イプシロン　2013.Vol.55, 139 - 144

算数教育における意味的理解のための個別指導の研究

＜修士論文要旨＞

愛知教育大学数学教育学専攻数学教育学領域
中　村　　仁

本稿では、小中学生の算数、数学力養成の場面である学校の授業、家庭学習のうち、家庭学習に焦点をあてる。意味的な理解を伴った家庭学習の実現をはかるため、岡部恒治（2005～2007）『トレーニングペーパー算数、数学大好き』. Newton社. を利用して、意味的な理解を伴った学校以外の教場での算数、数学教育の実践をする。そして意味的な理解とは何かを先行研究から分析、認知する。

第１章　算数教育における意味的理解の現状では、平成20年８月小学校学習指導要領より意味的理解を以下のように捉えた。

平成20年８月　小学校学習指導要領解説算数編ｐ３～ｐ５に算数科改訂の基本方針が、中央教育審議会の答申をうけて、算数科改訂の基本方針を示している。

中央教育審議会の答申をうけ、答申自体またはそれを受けた基本方針に意味を理解するという記述がある。また、それをうけたｐ22～27の学年の目標においても記述がある。

さらに、内容に於いては、より多くの意味、理解を含んでいる記述がある。

この「意味を理解する」ということを、「意味的理解」と呼ぶことにする。

また、2.1小学校教育課程実施状況調査（国立教育政策研究所教育課程センター，　2003ａ）及び2.2中学校教育課程実施状況調査（国立教育政策研究所教育課程センター，　2003ｂ）より、「乗法、除法を加法、減法より先に計算する」という四則混合計算のルールが十分に定着していないこと、小数の掛け算の意味の理解が不十分で、文章で表された状況を読んで答えを求めるのに必要な演算を決定することが難しいということ、円周が直径の3.14倍であるということ（つまり円周率）の理解が不十分であること、円周が直径に比例するということの理解も十分でないこと、掛け算のほうが割り算よりも計算の答えが（いつも）大きくなるという誤った判断が分数の乗除を学習しても依然として強いこと、中学校で正の数・負の数を学習して数の概念を拡張しても文字式５＋ａのａに正の数しか代入しようとしない傾向があること、５＋ａが負の数になるようなａの値が１つでもあればその考えは正しくないと判断する論理が十分に身についていないということ、七角形を内部の点と各頂点を結ぶ線で７つの三角形に分けたとき、内部の点の７つの角の和360°をひく必要があるということを40％あまりの生徒が理解できないと推測され、結果⑵、内角の和を求める考え方と式を書くことが十分でなく、約30％の生徒がこれらの問いに解答していないという実

態をとらえた。

第２章　算数・数学教育における理解に関する先行研究に於いては、第１節　理解論争（理解論争にみられる理解研究の概観）では、Richard R. Skemp（イギリス）の理解に関する論文（1976）を契機に活発になった算数・数学教育における「理解論争」時期（1974～1994）にみられる数学的理解に関する研究を概観した。

また、Richard R.Skemp の理解研究を再度取り上げて、算数・数学教育における数学的理解のモデルとして注目される Skemp の「マトリックスモデル」をとりあげて、特徴や背後にある基本的な考え方などを明らかにした。Skemp（1982）の「２×４マトリックスモデル」は、数学的理解の種類と心的活動の様式の２つに着目して数学的理解を明らかにしようとしている点が、その特徴である。数学的理解には用具的理解、関係的理解、論理的理解、記号的理解の４種類があり、心的活動の様式の観点からそれら各々に直観的様式と反省的様式の２つが考えられるということを提案しているのである。2.2. ではスケンプの言う関係的理解が意味的理解に当たると考えた。

2.1. ⑴「関係的理解」と「用具的理解」

理解の研究が算数・数学教育の研究として一般に広く注目されるようになったのは、Richard R.Skemp（1976）の「関係的理解と用具的理解」という論文が契機である。ノルウェーBergen 大学の Stieg Mellin Olsen が理解という言葉には２通りの使われ方があって、一方を「関係的理解」、他方を「用具的理解」と呼んで区別していることを Skemp が知ったことにあるようだ。「関係的理解」と「用具的理解」の区別は、言い換えれば「わかる」と「できる」の区別である。この違いを Skemp は以下のように挙げている。「長方形の面積Ａ＝Ｌ（縦の長さ）×Ｂ（横の長さ）で求められる」という理由で説明する。面積Ａを求めるためには２辺の長さＬとＢをかければよいということと、なぜかければよいかその理由が「わかる」ことを「関係的理解」という。一方で、その理由はわからないけれども、とにかく面積を求める公式をあてはめることによって面積を求めることが「できる」のが、「用具的理解」である。理解という言葉を当然に「関係的理解」をさすものととらえていた Skemp は、多くの児童・生徒のみならず現場教師までもが理解を「用具的理解」として用いていることに驚嘆したという。

