イプシロン　2015.Vol.57, 163 - 166

実数の連続性の公理と同値な性質

＜修士論文要旨＞

愛知教育大学大学院 教育学研究科
数学教育専攻 数学科教育学領域
朝　平　映　一

1　序

実数 は, 代数性 (四則演算)・順序性 (大小関係)・**連続性** の 3 つの性質をもった数として特徴づけることができる。実数の連続性の公理で有名なのは, デデキントの切断の公理である。(以下, 切断の公理と呼ぶことにする。)

しかし, 実数の連続性の公理としてふさわしいのは切断の公理だけではない。例えば, 私が大学 1 年生の時に使った微分積分の教科書 [3] では上限の存在を連続性の公理としている。高木貞治の解析概論 [2] は, 実数の連続性の基本的性質として, (I) 切断の公理 (II) 上限の存在 (III) 有界単調列の収束 (IV) カントルの区間縮小の性質の 4 つを挙げ, **「これらの定理は, 実は, 同等である。すなわち四つの定理の中の任意の一つを承認すれば, 他の定理はそれから導かれる」**と述べている。しかし, 高木の主張は誤りである。なぜならば, (IV) カントルの区間縮小の性質 だけでは連続性の公理とはなり得ないからである。切断の公理とするためには, カントルの区間縮小の性質にアルキメデスの性質を組み合わせなければならない。

Teismann [1] は連続性の公理になり得る性質として, 18 個の性質のリストを挙げ, この論文ではそのうちの 14 個の性質とハイネ・ボレルの性質の 15 個をリストにした。以下がそのリストである。

1. 切断の公理
2. 上限の存在
3. タルスキーの性質
4. 連結性
5. 有界単調数列の収束
6. カントルの区間縮小＋アルキメデスの性質
7. ハイネ・ボレルの性質
8. ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの性質
9. コーシーの完備性＋アルキメデスの性質
10. 中間値の性質
11. 最大値の性質
12. 平均値の性質
13. 閉区間の上で連続な関数は有界である＋可算共終性
14. 閉区間の上で連続な関数は一様連続である＋可算共終性
15. 閉区間の上で連続な関数はリーマン積分可能である＋可算共終性

この論文では上記の 15 個の性質が同値であることを証明する。Teismann [1] では欠けている証明があった

ので, その部分を補う。

コーシーの完備性もカントルの区間縮小の性質と同様に, アルキメデスの性質と組み合わせないと連続性の公理とはなり得ない。英語では, 実数の連続性とコーシーの完備性の双方を「Completeness」という言葉で表現している。しかし, これら 2 つは異なる概念であり, 同じ言葉で表現するのは好ましくない。

連続性を満たさない数の集合には 2 種類存在する。それはアルキメデスの性質をもつものと, そうでないものである。前者は集合の要素が少なすぎて連続性を満たさないのに対し, 後者は多すぎて連続性を満たさないと理解することができる。今までの多くの研究者は前者の例だけを頭に思い描いて考えていた。高木が先ほど述べた誤りを犯していたのはそのような理由からだと思われる。この論文では後者の例, すなわち無限小を含む全順序体の例についても触れることにする。

2 実数の公理

I. 代数性の公理.

(1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ に対して, $a+b$ が定義できる。

(2) $a+b=b+a.$

(3) $(a+b)+c=a+(b+c).$

(4) $\exists 0 \in \mathbb{R}, a+0=0+a=a.$

(5) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists(-a) \in \mathbb{R}, a+(-a)=(-a)+a=0.$

(6) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ に対して, ab が定義できる。

(7) $ab=ba.$

(8) $(ab)c=a(bc).$

(9) $\exists 1 \in \mathbb{R}\ (1 \neq 0), a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$

(10) $\forall a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$

(11) $a(b+c)=ab+bc.$

II. 実数の順序性の公理.

(12) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ に対して, $a=b$, $a>b$, $a<b$ のどれか 1 つが成り立つ。

