

# 数学教育における一般化に焦点を当てた 発展的な考え方を促すための指導

## <修士論文要旨>

愛知教育大学大学院 教育学研究科

数学教育専攻 数学科教育学領域

渡 会 亮 介

### 論文構成

序章 研究の目的と方法	2.1 発展的な考え方を促す指導における指導方略とその分類
第1章 数学教育における発展的な考え方と一般化	2.2 一般化を促す指導における指導方略とその分類
1.1 全国学力・状況調査から見る発展的な考え方の課題	2.3 2つの指導方略群の特徴と類似性
1.2 発展的な考え方に関する先行研究	2.4 指導方略の枠組みの設定
1.2.1 先行研究の分類と発展的な考え方の定義	第3章 一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促す指導の枠組みと指導の可能性
1.2.2 分類した発展的な考え方の関係と焦点化	3.1 一般化における2つの認知プロセスに着目した指導の枠組み
1.3 一般化に関する先行研究	3.2 一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促す指導枠組みに基づく指導の可能性
1.4 発展的な考え方と一般化の関係	第4章 発展的な考え方を促す指導枠組みに基づいた指導事例
第2章 発展的な考え方を促す指導と一般化を促す指導の関係と指導の方向性	終章 本研究のまとめと今後の課題

### 序章 研究の目的と方法

中学校数学科の総括目標では、数学的活動が重視されるようになってきた。この数学的活動は、中学校学習指導要領において主に3つに分類されており、その中でも、本研究は「既習の数学を基にして数や図形の性質などを見だし発展させる活動」に着目する。「発展させる活動」における生徒の思考、いわゆる「発展的な考え方」は、数学を創造すると

いう意味で古くから重要な考え方として扱われてきた。

しかし、平成25年度の全国学力・状況調査の結果では、「発展的に考え、予想した事柄を説明することに課題がある」(p102)とされており、発展的に考え方を育てることについて未だに課題が残っていることが示唆されている。

現状として、そのような課題が残っているが、現在に至るまでに、その課題の克服に向けて取り組みが行われなかったわけではない。

過去の学習指導要領における数学科の目標に「発展的に考える」といった文言が掲げられ、その目標の達成に向けて様々な研究が行われてきた。しかし、「発展的な考え方」は、様々な捉え方があったが故に、その指導に関しても幅広い試みがなされてきたのが実状である。つまり、先行研究は、発展的な考え方の定義が人それぞれで異なっており、それぞれの定義に基づいて指導事例が考えられた研究で溢れている。以上の実情を踏まえ、本研究では、発展的な考え方を促すための指導の検討を試みることにする。

本研究では発展的な考え方を促す指導の提案のために一般化に着目した。なぜなら、一般化を、発展的な考え方の一部として捉えている先行研究もあり、また、近年、数学教育では一般化に関する理論的な研究が進展してきているからである。この理論的な研究が進んでいる一般化に着目することで、発展的な考え方を促す指導に新たな示唆が得られると考えた。

このように、本研究では近年の研究の進展が著しい一般化に着目し、そうした研究知見を踏まえて、発展的な考え方の捉え方の再考と先行研究の整理を図るとともに、一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促すための指導の提案を目的とするものである。

## 第1章 数学教育における発展的な考え方と一般化

### 1.1 全国学力・状況調査から見る発展的に考え方の課題

学習指導要領における数学科の総括目標の歴史的変遷を見てみると、昭和52年改訂以降の総括目標に発展という記述はないが、発展的な考え方やその態度を身に付けることは目標に含まれており、数学教育において古くか

ら発展的な考え方の育成は指導目標の一つであると捉えられる。

また、全国学力・状況調査の結果を分析し、生徒が発展的な考えることができない現状が明らかになった。

以上を踏まえて、発展的な考え方を育成するための指導の提案は、子どもたち自ら既習事項を発展させる困難を解決するための一つのアプローチとして意義のあることと考えられる。

### 1.2 発展的な考え方に関する先行研究

#### 1.2.1 先行研究の分類と発展的な考え方の定義

『日本数学教育学会誌（算数教育、数学教育）』の過去40年間の論文と、『数学教育論文発表会論文集』の過去20年間の論文を網羅的に収集し、発展的な考え方に相当する記述を整理・分類した。そして、本研究における発展的な考え方を「いくつかの事象に共通な性質から、統合、簡潔、明瞭などの観点を持って、D1～D4（D1条件変更，D2より広い範囲への適用，D3観点変更，D4統合）を考えること」と規定した。

