

# 三角比の指導に関する研究

## <修士論文要旨>

愛知教育大学 大学院 教育学研究科  
数学教育専攻 数学科教育学領域

小 澤 陵

### 0. 論文構成

|     |                  |
|-----|------------------|
| 序 章 | 本研究の目的と論文の構成     |
| 第1章 | 三角比の指導に関する現状と課題  |
| 第1節 | 三角比の指導の現状        |
| 第2節 | 現行の三角比指導の課題      |
| 第3節 | 三角比の指導に関する先行研究   |
| 第2章 | 三角比とその指導に関する史的考察 |
| 第1節 | 測量と三角比           |
| 第2節 | 三角測量の起源          |
| 第3節 | 戦後の三角比指導の変遷      |
| 第3章 | 三角比を学習する意義       |
| 第1節 | 学習指導要領における目標と課題  |
| 第2節 | 三角比を学習する意義       |
| 第4章 | 三角比の教材と指導について    |
| 第1節 | 三角比の指導の教材        |
| 第2節 | 指導案              |
| 終 章 | 研究の成果と今後の課題      |
| 第1節 | 研究の成果            |
| 第2節 | 今後の課題            |

## 1. 本研究の目的

平成17年度実施の教育課程実施状況調査（高等学校）では、「数学Ⅰ」の分析において、図形と計量の領域で出題された11題すべての通過率が設定通過率を下回ると考えられ、11問中9問は無回答率が20%を超えている。これは「数学Ⅰ」の他の単元と比べても芳しくない数字であり、指導に問題があると考えられる。

平成21年改訂の高等学校学習指導要領では、数学における必修科目は「数学Ⅰ」のみである。高等学校の進学率が97%を超え、ほぼ全員が進学し、ほぼ全員が履修することになる「数学Ⅰ」において、とりわけ「三角比」の単元においてどのような指導の現状がありどのような問題が内在しているのか。これを明確化し、指導のあり方を考察することを本研究の目的とする。

## 2. 三角比の指導の現状と課題

平成18年度改訂の数学Ⅰ（数検出版）の教科書を参考に、現行の三角比の指導の流れは以下の通りである。

|                 |
|-----------------|
| 図形と計量           |
| 第1節 三角比         |
| 1. 正接・正弦・余弦     |
| 2. 三角比の相互関係     |
| 3. 三角比の拡張       |
| 問 題             |
| 第2節 正弦定理と余弦定理   |
| 4. 正弦定理         |
| 5. 余弦定理         |
| 6. 正弦定理と余弦定理の応用 |
| 問 題             |
| 第3節 図形の計量       |
| 7. 三角形の面積       |
| 発展 ヘロンの公式       |
| 8. 球の体積と表面積     |
| 9. 相似と計量        |
| 問 題             |

第1節三角比では、直角三角形の鋭角を定めたときの2辺の比を三角比として導入する。さらにそれらの相互関係に触れる。その後、鈍角への拡張となる。そこでは、座標平面上で三角比が再定義される。続いて、再定義された三角比の相互関係が導かれる。

第2節正弦定理と余弦定理では、一般の三角形の辺と角、外接円の関係として正弦定理、余弦定理を扱う。さらにそれらの応用として、三角形の辺と角の決定について扱う。ここでは、測量として、実際の距離や高さといった長さを図るような問題場面も登場する。30° や 45° といった、特殊角に限らず、三角比表から値を用いて具体的な距離を求める。

第3節図形の計量では、高さや斜辺と正弦の積が等しいことを用いて三角形の面積の公式を導く。また空間図形への応用も取り扱う。球の表面積や体積、相似な立体の性質まで扱い、面積比、体積比を学習して単元を終了する。

平成17年度教育課程実施状況調査の数学Iの単元別通過率を分析したものが下に示した表である。

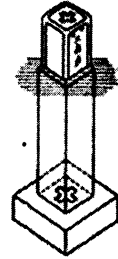
|         | 問題数 | 上回ると考えられるもの | 同程度と考えられるもの | 下回ると考えられるもの |
|---------|-----|-------------|-------------|-------------|
| 方程式と不等式 | 16  | 3 <18.8%>   | 5 <31.3%>   | 8 <50.0%>   |
| 二次関数    | 9   | 0 <0.0%>    | 3 <33.3%>   | 6 <66.7%>   |
| 図形と計量   | 11  | 0 <0.0%>    | 0 <0.0%>    | 11 <100.0%> |
| 合計      | 36  | 3 <8.3%>    | 8 <22.2%>   | 25 <69.4%>  |