(13) $a<b$ かつ $b<c \Rightarrow a<c.$

III. 代数性と順序性を組み合わせた公理.

(14) $a<b \Rightarrow a+c<b+c.$

(15) $a<b$ かつ $c>0 \Rightarrow ac<bc.$

IV. 連続性の公理 (切断の公理).

(16) 実数 $\mathbb{R}$ が次の性質を満たす 2 つの集合 A, B に分かれるとする。(i)$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. (ii) $A \cup B = \mathbb{R}$. (iii) $\forall a \in A, \forall b \in B, a<b$. このとき, $\exists c \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \forall b \in B, a \leqq c \leqq b$ が成り立つ。

定義 1 上の I から III の公理を満たす集合を**全順序体**という。

ここからは全順序体を $\mathbb{F}$ で表す。

性質 0 (アルキメデスの性質) $\forall x \in \mathbb{F}, \exists n \in \mathbb{N}, n>x.$

定義 2 $\forall n \in \mathbb{N}, |h| < \dfrac{1}{n}$ をみたす $h \in \mathbb{F}$ を**無限小**という。

アルキメデスの性質は,「いくらでも大きな自然数が存在する」という当たり前のことをいっている性質のようにも思えるが, この性質は $\mathbb{F}$ が正の無限小を含まないということをいっている。

定義 3 無限小 $h > 0$ に対して, $\mathbb{R}(h)$, $\mathbb{R}((h))$ を次にように定義する。

$$\mathbb{R}(h) = \left\{ \frac{p(h)}{q(h)} \;\middle|\; p, q \text{ は } \mathbb{R} \text{ 係数多項式} \right\},\ \mathbb{R}((h)) = \left\{ \frac{p(h)}{q(h)} \;\middle|\; p, q \text{ は } \mathbb{R} \text{ 係数のベキ級数} \right\}$$

この 2 つの集合は全順序体である。

例 1 切断の公理を満たさない全順序体の例

(1) 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ について, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \text{ or } x < 0\}$, $B = \mathbb{Q} \backslash A$ とすると, これは切断点をもたない切断である。つまり, $\mathbb{Q}$ は切断の公理を満たさない。

(2) $\mathbb{R}(h)$ について, $A = \{x \in \mathbb{R}(h) \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \leqq nh\}$, $B = \mathbb{R}(h) \backslash A$ とすると, これは切断点をもたない切断である。なぜなら, 切断点 $\alpha \in \mathbb{R}(h)$ が存在したとすると, $\alpha - h \in A$ なので $\exists n \in \mathbb{N}$, $\alpha - h \leqq nh$ である。つまり $\alpha \leqq (n+1)h < (n+2)h$ であるが, $(n+2)h \in A$ なので $(n+2)h \leqq \alpha$ となる。これは矛盾する。つまり, $\mathbb{R}(h)$ は切断の公理を満たさない。$\mathbb{R}((h))$ についても同様である。

例 2 (1) $\mathbb{R}(h)$ はカントルの区間縮小の性質を満たさない。例えば, $a_n = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}h^n$, $b_n = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \cdots + \frac{2}{n!}h^n$ で定義された数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はカントルの区間縮小の性質の条件を満たす。しかしこれらの数列の極限は $e^h \notin \mathbb{R}(h)$ となるため, カントルの区間縮小の性質は満たさない。(厳密には証明が必要だが省略する。) 加えて, $\mathbb{R}(h)$ はコーシーの完備性も満たさない。なぜなら, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はコーシー列であるが, 収束しないからである。

(2) $\mathbb{R}((h))$ は, 無限級数で定義される数, 例えば e^h も含む。したがって, (1) の反例は作ることができないのでカントルの区間縮小の性質を満たす。(厳密には証明が必要だが省略する。) しかし, $\mathbb{R}((h))$ はアルキメデスの性質は満たさない。加えて, 例 1 (2) より $\mathbb{R}((h))$ は切断の公理を満たさない。

例 2 (2) は高木の主張の反例である。

5 連続関数に関する性質 (1)

定義 6 S が開集合であるとは, $\forall a \in S$, $\exists \varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset S$ となることである。

命題 2 切断の公理が成り立たないことと, 開集合の切断が存在することは同値である。

関数 f を次のように定義する。$f : [a, b] \to \mathbb{F} \quad (a, b \in \mathbb{F}, a < b)$.