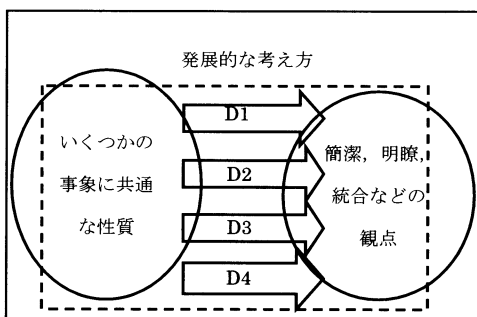


図 1.1 発展的な考え方の捉え方

#### 1.2.2 分類した発展的な考え方の関係と焦点化

同じ発展的な考え方として扱われていても、個々の考え方にはどのような違いがあるのか

を検討して、D1 から D4 の個々の考え方の実像を明らかにする。その方法として、D1 から D4 の個々の考え方を、場面・目的・方法の観点で検討した。そして、それぞれの関係性を検討すると、D2 より広い範囲への適用が、発展的な考え方の中で根幹となる考え方であると捉えた。

表 1.1 発展的な考え方の分類

	場面	目的	方法
D1	問題解決後	新たな性質 などを見出す	見出された性質 や定理の属性を 変更する
D2	問題解決時 問題解決後	きまりや性質の適用範囲を拡げる	条件の一部を 一般的なものへ 変更する
D3	問題解決後	よりよい解法を考える	要素や要素間の関係、解法などに着目する視点を 変える
D4	問題解決時 問題解決後	数学的なアイデアや知識のつながりを見いだす。	概念や形式を観点として一つに 統合する

### 1.3 一般化に関する先行研究

中原(1995)、Dörfler(1991)の先行研究を比較し、Dörfler(1991)の一般化モデルにおける内包的一般化と外延的一般化が一般化の思考や認知において重要な役割をしていることを明らかにした。そして、それらを一般化の重要なプロセスと捉え、本研究における G1 内

包的一般化と G2 外延的一般化を以下のように定義する。

*G1 内包的一般化…抽象された内包に一般的な構造を持つことを認知しようとする思考*

*G2 外延的一般化…見いだした不変な関係や形式の外延を拡げようとする思考。*

### 1.4 発展的な考え方と一般化の関係

今まで抽象的に定義されてきたり、事例によって示されたりしてきた発展的な考え方を、理論的により精緻に捉えるために、一般化との関連性を検討する。1.2 節で定義した発展的な考え方 D1 から D4 と、1.3 節で定義した一般化の認知プロセスにおいて重要な思考であると捉えた G1 内包的一般化と G2 外延的一般化の関係を検討した結果、図 1.2 のような関係があると規定した（実線は緊密な関係、点線はある程度関係があることを示す）。発展的な考え方を一般化の理論的な視座から見ると、一般化は発展的な考え方の多くを網羅する思考であることが明らかになった。

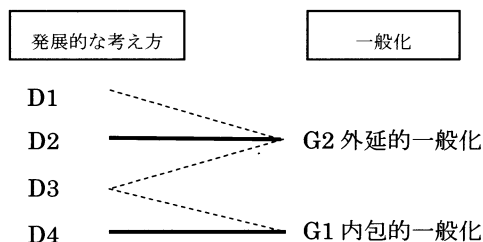


図 1.2 発展的な考え方と一般化の関係

## 第 2 章 発展的な考え方を促す指導と一般化を促す指導の関係と指導の方向性

第 1 章では、発展的な考え方と一般化の理論的な研究を比較することによって、考え方の関係は明らかになったが、検討してきた考え方を学習者がするための方法については未だ不明瞭である。そこで、第 2 章では発展的な考え方がなされるための指導方略について議論していくものとする。なお、第 1 章と同

様に、先行研究として『日本数学教育学会誌（算数教育、数学教育）』の過去 40 年間の論文と、『数学教育論文発表会論文集』の過去 20 年間の論文を網羅的に収集し、発展的な考え方や一般化の指導に関する記述を分類・整理した。