通過率が設定通過率を上回るまたは同程度と考えられる問題は36問中11問で、全体の約3分の1であった。中でも、「図形と計量」において、出題した11問すべての通過率が設定通過率を下回ると考えられ、11問中9問は無回答率が20%を超えているという結果であった。三角比の理解をみる問題の通過率は、50~60%であり、三角比の相互関係に関する問題の通過率は約45%、鈍角の三角比の理解をみる問題の通過率は約35%であった。さらに、正弦定理が成り立つことを証明する問題は前回(平成14年度実施)と同一の問題であるが、正答率は23.7%、無回答率は63.7%で、17年度実施の調査の全問題中、最も通過率が低く最も無回答率が高い問題であった。

以上のように、数学Iの単元で見ると、図形と計量の単元は特に理解の状況が芳しくないことがうかがえる。

3. 三角測量の起源

5万分の1地形図を広げたときにある正三角形の真ん中に三角形の中に点があるような記号がある。これが三角点というものである。一枚の地図に50個ほどあって、これらがある規則をもって配列されているわけである。これら三角点を結びつけると三角網ができるわけである。

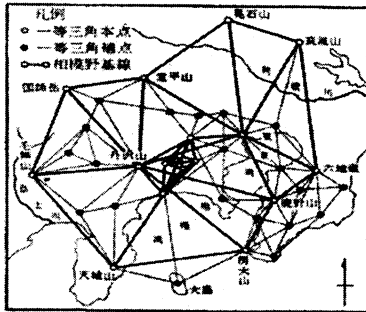


三角点と三角点との距離は大体4kmである。この4km間隔ではりめぐらされた網の目を三等三角網という。他に一等三角点、二等三角点というものがある。その一等三角点は、さらに本点と補点とに区別されていて、本点は約40kmの間隔でおかれている。したがって、一等三角点だけをつなぐと40kmくらいの目の網ができるわけである。補点は本点含めて20kmくらいの網目であり、二等三角点は一等本点、補点を含めて約8kmの間隔でおいてある。これからそれぞれ20kmの目、8kmの目の網ができる。これらの網をそれぞれ一等三角網、二等三角網とっている。

三角点に関するこれらのことを表示すると次のようになる

| 等級<br>区分 | 基線<br>三角網   | 一等<br>三角本点                 | 一等<br>三角補点                 | 二等<br>三角点                        | 三等<br>三角点 | 四等<br>三角点                |
|----------|-------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------------|-----------|--------------------------|
| 平均辺長     | 基線<br>3~8km | 45km                       | 25km                       | 8km                              | 4km       | 2km                      |
| 密度       |             | 1600km <sup>2</sup><br>に1点 | 1600km <sup>2</sup><br>に2点 | 三等三角点以上を通じて16km <sup>2</sup> に2点 |           | 16km <sup>2</sup><br>に1点 |
| 頂角       | >33.5°      | なるべく<br>60°                | 30° 以上                     |                                  | 25° 以上    |                          |

下図は明治 15 年に作られた、いわゆる相模野基線（神奈川県下溝村と座間村の間 52099697m）をもとにして作られた、関東付近の一等三角網と基本三角網を示したものである。



これをみると三角点は山の頂のような見通しがきく場所が選ばれることはもちろんのこと、それらが正三角形に近いように選ばれていることがわかる。正三角形に近い程観測誤差の影響を受けることが少ないからである。地図を作る際は、基線の位置を 200km くらいの間隔で設置し、誤差を限りなく少なくすることに成功している。