同じ算数・数学教育という状況下で、同じ言葉が全く異なった意味を持つということは、当然混乱を招く。Skemp（1976）は算数・数学教育においてこのような言葉として「理解」と「数学」を挙げ、これらの言葉に全く異なった意味が与えられていることが、

算数・数学教育の難しさの根源であると考えている。

Skemp は、算数・数学教育において「理解」という言葉が「関係的理解」と「用具的理解」という異なった意味をもつとしたら、児童・生徒と教師の間に以下のような不整合が生じるとしている。

⑴　数学を用具的に理解することを目的としている児童・生徒が、関係的に理解させたいと思っている教師に教えられる場合。

⑵　数学を関係的に理解することを目的としている児童・生徒が、用具的に理解させたいと思っている教師に教えられる場合。

⑴の場合、児童・生徒にとってはほとんど問題にならないと小山（2010）は言っているが、

正解を出すこと、用具的に使うことのみに価値を見ている児童・生徒にとって、関係的理解を促すための教師の解説は、無駄な無意味なものにみえている。用具的理解に価値を置いているのは、数学が苦手な児童・生徒よりも、数学における単純作業を得手とする児童・生徒に多くみられる。そして、平均的な中学校現場では児童が小学校以来慣れている用具的理解から、内容的理解への意識変革が難題となっている。

小山が、「教師には欲求不満を起こさせるであろう。」としているが、数学教育の現場は、常にこの課題との戦いである。教師がいくら注意深く説明したとしても、児童・生徒は正答を求めるためのある種のルールであって、その他のことは無視してしまうのである。

⑵の場合は⑴ほど多くないであろうと小山はしているが、実はそこがそうではないと感じる。少なくとも、「答えが出ればよい。」という意識が殆どの小学生の意識の中に厳然と醸成されている事実がある。「こうすればよい。」という授業に対して、児童・生徒は算数・数学する機会を逸している。「答えが出ればよい。」という意識が殆どの小学生の意識の中に厳然と醸成されている事実から鑑みるに、著者は小学校現場や学習塾などにおいて、理解を用具的理解としかとらえていない教師によって授業が行われていると予想している。児童・生徒が、「どうして？」と関係的な説明を求めることは、上記の関係的理解に価値をみない児童同様受け入れられないのである。このように、「理解」という言葉が全く異なる意味を持つことによって生ずる算数、数学教育の問題が指摘されている。これに関連して、Skemp はより深刻な問題として「数学」という同じ名のもとで、関係的数学と用具的数学という異なった教科が教えられている可能性を危惧している。Skemp（1976）は用具的数学より関係的数学を暗黙に重視して、それぞれの利点を対比することで、関係的数学重視の見解を正当化している。

⑴ 用具的数学（用具的理解）の利点

①容易に理解できる。

②その利益が速くはっきりと現れる。

③関係的思考より用具的思考のほうが少しの知識で済むので、より速く信頼出来そうな正答を得る場合がしばしばある。

⑵ 関係的数学（関係的理解）の利点

①関係的数学は新しい課題に対して適応されやすい。

②関係的理解によって簡単に記憶することが出来る。

③関係的知識はそれ自体有効な目標となりうる。

④関係的シェマ（認知システムを構成する諸要素）は質的に組織的である。

2.2. 意味的理解とスケンプの理解研究との関連

ここで、意味を理解する「意味的理解」は、スケンプの言うどの理解に当たるのか。

当然、関係的理解がそれに当たると考えられる。用具的理解はさしずめこうすればよいといったやり方が分かることであろう。論理的理解とは、演繹的な証明を指し、記号的理解はある記号体系と概念構造を、その概念構造に支えられて同化することである。

第２節　割合指導の現状と先行研究では 1.1. 割合指導の現状と課題において、平成 19, 20, 21 年度の全国学力学習状況調査の

３回の国立教育政策研究所による調査結果によって、小学校算数では与えられた複数の条件を整理して、全ての条件を満たす結論を導き出すことに課題があり、中学校数学では日常的な事柄を、一次関数の問題としてとらえ、判断する方法を数学的な表現を用いて説明することに課題があることを捉えた。