定義 12 集合 $I \subset \mathbb{F}$ 上の関数 f が連続であるとは,

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |\, x - a \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon$$

が成り立つときをいう。

命題 5 切断の公理が成り立たないとする。 A, B を開集合の切断とする。このとき, $g, h : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ を連続関数とすると,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in A) \\ h(x) & (x \in B) \end{cases}$$

も連続関数である。

性質 10 (中間値の性質) f は $[a,b]$ で連続のとき, y を $f(a) \leqq y \leqq f(b)$ とすると, $y = f(c)$ となる $c \in [a,b]$ が存在する。

定理 12 性質 10 (中間値の性質) から切断の公理を導くことができる。

証明. 背理法を使って示す。切断の公理が成り立たないと仮定すると, 命題 2 より, 開集合の切断 (A, B) が存在する。よって, $A \neq \emptyset$ より $a \in A$ が存在し, $B \neq \emptyset$ より $b \in B$ が存在する。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [a,b] \cap A) \\ 1 & (x \in [a,b] \cap B) \end{cases} \tag{3}$$

とすると, 命題 5 より, f は $[a,b]$ で連続である。つまり, $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ である。性質 10 より, $f(c) = \dfrac{1}{2}$ となる $c \in [a,b]$ が存在する。しかし, $f(x)$ は, 0, 1 の値しかとらないので矛盾する。よって, 切断の公理が成り立つ。

6　連続関数に関する性質 (2)

定義 13 $\mathbb{F}$ が可算共終性をもつとは, $\exists\{\lambda_n\}$, $\forall x \in \mathbb{F}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n > x$ が成り立つことをいう。また $\{\lambda_n\}$ を共終列という。

性質 13 閉区間上連続な関数は有界である。

命題 6 $\mathbb{F}$ が切断の公理を満たさないならば, 開集合の切断 (A, B) と狭義単調増加数列 $\{a_n\}$ が存在して, $A = \{x \in \mathbb{F} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \leqq a_n\}$, $B = \mathbb{F} \backslash A$ となる。ただし, $\mathbb{F}$ がアルキメデスの性質をもつ場合, $\{a_n\}$ はコーシー列であり, $\mathbb{F}$ がアルキメデスの性質をもたない場合, 無限小 $h > 0$ に対して, $a_n = nh$ である。

定理 17 性質 13 と可算共終性から切断の公理を導くことができる。

証明. 切断の公理が成り立たないと仮定すると, 命題 6 より開集合の切断 (A, B) と狭義単調増加数列 $\{a_n\}$ が存在して, $A = \{x \in \mathbb{F} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \leqq a_n\}$, $B = \mathbb{F} \backslash A$ となる。$a \in A$, $b \in B$ とすると,

$$\text{関数 } f(x) = \begin{cases} \lambda_n + \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{a_{n+1} - a_n}(x - a_n) & (x \in [a_n, a_{n+1}]) \\ 0 & (x \in B \cap [a,b]) \end{cases} \tag{8}$$

は閉区間 $[a,b]$ 上連続である。しかしこの関数は有界ではないので矛盾する。

参考文献

[1] Holger Teismann, Toward a more complete list of completeness axioms, Amer. Math. Monthly **120** (2013), 99–114.

[2] 高木貞治「解析概論」改訂第 3 版　軽装版　岩波書店, 2004

[3] 吹田信之・新保経彦「理工系の微分積分学」学術図書出版社, 2004