学籍番号		論文題目	Product X —オイラー積表示をめぐって—
氏名	神谷 舜		

1 母函数

定義 1.1 (乗法的函数). $\mathbf{N}$ 上の函数 $f(n)$ について $f(1)=1$ かつ任意の互いに素な m,n に対し $f(mn)=f(m)f(n)$ を満たす函数を**乗法的函数**という.

定義 1.2 (母函数). $\mathbf{N}$ 上の函数 $a(n)$ を係数とする級数

$$G(a(n);x)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^n,\ DG(a(n);s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$$

をそれぞれ $a(n)$ の**母函数**, **ディリクレ母函数**という.

定理 1.3. 乗法的函数 $f(n)$ のディリクレ母函数は絶対収束している範囲で

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_{p\in\mathbf{P}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f(p^i)}{p^{is}}$$

という積表示を持つ. この積を**オイラー積**という.

命題 1.4. $a(n)$ のディリクレ母函数が**オイラー積表示を持つ**ことと, **乗法的である**ことは同値である.

定理 1.5. 無限積 $xg(x)=x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^s$, $s\in\mathbf{N}$ のマクローリン展開を $\sum_{n=0}^{\infty}a_s(n)x^n$ とする. すると

$$a_s(1)=1,\ a_s(n)=-\frac{s}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sigma(i)a_s(n-i)$$

が成り立つ.

命題 1.6. $x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^s$, $s\in\mathbf{N}$ の n 次係数 $a_s(n)$ は $s\neq 0,24$ ならば乗法的でない.

Proof. 定理 1.5 を用いて実際に $a_s(2)a_s(3)=a_s(6)$ を満たす s の候補に対して個別に調べることによって得る. □

2 五角数定理

定義 2.1 (多角数). 正 n 角形の形にドットを並べたときにそこに含まれるドットの個数を**多角数**という.

定理 2.2 (オイラーの五角数定理). $|x|<1$ にて

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{m(3m+1)}{2}}$$

が成り立つ.

3 保型形式

定義 3.1 (モジュラー群). $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c,d\in\mathbf{Z},\ ad-bc=1\right\}$ を**モジュラー群**と呼ぶ.

定理 3.2. $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ は $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ と $S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ から生成される.

定義 3.3 (フーリエ級数)**.** $\mathbf{C}$ 上の適当な函数 $f(z)$ が周期性 $f(z+1)=f(z)$ を持つとき，$f(z)$ に対して適当な数列 $\{a_n\}$ と $q=e^{2\pi iz}$ を用いて表される無限級数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nq^n$$

を**フーリエ級数**と呼ぶ.

定義 3.4 (フーリエ変換)**.** $\mathbf{R}$ 上の適当な函数 $f(x)$ に対して，

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ixy}dx$$

を**フーリエ変換**と呼ぶ.

命題 3.5 (ポアソン和公式)**.** $\mathbf{R}$ 上の適当な函数 $f(x)$ と $a\in\mathbf{R}$ に対して，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(a+n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{2\pi ian}$$

が成り立つ.

定義 3.6 (保型形式)**.** 上半平面 $\mathbf{H}=\{\,x+iy\mid x\in\mathbf{R},\ y>0\,\}$ 上の複素函数 $f(z)$ について

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^wf(z)$$

が全ての $a,b,c,d\in\mathbf{Z}$, $ad-bc=1$ に対して成り立つとき $f(z)$ を**保型形式**と呼ぶ．このとき w を**重さ**と呼ぶ.

定義 3.7 (ラヌマジャン函数)**.** 無限積 $q\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ の展開式

$$\Delta(z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$$

の n 次の係数 $\tau(n)$ を**ラマヌジャン函数**と呼ぶ．ただし，$q=e^{2\pi iz}$, $z\in\mathbf{H}$ である.

命題 3.8. $\Delta(z)=x\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)^{24}$ は重さ 12 の保型形式である.

命題 3.9. モーデル作用素 $(T(p)\Delta)(z)=\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}\Delta\left(\frac{z+l}{p}\right)+p^{11}\Delta(pz)$ について $T(p)\Delta=\tau(p)\Delta$ が成り立つ.

定理 3.10. $\tau(n)$ のディリクレ母函数について

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\prod_{p\in\mathbf{P}}\left(1-\tau(p)p^s-p^{11-2s}\right)^{-1}$$

が成り立つ.

命題 3.11. ラマヌジャン函数 $\tau(n)$ は乗法的函数であり，漸化式 $\tau(p^{k+1})+p^{11}\tau(p^{k-1})=\tau(p)\tau(p^k)$ が成り立つ.

4 参考文献

- 本橋 洋一，解析的整数論 I 一素数分布論一 (朝倉数学体系 1)，朝倉書店，2009.
- 松本 耕二，リーマンのゼータ関数 (開かれた数学 1)，朝倉書店，2006.
- George E.Andrews, Kimmo Eriksson, 整数の分割，数学工房，2006.
- 草場 公邦，行列特論，裳華房，1979.
- 熊原 啓作，入門複素解析 15 章，日本評論社，2012.
- 加藤 和也，黒川 信重，齋藤 毅，数論 I Fermat の夢と類体論，岩波書店，2005.
- 黒川 信重，栗原 将人，齋藤 毅，数論 II 岩澤理論と保型形式，岩波書店，2005.
- 高木 貞治，解析学概論 改定第 3 版 軽装版，岩波書店，1983.