1.1. 割合指導の現状と課題

国立教育政策研究所は、平成 19 年度、20 年度、21 年度の全国学力学習状況調査の３回の調査結果によると、小学校算数では「与えられた複数の条件を整理して、全ての条件を満たす結論を導き出すことに課題がある。」としている。そして、19 年度Ｂ④「情報の分類整理と問題解決（ケーキ）」（１）の百分率を用いて作式する問題は正答率が 29.5%、20 年度Ｂ②「情報の選択の考え方（農業）」（３）示された考え方が正しいかどうかを割合の考えを用いて評価し、その理由を数学的に表現する問題では 17.6%、２１年度Ｂ⑤「資料の数学的な判断と根拠の説明（リサイクル）」（３）示されたグラフの特徴を理解して、割合の大小を判断し、その理由を数学的に表現する問題では 17.9%である。

これらの正答率の極端に低い問題に関する作式には、割合の考えを用いる必要があり、割合の考えを用いた比較対照能力の欠如が与えられた複数の条件を整理して、全ての条件を満たす結論を導き出すことに大きな障害になっていると筆者は予想する。

また、同調査の中学校数学では「日常的な事柄を、一次関数の問題としてとらえ、判断する方法を数学的な表現を用いて説明することに課題がある。」としており、19 年度Ｂ⑤「事象の数学的解決と問題解決の方法（水温の変化）」（３）一次関数のグラフに示されていない水温に対応する時間の求め方についてその方法を説明するでは正答率が 40.2%、20 年度Ｂ⑤事象の理想化･単純化（富士山の気温）（３）高さが高くなるのに伴って気温が下がることを示す一次関数のグラフから、データでは与えられていない標高に対する気温の求め方について説明するでは 13.3%、21 年度Ｂ③事象の数学的な解釈と問題解決の方法（電球形蛍光灯のよさ）（３）電球形蛍光灯と白熱電球との総費用を示す一次関数のグラフから、両者が等しくなる時間を求める方法を説明するでは、19.9%と何れも低い正答率である。そして、表１にも表したとおり、一次関数の考えは、割合から始まる比較対照指導の継続単元なのである。数学的リテラシーという言葉が、近年多用されているが、説明能力の不足だけでなく、関係・関数の理解不足という側面がはっきりと表れている調査結果であると筆者には思えてならない。よって、その検証のため、２１年度小学校Ｂ⑤「資料の数学的な判断と根拠の説明（リサイクル）」（３）をより詳細にとりあげる。

設問（１）の正答率は、82.1%である。４月に集めたペットボトルの質量 20kg の読み取りは、相当数が問題なく出来ている。

設問（２）の正答率は、72.9%で、３と解答している者が、18.5%もいる。空き瓶の質量をよみとるだけだが、27%もの児童が対応できていない。

設問（３）の正答率は、17.9%である。基準量が４月は 80kg、６月は 100kg、比較量が 20kg で保持されている場合の割合（歩合）の大小を比較して、選択肢を選び、理由を説明する問題である。正答の選択肢１を選んでいる者

が、そもそも31.1%しかいない。そして、基準量と比較量のみを書いていて、割合を出していない3.3%をも正答に含めており、正味の正答率は14.7%であるといえる。

啓林館、わくわく算数5年下巻（H20年度用）の39ページに「比べ方を考えよう」と題して、割合が現れる。平成20年3月告示の小学校学習指導要領の第5学年の目標には「異種の2量の割合について理解する。」とあり、現在よりも広義に単位量当たりの大きさも割合として見ていることが窺える。同指導要領の内容、数量関係には「数量の関係を表す式についての理解を深め、簡単な式で著されている関係について、二つの数量の対応や変わり方に着目できるようにする。」「百分率について理解できるようにする。」量と測定においても、「異種の2量の割合としてとらえる数量について、その比べ方、表し方を理解すること。」「単位量当たりの大きさについて知ること。」と併せて記述されている。よって「単位量当たりの大きさ」として小学6年に於いて現在扱われている単元は5年時に移動する。

啓林館の同教科書では、割合をある量をもとにして、比べる量がもとにする量の何倍にあたるかを表した数と定義しているが、同教科書小6上では、単位量当たりの大きさを使うことでこみぐあいがわかることが文脈からとらえられるのみである。東京書籍新しい算数5年下（H20年度用）においては、割合を比べる量がもとにする量に対してどれだけにあたるかを表した数としており、単位量あたりの大きさを1㎡あたりの平均の人数や一人当たりの平均の面積のようにして表した大きさとしている。

