はピタゴラス音律に由来する

現代では，平均律楽器となったピアノの鍵盤には白鍵と黒鍵があり，1 オクターブの間に含まれる 12 音のうち，7 音が白鍵，5 音が黒鍵になっている．白鍵の音を**幹音**，黒鍵の音を**派生音**と言いう．ピタゴラスは 1 つの周波数 f から出発して周波数比 2 : 3(完全 5 度) を利用し，f, $\frac{3}{2}f$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2 f$, $\left(\frac{3}{2}\right)^3 f, \ldots$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} f \fallingdotseq 2^7 f$ から 12 音音階を構成した．1 オクターブが周波数比 1 : 2 であることを考慮して周波数比のかわりに底を 2 とした対数を考える．オクターブ違う音は同一音名とするので，音階は区間 $[0,1]$ で 0 と 1 を同一視した $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の点列と見なせる．音階をピタゴラス音律で構成した場合，12 音は $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の点列として $\{k \log_2 \frac{3}{2}\}$, $k = 0, \ldots, 11$ で与えられる (ただし $\{\alpha\}$ は $\alpha \in \mathbf{R}$ の小数部分)．以下では近似分数 $\log_2 \frac{3}{2} \fallingdotseq \frac{7}{12}$ を利用し，各音は円 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の 12 等分点に対応させて考える (平均律)．

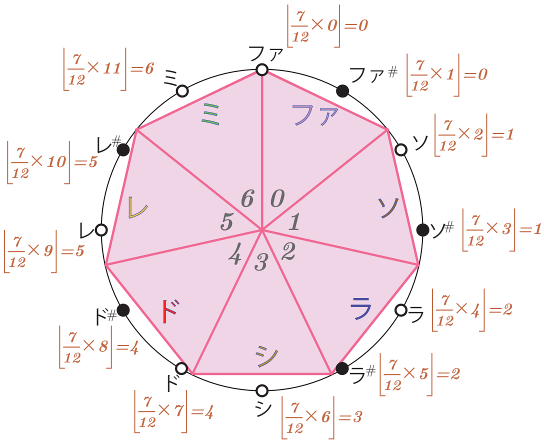

図 1:

すでに構成した 12 音から幹音として 7 つ，派生音として 5 つを選び，1 オクターブの中でできるだけ均等に散らばるように配置することを考える．その配置は，円 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上の 12 等分点でこの円に内接する正七角形を近似するものだと考えられる．円に内接する正七角形における

$$D_l = \left\{ x \;\middle|\; \frac{l}{7} \leq x < \frac{l+1}{7} \right\},\ l = 0, \ldots, 6$$

で与えられる D_l をそれぞれの幹音の領域とし (図 1)，各 D_l に 12 等分点 $\frac{k}{12}$ が含まれる条件は，$\left\lfloor \frac{7}{12}k \right\rfloor = l$ である．そして，

$$\left\lfloor \frac{7}{12}k \right\rfloor - \left\lfloor \frac{7}{12}(k-1) \right\rfloor = \begin{cases} 1, & \text{幹音,} \\ 0, & \text{派生音} \end{cases}$$