## 2.1 発展的な考え方を促す指導における指導方略とその分類

先行研究における発展的な考え方の指導が、D1 から D4 のどの思考を促す指導となり得るかを、事例を挙げながら分類した。

## 2.2 一般化を促す指導における指導方略とその分類

先行研究における一般化の指導方略が、G1 内包的一般化と G2 外延的一般化のどちらを促しているかを、事例を挙げながら分類した。

## 2.3 2つの指導方略群の特徴と類似性

発展的な考え方の指導方略と一般化の指導方略を検討し、それらに類似性があるならば、その類似性のある指導は発展的な考え方と一般化の両者を促す指導方略であり、本研究における指導の枠組みにおいて根幹的な役割を担う指導方略になると考えられる。

よって、2つの指導方略群の関係を明らかにするために、発展的な考え方 D1 から D4 までの指導が、G1 内包的一般化と G2 外延的一般化のどちらを促す指導となり得るか、また G1 内包的一般化と G2 外延的一般化の指導が、D1 から D4 の発展的な考え方を促すかを検討した。

## 2.4 指導方略の枠組みの設定

発展的な考え方と一般化の思考の関連性と、指導方略の関連性についての議論を踏まえて、指導方略の枠組みを設定する。1.4 節より、D1 条件変更と D2 より広い範囲への適用は、それぞれ G1 内包的一般化と関係がなく、D4

統合と G2 外延的一般化も関係がないとしたため、その枠は斜線を記す。また、D2 より広い範囲への適用と G2 外延的一般化、D4 統合と G1 内包的一般化については、それぞれの思考の様相は近いものがあり、ほとんど同義の思考であるとしてきた。したがって、一般化の観点から見たとき D2-G2 の枠は外延的一般化そのものであり、D4-G1 の枠は内包的一般化そのものであるため、一般化の認知プロセスにおいて必要不可欠な思考にあたるため、太枠で表した。そして、それぞれの枠に指導方略を配置して枠組みを構成した(表 2.1 では指導方略を省略)。

表 2.1 指導方略の枠組み

	G1 内包的一般化	G2 外延的一般化
D1		D1-G2
D2		D2-G2
D3	D3-G1	D3-G2
D4	D4-G1	

## 第3章 一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促す指導の枠組みと指導の可能性

2章に至るまでに、発展的な考え方と一般化の関係性について検討し、それらを踏まえて指導方略の枠組みを構成した。これまでの思考の関係や指導方略の関係の議論を踏まえて、本章では一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促す指導の枠組みの提案を試みる。

### 3.1 一般化における2つの認知プロセスに着目した指導の枠組み

Dörfler(1991)の一般化の認知過程には、内包的一般化と外延的一般化の2つの思考プロセスが存在する。これら2つの思考プロセスが、一般化において重要な思考であると捉えてきた。つまり、極端なことを言えば、(D4-G1)と(D2-G2)の指導方略を用いれば、直接的に

G1内包的一般化とG2外延的一般化を促し一般化がなされ、数学的概念や知識の認識がなされると考えられる。(D2-G2)と(D4-G1)以外の指導は、必ずしも一般化に直結するとは限らないが、(D2-G2)と(D4-G1)の指導と組み合わせることで、より上位の一般化につながる事が考えられる。したがって、一般化と関係の深い(D4-G1)と(D2-G2)を必須の指導として、他の指導と組み合わせた指導のパターンを考える。

表 2.1 の指導方略の枠組みを見てみると、G1内包的一般化だけの指導を考えたとき、(D4-G1)が必ず含まれるものとする、(D4-G1)と(D3-G1,D4-G1)の2パターンある。また、外延的一般化だけで指導を考えたとき、(D2-G2)が必ず含まれるものとする、(D2-G2)、(D1-G2,D2-G2)、(D2-G2,D3-G2)、(D1-G2,D2-G2,D3-G2)の計4パターンある。そして一般化はG1内包的一般化とG2外延的一般化の両方が作用する思考であるため、指導の組み合わせとしては $2 \times 4$ の8パターンあることが理論上あることが分かる。

G1内包的一般化とG2外延的一般化の順序性を考えると16パターンの指導法が考えられ、また指導方法の順序性まで考慮すると膨大な指導パターンが考えられる。本研究では、Dörfler(1991)の一般化モデルを参考にし、一般化の認知プロセスは外延的一般化から内包的一般化へ順序で行われるものと捉え、G1内包的一般化とG2外延的一般化の順序については考えることはせず、8パターンの指導を枠組みとして扱うこととする。

