学籍番号		論文題目	名前のない音，ドンな音？ —膜の方程式からドラムのフーリエ解析まで—
氏名	野田 香織		

1　メロディーロードについて

乗用車で走行したときに車両走行音が音楽を奏でるように舗装を細工された道路のことをメロディーロードという．道路の法定速度が v(km/h)，曲の長さが t(s) ならば必要な距離は $\frac{5}{18}vt$(m) となる．また出したい音の振動数を f(Hz) とすると，この音を出すのに必要な溝の間隔は $\frac{5v}{18f}(m)$ である．流したい曲の長さが 4 分音符 n 個分とすると，4 分音符 1 個分の時間は $\frac{t}{n}$(s) となり，4 分音符 1 つ分に相当する距離は，$\frac{5vt}{18n}$ である．したがって，$\frac{5vt}{18n}$(m) の間に $\frac{5v}{18f}$(m) の間隔で溝を刻むと周波数 f の音が 4 分音符 1 個分聞こえることになる．このことを踏まえて例えば「きらきら星」4 小節に現れる音は右表のようになる．

音名	周波数 (Hz)	溝の間隔 (cm)
ラ	440	2.5
ソ	396	2.8
ファ	352	3.2
ミ	330	3.4
レ	297	3.7
ド	264	4.2

2　円形膜の波動方程式

命題 2.1. $g(r)$ は $[0,1]$ で定義された関数で n 次ベッセル関数で展開できるとする．境界条件 $u(1,\theta,t)=0$，初期条件 $u(r,\theta,0)=0$，$u_t(r,\theta,0)=g(r)$ のもとでの波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \tag{1}$$

の解は

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin(\lambda_{n,m}t)J_n(\lambda_{n,m}r)\left(\cos n\theta+\sin n\theta\right)$$

で与えられる．ただし $A_m=\frac{2}{\lambda_{n,m}(J_n(\lambda_{n,m}))^2}\int_0^1\xi g(\xi)J_n(\lambda_{n,m}\xi)d\xi$ である．

Proof. 波動方程式 (1) の解が $u(r,\theta,t)=R(r,\theta)T(t)$ と変数分離できるとする．これを (1) に代入すれば，定数 λ を用いて 2 つの微分方程式

$$\frac{d^2T}{dt^2}+k^2\lambda^2T=0,\ R_{rr}+\frac{1}{r}R_r+\frac{1}{r^2}R_{\theta\theta}+\lambda^2R=0$$

に分けて考えることができる．更に，R についての偏微分方程式に対して，その解が $R(r,\theta)=F(r)G(\theta)$ と変数分離できるとすると，F，G について，2 つの常微分方程式

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2}+r\frac{dF}{dr}+\left(r^2\lambda^2-n^2\right)F=0,\ \frac{d^2G}{d\theta^2}+n^2G=0$$

に分けて考えることが出来る．ここで，r についての方程式はベッセルの微分方程式であるので，$x=\lambda r$ として定義を適用し，境界条件を用いれば $F(r)=DJ_n(\lambda_{n,m}r)$ が得られる．ただし，n 次ベッセル関数の零点を小さい順に $\lambda=\lambda_{n,1}$，$\lambda_{n,2}$，…，$\lambda_{n,m}$，… と表した．また，θ，t についての常微分方程式の一般解を求め境界条件を用いると，

$$G(\theta)=\cos n\theta+\sin n\theta,\ T(t)=A\sin\lambda_{n,m}t+B\cos\lambda_{n,m}t$$

となる．ただし，A，B は任意の定数である．以上から，偏微分方程式 (1) の一般解は

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\sin\lambda_{n,m}t+B_m\cos\lambda_{n,m}t\right)J_n(\lambda_{n,m}r)\left(\cos n\theta+\sin n\theta\right)$$

となる．最後に，A_m，B_m を初期条件を満たすように定めると，

$$A_m=\frac{2}{\lambda_{n,m}(J_n'(\lambda_{n,m}))^2}\int_0^1\xi g(\xi)J_n(\lambda_{n,m}\xi)d\xi,\ B_m=0$$