#### 4. 戦後の三角比指導の変遷

戦後の三角比指導の変遷については、下記表の通りである。

| 指導年度            | 科目    | 必・選 | タイトル        |
|-----------------|-------|-----|-------------|
| I 1951 (S26～)   | 中 3   | 必修  | 計量 (鋭角の三角比) |
|                 | 解析 I  | 選択  | 関数の概念を用いること |
|                 | 解析 II | 選択  | 三角関数を用いること  |
| II 1958 (S33～)  | 中 3   | 必修  | 計量 (鋭角の三角比) |
|                 | 数学 I  | 必修  | 関数とそのグラフ    |
|                 | 数学 II | 選択  | 三角関数とベクトル   |
|                 | B     |     |             |
| III 1973 (S48～) | 数学 I  | 必修  | 解析・三角関数     |
| IV 1982 (S57～)  | 数学 I  | 必修  | 図形・三角比      |
| V 1992 (H4～)    | 数学 I  | 必修  | 図形と計量       |
| VI 2003 (H15～)  | 数学 I  | 必修  | 図形と計量       |

また、現行の三角比の指導内容である「鋭角の三角比」「鈍角の三角比」「正弦定理・余弦定理等」をどの学年で学習するかについて上の区分にしたがってまとめると下図のようになる。

|   | 鋭角の三角比 | 鈍角の三角比  | 正弦定理・余弦定理等 |
|---|--------|---------|------------|
| I | 中3     | 解析Ⅰ（幾何） | 解析Ⅱ、幾何     |
| Ⅱ | 中3     | 数学Ⅰ     | 数学ⅡB       |
| Ⅲ | 数学Ⅰ    |         |            |
| Ⅳ | 数学Ⅰ    |         |            |
| V | 数学Ⅰ    |         |            |
| Ⅵ | 数学Ⅰ    |         |            |

各時代の教科書の分析からⅠ～Ⅱ期においては、とりわけ測量を重視している傾向が強く、問題のほとんどは測量の場面を扱ったものであった。それに対しⅢ期では、関数的要素が強く、早い段階から一般角にまで拡張し周期性に関する内容に重点を置いていた。それがⅣ期以降になると現行の指導内容とほぼ同じとなっていく。

### 5. 三角比を学習する意義

これまでの三角比の現状や先行研究、学習指導要領における目標などから、今日の三角比を学習する意義は何であるのか。

筆者は高校生が三角比を必修科目「数学Ⅰ」の中で学ぶ意義について、これまでの事柄から、大きく2つ、挙げることにした。

1. これまで求めることのできなかつた三角形の辺の長さや角の大きさ等を求めることができるようになる。
2. 昔から地図の設計や距離等を求める際に使われてきた測量の考えがどのようなものであるかを知ること

1について、これまで求めることのできなかつた辺の長さや角の大きさを求めることができることについて、第2章の戦後の三角比指導の変遷において述べた通り、1970年代では関数に学習の重点が置かれてきた。1970年告示の学習指導要領には、三角比に関連するものとして、次の記述がある。

「正弦、余弦および正接の意味を理解させ、三角形の辺と角の間の基本的な関

係を考察できるようにする。また、三角関数の意味とその周期性を理解させる。」この記述からも、そのねらいが関数の学習にあることが読み取れる。その一方で、現行の学習指導要領では、その記述から、三角比の学習のねらいが「関数」と明確に区別されて、「図形の計量」にあることがわかる。すなわち、教科書や学習指導要領の変遷から見ても、戦後重視されてきた測量の考え方は、一度関数にねらいを置かれ、その重要性は遠ざかったものの、現在では再び重要視されていることであるといえる。

次に、2の測量の考え方を知ることができる、ということについて述べていく。これは測量の考え方を知ることそのものに価値が置かれているということである。高校教育において、数学科目は昭和26年からずっと必修科目の一つとして採用されている。これは、数学を学ぶことのよさ、その教育的価値が認められていることを裏付けている。

## 6. 三角比の教材と指導について

三角比の授業において測定できそうなものとして、「建物や天井までの高さを求める」や「身の回りにおける傾斜の角度を調べる」といった活動が考えられる。その中で今回は、前者の活動を取り入れ、また、授業をスムーズに行え、身近である教室を使って、その天井までの高さを求めることをテーマとした授業を提案することとした。

これは、単に三角比の数学的な知識を身につけさせるためだけではない。実際に長さや角を求めて、三角比への関心や学習意欲を高めることを目的としている。また、建物の高さを求めることによって、三角比の有用性や一般にも使われる測量の考えを知ってもらうこともねらいとしている。