と定める (図 2)．その結果得られる 0, 1 の記号列 $010101101011\ldots$ には，次に述べる著しい性質をもつことが分かる．

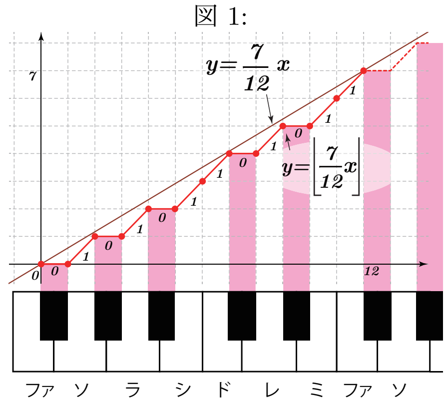

図 2: メカニカルワードと幹音・派生音

2　Myhill 性

0, 1 からなる両側無限記号列 $\boldsymbol{v} = (v_i) \in \{0,1\}^\infty$ に対し，$\boldsymbol{v}$ の語の集合を $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = \{v_i \cdots v_j \mid i, j \in \boldsymbol{Z}, i \leq j\}$ と表す．$\boldsymbol{u} = v_i \cdots v_j \in \mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ に対し，$|\boldsymbol{u}| = |v_i \cdots v_j| = j - i + 1$ を $\boldsymbol{u}$ の長さと呼び，$|\boldsymbol{u}|_1 = \#\{k \mid v_k = 1, k = i, \ldots, j\}$ を $\boldsymbol{u}$ の高さと呼ぶ．また，以下では $\underbrace{0 \cdots 0}_{z\text{ 個}}$ を 0^z と略記する．$\mathcal{L}_k(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{v}) \mid |\boldsymbol{u}| = k\}$ と表せば，$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_k(\boldsymbol{v})$ となる．$\mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ の部分集合 $S \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ に対し，S の高さ集合を $|S|_1 = \{|\boldsymbol{u}|_1 \mid \boldsymbol{u} \in S\}$ と表す．$v_{k+l} = v_k$ がすべての k で成り立つような最小の自然数 l が p となるとき，$\boldsymbol{v} = (v_k) \in \{0,1\}^\infty$ が周期 $p \geq 1$ をもつという．

定義 2.1. 実数 $\alpha > 0$ に対し，$v_k = \lfloor \alpha k \rfloor - \lfloor \alpha(k-1) \rfloor$，$k \in \boldsymbol{Z}$ によって得られる両側無限列 $\boldsymbol{v} = (v_k) \in \{0,1\}^\infty$ を**下側メカニカルワード**と呼び，$\boldsymbol{v} = \mathcal{M}(\alpha)$ と表す．また，$u_k = \lceil \alpha k \rceil - \lceil \alpha(k-1) \rceil$，$k \in \boldsymbol{Z}$ で得られる $\boldsymbol{u} = (u_k) \in \{0,1\}^\infty$ を**上側メカニカルワード**と呼び，$\boldsymbol{u} = \mathcal{M}'(\alpha)$ と表す．両者をあわせて**メカニカルワード**と呼ぶ．ただし

$$\lfloor \alpha \rfloor = \max\{n \in \boldsymbol{Z} \mid n \leq \alpha\}, \lceil \alpha \rceil = \min\{n \in \boldsymbol{Z} \mid n \geq \alpha\}$$

と定義し，α の小数部分を $\{\alpha\}$ と表す．

定義 2.2 (Myhill 性)**.** $\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^\infty$ がすべての $k \geq 1$ について $\#\left|\mathcal{L}_k(\boldsymbol{v})\right|_1 = 2$ が成り立つとき，$\boldsymbol{v}$ は ***Myhill*** 性をもつという．また，ある $p \geq 2$ に対し，$k \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば $\#\left|\mathcal{L}_k(\boldsymbol{v})\right|_1 = 2$ となるとき，$\boldsymbol{v}$ は周期 p の ***Myhill*** 性をもつという．このとき $|\mathcal{L}_p(\boldsymbol{v})|_1 = \{q\}$ となる q を $\boldsymbol{v}$ の高さと呼ぶことにし，$q = |\boldsymbol{v}|_1$ と表す．

定理 2.3 (Myhill 性)**.** 自然数 $p > q \geq 1$ で $(p,q) = 1$ となるものをとり，$\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^\infty$ を $\alpha = \frac{q}{p}$ から得られるメカニカルワードとする．すると，$\boldsymbol{v}$ は周期 p の *Myhill* 性をもつ．

定理 2.4. 周期が $p \geq 2$ で高さが q の無限列 $\boldsymbol{v} = (v_k) \in \{0,1\}^\infty$ が周期 p の *Myhill* 性をもつならば，p と q は互いに素であり，$(v_{k-s}) = \mathcal{M}\left(\frac{q}{p}\right)$ または，$(v_{k-s}) = \mathcal{M}'\left(\frac{q}{p}\right)$ となる $s \in \boldsymbol{Z}$ が存在する．すなわち，$\boldsymbol{v}$ は $\frac{q}{p}$ のメカニカルワードである．

3　純正律音階の再構成と一般に線対称軸が存在すること

純正律における幹音は，主要三和音（CEG，FAC，GBD）の周波数比が 4 : 5 : 6 となるように構成されている．すると 3 倍音と 5 倍音を使って 12 音間の長さも決まるが，これを円周上に表すと，線対称軸があることが分かる（図 3）．純正律は $A = \{-1,0,1,2\}$，$B = \{0,1,2\}$ として $\alpha = \log_2 3$，$\beta = \log_2 5$ に対する $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上の点集合 $\Gamma = \{a\alpha + b\beta \mid a \in A, b \in B\}$ を考えることに他ならず，この Γ に線対称軸があるということは，ある実数 γ をとれば，勝手な $a \in A$, $b \in B$ に対し，$a' \in A$ と $b' \in B$ が存在し，

$$\{a\alpha + b\beta + \gamma\} + \{a'\alpha + b'\beta + \gamma\} \in \boldsymbol{Z}$$

