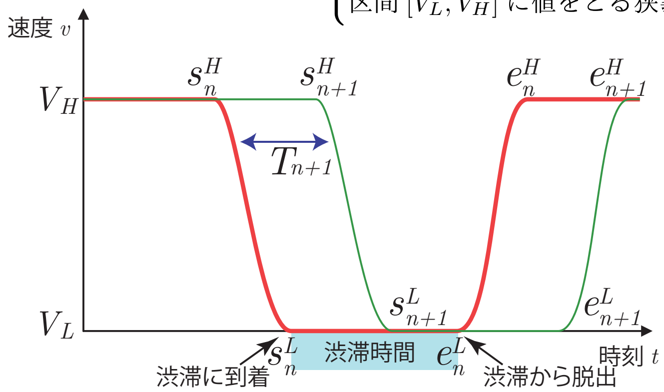
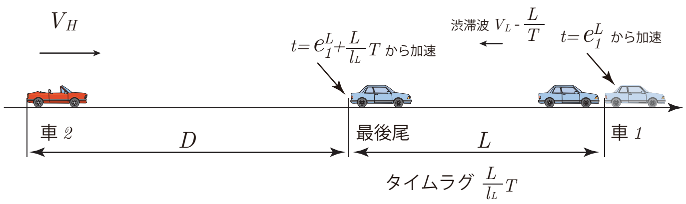
学籍番号		論文題目	詰まらない話 -渋滞の素朴な数理モデルによる解析-
氏名	園部　達也		

1　渋滞モデルの定義

この論文では渋滞の始まりは速度 V_L(m/s) になったとき，渋滞の終わりは速度 V_L(m/s) より加速したときとし，その間の状態を渋滞と呼ぶこととする．ある 1 台の車 n が渋滞に巻き込まれ始め，その後渋滞から解放されるまでの様子は車 n の速度関数 $v_n(t)$ を $s_n^H < s_n^L < e_n^L < e_n^H$ として，次で与える．

$$v_n(t) = \begin{cases} V_H, & t \leq s_n^H \text{ または } t \geq e_n^H, \\ V_L, & s_n^L \leq t \leq e_n^L, \\ \text{区間 } [V_L, V_H] \text{ に値をとる狭義単調関数}, & \text{その他の時間} \end{cases}$$





2　同一運転 1 列車列の渋滞

以下ではどの車も特徴なく同一の運転をしているという次の仮定の下で議論する．

仮定 2.1 前後のタイムラグがすべて T である一列の車列を考える．すなわち車 $n+1$ は車 n の直後を走り，速度について $v_{n+1}(t) = v_n(t-T)$ が n によらず成り立つとする．

命題 2.2 車 *1* の渋滞時間 $J_1 = e_1^L - s_1^L$ より短いタイムラグ $T < J_1$ をもつ仮定??を満たす *2* 台の車 *1* と *2* について考える．この場合 *2* 台とも渋滞状態になる時刻が存在する．また，渋滞前の *2* 台の距離 d_H と渋滞中の *2* 台の距離 d_L について $d_H = d_L + T(V_H - V_L)$ が成り立つ．

命題 2.3 仮定 *2.1* の車列において，渋滞波は速度 $V_L - \frac{l_L}{T}$ で移動する．

命題 2.4 仮定 *2.1* の車列において，車 *1* の渋滞時間を $J_1 = e_1^L - s_1^L$ とする．車 *1* 以降にできる渋滞の最大長は $\frac{l_L}{T}J_1$ であり，このとき $\dfrac{J_1}{T}$ 台の車が渋滞列を構成する．

命題 2.5 仮定 *2.1* の車列においてある時刻に車 *1* から長さ L の渋滞が発生しているとする．また，この渋滞の最後尾以降には車がいないとする．このとき車 *1* が渋滞を抜けてからこの渋滞が解消される，すなわちすべての車の速度が再び V_L より大きくなるまでにかかる時間は $\frac{L}{l_L}T$ である．

このことは車間距離 l_L を大きくとれば渋滞解消にかかる時間が短くなることを示している．

3　渋滞を避ける運転について

あるドライバーが前方に渋滞列を発見しても，十分にその渋滞までの距離が離れていれば渋滞に巻き込まれることはない．そこで渋滞の最後尾からどの程度離れている必要があるか考察する．

命題 3.1 仮定 *2.1* を満たす車列が車 *1* から長さ L の渋滞を成し，その渋滞の最後尾と車 *2* の間には車が無いとする．車 *1* が丁度渋滞から抜け再度加速を開始した時刻 $t = e_1^L$ において，渋滞の最後尾と車 *2* の間の距離 D が

$$D \geq D_0 = l_H + (V_H - V_L)\frac{L}{l_L}T + \int_{e_1^L}^{e_1^H} (V_H - v_1(t))dt$$