平林は授業の区分の観点をアスペクトと呼び、1．技能の練習、2．理解、3．問題解決、4．問題設定と区分している。そして学習指導要領は、1，2の二つの相のみ規定しているにすぎないとしており、3，4の相については教師の自主性と技量にほぼ全面的にまかされているとしている。しかし平林は2の理解の相をとらえることが最も疎かになりやすいとし、その理由を「理解は人間の内面的現象であって、他諸相のようにそれほどはっきりとした顕在化を伴わないからであろうと思われる。」としている。言い換えれば、スケンプの3つの理解・用具的理解、・関係的理解、・形式的理解の峻別と、関係的理解、形式的理解を教師が計ることが出来ていないということであろう。

まさに、割合の指導は関係的理解中心の指導であり、くらべる量＝割合×もとにする量といった用具的理解に事足りる物ではない。国立教育政策研究所による平成15年度小・中学校教育課程実地調査の教師質問紙調査によると、教師質問用紙設問3（13）百分率（パーセント）に対して、児童にとって理解し易い29.6%、児童にとって理解しにくい54.5%無回答15.8%となっており、同設問の児童質問用紙の良く分かった74.2%、よくわからなかった15.2%、無回答10.5%と比べて極めておおきな開きがある。しかし、これは小学校教師の半数以上が、小5割合単元における児童の意味的な理解の困難さを認識している表れでもあり、児童の多くが1＝100%などの用具的理解に留まっているからこその「良く分かった。」なのであろうと筆者は考える。しかしここには大きな可能性を見出すことが出来る。

教師の多くは、なにかしらぼんやりしたものではあるが、児童に数学的な関係的理解の

必要性を感じているのである。なにか割合指導の不足を感じているのである。

児童が割合を関係的に理解することが目的である。そこで、「割合とはなにか。」ということを教師自身が深く認識すべきものを提言し、その認知を基として教師が重要性を体得して、使命感を持って教授することが肝要である。

２．先行研究による割合の認知（１）割合自体をどうみるべきかでは、広義に割合を比や比の値、歩合、単位量当たりの大きさなども含んだものと考えるべきとした。（２）広義の割合に対応する教科書における内容では、広義に割合をとらえたときの現行の啓林館（平成20年度用）の教科書において、どの単元が割合指導に当たるものなのかを検討した。

第３章　意味的理解のための指導では、1.「関数の考え」とその創造的な活用において：中島健三（1981）及び２．数学的理解の２軸過程モデルの研究：小山（2007）から、意味的理解につながる要素を拾い上げ、３．意味的理解の困難において、関数の考え：中島（1981）などを用いて合理的に進められる例をあげて、数学的理解の２軸過程モデル：小山（2007）の思考水準と学習段階の上昇の有機的な関係が、意味的理解のひとつである。とした。

第４章　具体的な個別指導では、第１節トレーニングペーパーの内容で１．１　割り算の導入（小３）、１．２　割合（小５）について、指導要領、教科書との対応および内容についてまとめた。

第５章　実践例の分析と考察では、筆者自身が愛知県で運営するニュートン・マスクラブ安城教室について、教室及び小３、小６の２名の児童について経緯をのべた。文章をそのまま式にするということを励行させ、小３の児童の中学校入試テキストに対した国語能力の未熟さをカバーさせていること、式になったものが、最も分かりやすい情報であることをとらえさせることをしていることを示した。また、小６の児童の躓きとその克服を例示して、整数の範囲では出来ていた作式が、分数の範囲に拡張されたとたん、訳のわからない式をつくりだす。形式をとらえられなくなり、ただそこにある数を無作為に並べて作式するからである。分数を整数と同様な量としてきっちりと見ることが出来ないことが原因である。これに対する方策は、「分数の範囲の問題を整数の範囲で、形式が全く同じものと対比させて、作式の経験を積ませること」である。一朝一夕には行かないが、根気強い指導で作式能力は必ず付く。比の第３用法などの逆思考的な考えを要するものも、児童の作式を阻む。これに対する方策は、「□を利用して、順思考で、文章をそのまま四則の式に変換させること」である。逆思考的に考えることは、代数を置くことで容易に避けられ、そのこと自体は「数学的思考の対象（数学的対象―対象間の関係―関係の一般性)」や「数学的思考の質（直観的思考―反省的思考―分析的思考)」という意味的理解の２つの構成要素を全く害しない。と結論付けた。

終章では、「平均レベルの、直観的思考に留まりがちな児童に対して、個別指導手法によって、クラス授業では図ることが難しい思考の質の向上を図れたことは本研究の成果である。