この8パターンの指導について、(D4-G1)を含む指導をTX、(D3-G1,D4-G1)を含む指導をTYと記号で表すことにする。そして、G2外延的一般化の(D2-G2)、(D1-G2,D2-G2)、

(D2-G2,D3-G2)、(D1-G2,D2-G2,D3-G2)の指導方略を1から4の番号で表すことにする。

TX<sub>1</sub>からTX<sub>4</sub>、TY<sub>1</sub>からTY<sub>4</sub>までの8パターンを指導の枠組みとして扱うこととする。

表 3.1 発展的な考え方を促す指導枠組み

外 \ 内	D4-G1	D3-G1,D4-G1
D2-G2	TX <sub>1</sub>	TY <sub>1</sub>
D1-G2,D2-G2	TX <sub>2</sub>	TY <sub>2</sub>
D2-G2,D3-G2	TX <sub>3</sub>	TY <sub>3</sub>
D1-G2,D2-G2, D3-G2	TX <sub>4</sub>	TY <sub>4</sub>

### 3.2 一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促す指導枠組みに基づく指導の可能性

本節においては、3.1節の指導枠組みの実現可能性を検討する。事例は、中学校数学内容の領域のものを扱うこととする。そこで、本節における事例として「連続する10個の自然数の和」を扱う。この事例を扱う理由として、まず教科書の文字式の利用の発展問題として扱われているため、中学校数学の内容でも解決ができることと、項数、初項、公差などの属性に着目することで様々な発展可能性が考えられるからである。この事例を用いて、指導枠組みに沿って指導の可能性を検討する。

### 第4章 発展的な考え方を促す指導枠組みに基づいた指導事例

一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促す指導の枠組みに基に、発展的な考え方を促すための指導計画を提案することとする。単元は中学校2年生の「文字式の利用」の指導計画を提案する。

### 終章 本研究のまとめと今後の課題

本研究では、先行研究を分類・整理し、曖昧に定義されてきた発展的な考え方の実像を明らかにし、その発展的な考え方の中でも、

特に一般化に焦点を当てて研究を進めてきた。一般化は、発展的な考え方に比べると理論的な研究が進んでおり、本研究では

Dörfler(1991)の認識論的な視座からの研究を参考にし、認識過程における内包的一般化と外延的一般化の2つの思考に着目した。そして、発展的な考え方とG1内包的一般化・G2外延的一般化の関係を検討し、発展的な考え方を促すための指導を提案した。

まとめとして、一般化の認知プロセスに沿って、指導を考えることで、結果的に発展的な考え方を促す指導ができる示唆を得られた。

今後の課題として、第3章で提案した指導の枠組みが、他の内容や領域において適用可能であるかの検討と、個々の指導方略をより精緻に分析し、広範な指導の枠組みを構成する必要がある。

#### 主要引用・参考文献

永田潤一郎(2012).『数学的活動をつくる』.

東洋館出版社

ポリア,G.(1959).『数学における発見はいかに

なされるか1 帰納と類比』.柴垣和三雄

(訳).丸善.(Polya,G.(1954). *Mathematics*

*and plausible reasoning: Vol. I*

*Induction and analogy in mathematics.*

*Princeton. NJ: Princeton University*

Press)

中島健三(1981).『算数・数学教育と数学的な

考え方』.金子書房.

片桐重男(1988).『数学的な考え方の具体化』.

明治図書.

阿部浩一・出石隆・大野清四郎・古藤怜・中

野昇(1978).『新・中学校数学指導講座』.

金子書房.

S.I.Brown&M.I.Walter,平林監訳(1990)『いか

にして問題をつくるか』.東洋館.

中原忠男(1995).『算数・数学教育における構  
成的アプローチの研究』.聖文社.

Dörfler,W.(1991).Forms and means of

generalization in Mathematics. In A. J.

Bishop,S.Mellin-Olsen & J.v.Dormolen

(Eds), *Mathematical Knowledge: Its*

*Growth Through Teaching*(pp.63-85).

Dordrecht,Netherlands: Kluwer.

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』.

ミネルヴァ書房.

友定章子・姫田恭江・溝口達也(2006).「授業

設計における一般化と拡張を志向した算

数的活動の構成の様相」.『鳥取大学数

学教育研究』,9(1),1-10