本論文では、指導場面を教室の高さを求める活動に設定し、身近なものの長さを測量することとした。三角比を利用して高さ求めるには、水平方向から見上げた角（仰角）を測る必要がある。仰角の測定や傾斜の角度を求めるには測定器が必要となる。これは実際に使われている角度測定器でもよいのだが、少ない道具で簡単に角度を測れるカクシリキと呼ばれるものを用意する。厚紙と分度器をコピーしたもの、糸、おもり、ストローを使って作成することができる。

建物の高さなどを求める活動に関しては、カクシリキのストローを使う。例えば、校舎の高さを求めるには、カクシリキにつけたストローの穴から先端 A をのぞき、糸が固定したときに糸を手で押さえ、角度を読めば仰角を測ることができる。理論的にはこのカクシリキを使った測定で間違いなく測れるのだが、実際には結構な誤差がしやすいのである。このことから、実際の測量がいかんして正確であるのかについてもふれることができる。

## 7. 研究の成果と今後の課題

本研究を執筆することによって多くのことを学ぶことができた。実施状況調査の結果から、現行の三角比の指導の現状と課題を明らかにした。そして、測量に関する史的考察を行い、現在三角比をなぜ学ぶのかについて検討した。三角比はもともと生活とのかかわりの中から生まれた数学的概念であり、身近な事象と関連付けて三角比について理解させることが重要であるが、どのようにして測量が生まれたのか、を知ることで数学とのかかわりの様相が明らかになった。

そして、それらから、今日の三角比を学ぶ意義について検討し、即した教材を提案することができた。しかし、それを実践するには至らなかった。そこで、提案した指導を実践することで、指導上の問題点を明らかにし、よりよい指導を目指していくことが今後の課題となる。



参考・引用文献リスト

- 長尾篤志ら(2011)、『高等学校 数学教育の展開』、聖文新社
- 正田建次郎ら(1953)、『中学生の数学 昭和 28 年検定済教科書』、啓林館
- 正田建次郎ら(1965)、『中学新数学 昭和 40 年検定済教科書』、啓林館
- 辻正次ら(1952)、『高等学校 幾何』、好学社
- 野村武衛(1952)、『高等学校数学 幾何Ⅱ』、中教出版
- 正田建次郎ら(1978)、『数学Ⅰ 昭和 53 年検定済教科書』、啓林館
- 山本芳彦(2006)、『数学Ⅰ 平成 14 年検定済教科書』、啓林館
- 川中宣明(2009)、『数学Ⅰ 平成 18 年検定済教科書』、数研出版
- 大矢真一、方野善一郎(1978)、『数字と数学記号の歴史』、裳華房
- 磯脇一男(1981)、「三角比の鈍角の拡張の指導」、日本数学教育学会誌第 63 回  
pp.264・265
- 大内俊二・高遠節夫(2000)、「三角関数の理解度について」、日本数学教育学会誌  
第 82 回総会特集号、pp.370
- 長岡耕一(2003)、「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」、日本  
数学教育学会誌第 85 回、No.9 pp.32-37
- 小松真(2008)、「拡張に焦点を当てた三角比の学習指導に関する考察」、第 41 回  
数学教育論文発表会論文集、pp.369-374
- 熊倉啓之(2007)、「学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究（第 3 次）  
－中学と高校の接続を重視して－」、静岡大学教育学部研究報告 教科教育学  
篇 No.38 pp.35-50 静岡大学教育学部
- 梅沢敏夫(1959)、「教師のための初等数学講座 7 三角法と測量」、岩崎書店
- 吉田明史(2010)、『高等学校 新学習指導要領の展開』、明治図書
- 文部科学省(2009)、『高等学校学習指導要領 数学編 理数編』、実教出版
- 文部科学省・国立教育政策研究所(2007)、『平成 17 年度高等学校教育課程実施  
状況調査科目別報告書（数学Ⅰ）』  
[http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei\\_h17\\_h/h17\\_h/05001031040004000.pdf](http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h17_h/h17_h/05001031040004000.pdf)