となる．ただし，$J_n(\lambda_{n,m}r)$ の微分を $J_n'(\lambda_{n,m}r)$ と表した． □

3　膜の運動方程式から考えられること

以下では，仮定として円形膜を叩くとき，必ずその中心を叩くとする．この場合，膜の変形には軸対称性が成り立ち，次数が 0 のときのみ考えればよいことになる．n 次ベッセル関数の零点を原点から小さい順に並べたとき，m 番目となるベッセル関数の零点の値を $\lambda_{n,m}$ と表したとき，0 次ベッセル関数の隣同士の零点の距離の比，つまり $\dfrac{\lambda_{0,m+1}}{\lambda_{0,m}}$ は表 2 のようになる．隣同士の零点の距離の比は膜の振動によって発生する周波数の比に等しくなるが，今，m の値が小さい方から順番に距離の比を見ると，約 2 倍，1.5 倍，1.3 倍となっている．これは，基本周波数の音の倍音が発生することを表している．したがって，円形膜は基本周波数を音程をもつ周波数に合わせることができれば，叩いたときにその音程で聞こえるのではないかと考えられる．

原点からの順番	次数 (次)			
	0	1	2	3
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102
3	8.65373	10.1735	11.6198	13.0152
4	11.7915	13.3237	14.796	16.2235
5	14.9309	16.4706	17.9598	16.2235
6	14.9309	19.6159	21.117	22.5827
7	21.2116	22.7601	24.2701	25.7482
8	24.3525	25.9037	27.4206	28.9084
9	27.4935	29.0468	30.5692	32.0649
10	30.6346	32.1897	33.7165	35.2187

表 1: 第 1 種ベッセル関数の次数と零点の値

m	$\lambda_{0,m+1}/\lambda_{0,m}$	近似分数
1	2.29541	
2	1.56768	3/2 (完全 5 度)
3	1.36259	4/3 (完全 4 度)
4	1.26624	5/4 (長 3 度)
5	1.21032	6/5 (長 3 度)
6	1.17379	-
7	1.14807	-
8	1.12898	-
9	1.11425	-

表 2: $\dfrac{\lambda_{0,m+1}}{\lambda_{0,m}}$ の値とその近似分数

4　実際の音のフーリエ解析と考察

ドラムのチューニングは打面と共鳴面のそれぞれに対して行われるが，この 2 面の音程を 4 度差にするとよいといわれている．

[実験] フーリエ変換を用いて擬似的にドラムの音を変更させるために，ドラムの共鳴面 1 枚のみの打音を録音したものを離散フーリエ変換し，その周波数を 1 オクターブ下から 1 オクターブ上まで段階的に変更した音と元の打音とを合成した．

[考察] 「良い音」として

1．最も振幅の大きかった周波数の音が合成後も変化せず，

2．合成後，振幅の大きな周波数が複数あり，かつそれら周波数の比ができるだけ簡単な整数比になっていること．

の 2 点を要求したところ，実際の数値計算結果 (図 1) から-4 度に周波数を変更したものとの合成音の場合が最も条件に適すると判断できた．

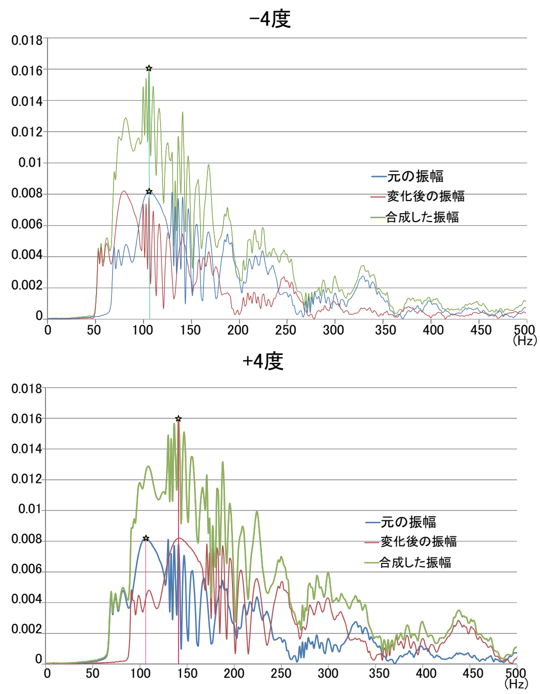

図 1: 元の音と合成後の音の振動数の変化
(最適の-4 度と不適の+4 度の場合)

参考文献

[1] E. クライツィグ, フーリエ解析と偏微分方程式 (技術者のための高等数学 3), 培風館, 2003.
[2] 川村 哲也, キーポイント 偏微分方程式, 理工系数学のキーポイント 10, 岩波書店, 2005.
[3] 小橋 豊, 音と音波, 基礎物理学選書 4, 裳華房, 1971.
[4] 株式会社 篠田興業, メロディーロードとは, 2013, http://www.melodyroad.jp/melodyroad_how.
[5] 日高 潤也, ドラム研究室, チューニング論, 2004, http://homepage3.nifty.com/JSTR/.