となるということである．一般に次の定理が成り立つ．

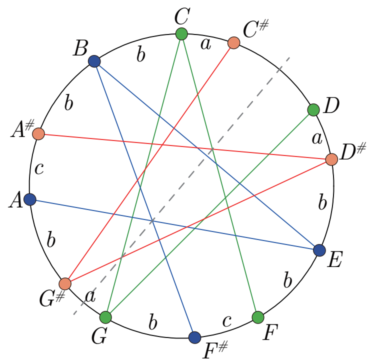

図 3: 純正律 (ハ長調) での音の配置

定理 3.1. $p\alpha + q\beta \notin \boldsymbol{Z}$ となる実数 α, β，$p, q \in \boldsymbol{N}$ に対し，$\{\gamma\} + \{p\alpha + q\beta + \gamma\} = 1$ となる $\gamma \in \boldsymbol{R}$ が存在し，$0 \leq a \leq p$，$0 \leq b \leq q$ となるすべての整数 a, b について

$$\{a\alpha + b\beta + \gamma\} + \{(p-a)\alpha + (q-b)\beta + \gamma\} = \begin{cases} 1, & a\alpha + b\beta + \gamma \notin \boldsymbol{Z} \text{ のとき}, \\ 0, & a\alpha + b\beta + \gamma \in \boldsymbol{Z} \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ．

4　線対称軸と上方/下方倍音

前節で現れた線対称軸の存在から，7 音音階の反転は別の 7 音音階になることが分かる．$\boldsymbol{Z}/12\boldsymbol{Z}$ の部分集合 $Dur = \{0,2,4,5,7,9,11\}$，$Mol = \{0,2,3,5,7,8,10\}$ と $k \in \boldsymbol{Z}/12\boldsymbol{Z}$ に対し，$Dur(k) = \{k + d \mid d \in Dur\}$，$Mol(k) = \{k + m \mid m \in Mol\}$ とおく．$Dur(k)$ を音番号 k (音番号は C=0,C♯=1,...,B=11 とおいた) の長音階，$Mol(k)$ を音番号 k の (自然) 短音階とよぶ．このときメカニカルワード $\boldsymbol{u} = \mathcal{M}\left(\frac{7}{12}\right)$ と Dur，Mol の間には $u_l = 1 \Leftrightarrow l - 7 \in Dur \Leftrightarrow l - 4$ という関係が成り立つ．一方，$\boldsymbol{u}$ については $u_k = u_{6-k}$ がすべての $k \in \boldsymbol{Z}$ で成り立ち，幹音集合が成す 7 音音階は u_3 を中心にして左右対称になっていることを示しており，従って対称軸で幹音集合を反転すると，再び（一般には主音が変化するか）幹音集合になることが分かる．さらにこのことから，次の結果が得られる．

定理 4.1. *7* 音音階 $Dur(n)$ および $Mol(n+9)$ を音番号 $l-7$ で反転すると，それぞれ $Dur(2l-n-6)$ および $Mol(2l-n+3)$ になり，音番号 $l-7$ と $l-6$ の間で反転するとそれぞれ $Dur(2l-n-5)$ および $Mol(2l-n+4)$ になる．

参考文献

[1] J. Clough and J. Douthett, *Maximal Even Sets*, Journal of Music Theory **35**, pp. 93-173, 1991.

[2] H. Kennuchi, 音楽 の数理的心象～ 不 定 調 性 音 楽 理 論 ～, 9th edition, music school M-Bank ed., 2012.

[3] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia of mathematics and its applications **90**, Cambridge University Press, 2002.

[4] T. Nakamura, ドレミファそーする？－音律の数理と音階の構成－, 2012 年度卒業論文, 愛知教育大学教育学部, 2013.

[5] J. Timothy, *Foundations of Diatonic Theory: A Mathematically Based Approach to Music Fundamentals*, Key College Publishing, 2003.