ならば，車 *2* は速度 V_H を維持して走行しても最後尾との距離は l_H 以上となる．

この命題を現実の運転に適用するには，渋滞列を前方に発見した時，丁度渋滞状態から抜けて加速を始めた車を命題 3.1 の車 1 と考えればよい．その後，何秒ごとに車 1 の後続車が加速を始めるか観察し，渋滞の長さ L（実際には長さよりも台数）から最後尾が加速するまで何秒かかるか計算し，最後尾と自分の車 2 との相対速度からそのままの速度 V_H を維持してもよいか否かを判断することになる．

4 安全限界速度

自車 2 が V_H から一切減速せずに安全車間距離 l_H を維持する条件を求めた．が，実際の運転では前方の渋滞を見越して緩やかに減速することが多い．自車 2 が緩やかな減速をする場合，どのような運転が可能か考察する．

命題 4.1 仮定 *2.1* を満たす車列が車 *1* から長さ L の渋滞を成し，その渋滞の最後尾と車 *2* の間には車が無いとする．車 *1* が丁度渋滞から抜け再度加速を開始した時刻 $t = e_1^L$ での渋滞の最後尾と車 *2* の間の距離を $D < D_0$ とすると，各時刻 t において常に安全距離が保たれる条件は以下で与えられる．

$$D + \int_{e_1^L}^{t} \left(v_1 \left(t - \frac{L}{l_L} T \right) - v_2(t) \right) dt \geq l(v_2(t))$$

一般的には安全車間距離 $l(v(t))$ は前の車がある地点を通過してから 2 秒後にさしかかると車間距離は適切であるとされている．このことを踏まえ，以下では定数 $\tau > 0$ を用いて前車がある地点を通過してから τ 秒後に後車がさしかかる距離を安全距離として採用する，すなわち $l(v(t)) = \tau v(t) + l_0$ とする．ここで $l_0 > 0$ は停車中の安全車間距離を表す．

定理 4.2 仮定 *2.1* を満たす車列が車 *1* から長さ L の渋滞を成し，その渋滞の最後尾と車 *2* の間には車が無いとする．また安全車間距離は $l(v(t)) = \tau v(t) + l_0$ で与えられるとする．車 *1* が丁度渋滞から抜け再度加速を開始した時刻 $t = e_1^L$ 以後の安全限界速度 $\omega(t)$ は $\omega(e_1^L) = V_H$ とするとき，

$$\omega(t) = e^{-\frac{1}{\tau}(t - e_1^L)} \left(\int_{e_1^L}^{t} \frac{1}{\tau} v_1 \left(s - \frac{L}{l_L} T \right) e^{\frac{1}{\tau}(s - e_1^L)} ds + V_H \right)$$

で与えられる．

系 4.3 定理 *4.2* の条件下で $v_1 \left(t_0 - \frac{L}{l_L} T \right) = \omega(t_0)$ となる時刻 $t_0 \in I = \left(e_1^L + \frac{L}{l_L} T, e_1^H + \frac{L}{l_L} T \right)$ がただ一つ存在し，安全限界速度 $\omega(t)$ の最小値は $v_1 \left(t_0 - \frac{L}{l_L} T \right) = \omega(t_0)$ で与えられる．

5 車間距離を大きく取ることについて

安全距離 $l(v(t)) = \tau v(t) + l_0$ に現れる定数 τ が大きいほど $\omega(t)$ の最低速度 $\omega(t_0)$ は大きくなる．

定理 5.1 定理 *4.2* の条件下において，$l(v(t)) = \tau v(t) + l_0$ の定数 τ を $\tau = \tau_1$ および $\tau = \tau_2$ととったときの安全限界速度をそれぞれ $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ とする．$\tau_1 < \tau_2$ ならば $\min_t \omega_1(t) < \min_t \omega_2(t)$ となる．

定理 5.1 は定数 τ を大きくとる，すなわち車間距離を長めにとるよう常々心がけていれば，結果としてそれほど減速をせずに渋滞を乗り切ることができる，ということを示している．このことはドライバーが常々経験していることであるが，それを簡単な渋滞モデルにおいて確かに証明できた．

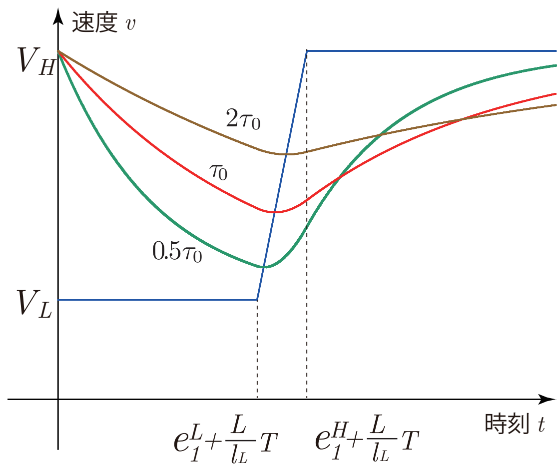


図 1: 様々な τ に対する安全限界速度 $\omega(t)$．τ が大きい，すなわち車間距離を長めにとるほうが減速の割合が小さくて済むことが分かる．

参考文献

[1] 小寺 平治, なっとくする微分方程式, 講談社, 2000.