

Geometer's Sketchpadを利用した動的幾何教材に関する研究 ～証明指導に焦点を当てて～

<修士論文要旨>

愛知教育大学 大学院 教育学研究科
数学教育専攻 数学科教育学領域
夏目修平

1 動的幾何学ソフトと証明指導の現状と問題点

1.1 動的幾何学ソフト

ここ数年でコンピュータ機器の普及により一般の社会生活が便利に快適に過ごせるようになってきている。日本国内の教育現場において、特に、2002年頃の学習指導要領の改訂によって、授業時間数が削られたことにより、活用する時間が無くなってしまった。しかし、世界中ではこの間にコンピュータ機器を活用した授業が多く行われてきている。アメリカでは、コンピュータ機器を活用した授業が考えられている。その中でも、有名で広く使われているものに動的幾何学ソフト Geometer's Sketchpad (以下GSP)がありアメリカではGSPを活用した授業、カリキュラムが多く作られている。2011年度から小学校で、2012年度から中学校で実施される新しい学習指導要領では授業数が増え、授業を組み立てやすくなる。よって、これからの日本の数学教育において動的幾何学ソフトを使った授業、探究活動を行っていく授業は増えていくものと考えられる。そこで、海外の数学教育では動的幾何学ソフトがどのように扱われていて、どのような有効な点があるのかということを中心に、日本の指導に足りていないもの、日本の指導に活かしていけるもの、日

本には合わないもの等を調べていく。

1.2 証明指導

多くの中学生にとって証明は苦手な、嫌いな学習内容である。教科書の定義によると、「証明とはある事柄が成り立っていることを、筋道を立てて明らかにすること」とある。つまり、証明とはある結論が決まっていて、与えられている仮定、条件を使って結論を導くことが証明ということになる。

証明を学習する生徒たちは、証明がなんであるかということを理解しなくてはならないと同時に、証明のやり方も一度に学ばなくてはならない。

そして証明の仕方として、基本的な証明の型を習い、その型に様々な言葉を当てはめるパズルのような感覚で生徒たちは学習してしまう。証明が得意という生徒には組み立てて並べるだけだからという感覚で証明がなぜ大切なのかということを考えなくなってしまっている。

これらのことより、生徒の中にはなぜわかっていることをわざわざ証明するのか、何のために証明というものがいいのか分からないといった疑問や不満がある。証明の必要性を感じておらず、証明を論理的に考えることができなくなっている。学習指導要領の改訂に伴い授業

時間が増えた。時間を有効に使うことによって証明がなぜ大切なのか、証明を学習する意義について生徒たちに意識させることができる。

2 Geometer's Sketchpad について

2.1 特徴

GSPとはアメリカのkey curriculum press社から有料で発売されている動的幾何学ソフトである。最新版のVersion 5では、従来の機能に加えて、解析幾何学・代数学・微積分の学習にも扱えるようになっていく。GSPは学習対象が小学生や中学生だけではなく、高校生や大学生の探求的活動にも利用されている。そして、一番の大きな特徴として、各内容を学習できる教材集が数多くそろっているということである。他にも、GSPを教師が利用しやすいようにオンラインで使い方を学ぶことのできるカリキュラムが存在する。

2.2 機能

平面幾何の分野において、点・線分・半直線・直線・円の作図、交点・線分の中点・平行線。垂直線・角の二等分線などの作図、長さ・角度・面積・距離・比などの測定など機能はさまざまである。動的幾何ソフトの機能の中で最大の利点は作図された図形の点・線などを捕まえて動かすことができるということである。

2.3 教材集

GSPがあること、利用することを前提とした教材集はたくさんある。この中の証明と関わって書いてあるRethinking Proof with The Geometer's Sketchpadについて詳しく調べていき日本の証明指導に活かしていくことができるものはないかを探っていく。この本は2003

年にKey Curriculum Press社から出版された、Michael D. de Villiersによって書かれた本である。de Villiersによると証明にはいくつかの機能があり、その機能に着目することによって、証明問題をExplanation(説明)・Discovery(発見)・Verification(立証)・Challenge(挑戦)・Systematization(体系化)の5つに分類して考えていくことができる。そしてGSPを使ってそれらの機能を意識した活動を行える教材の事例が提示されている。それぞれの機能について一つずつ見ていくことにする。

3 証明に関する教材 Rethinking

Proof with The Geometer's Sketchpad

3.1 説明の機能(Explanation)

説明の機能とは、証明を利用することによって「なぜその命題が真であるのか」という問に対して説明できる機能のことである。これらの問題は、生徒に対して課題が与えられて、GSPの図形を動かすことによって生徒に推測を行わせ、その推測が本当に言えることなのかを説明していくという形で活動を行っていく。この説明という機能は日本で行われている証明指導の大部分を占めている。しかし多くの場合、初めから結論を与えられていて、どうしたらその結論を言えるのかといった状態になっている。よって、「なぜその命題が真であるのか」を明らかにしたいという生徒自身の問となっていない。GSPを使うことによって、「なぜその命題が真であるのか」という問は教師から与えるのではなく生徒自身の推測に基づく問になる。

3.2 発見の機能(Discovery)

発見の機能とは完成された証明について振り

返り、要素を一つずつ分析していくことによって新たな事項を見つけていくことができる機能である。この機能に分類される問題は初めに説明の活動と同様に生徒に推測をさせて、その推測が本当に言えることなのかを説明していくという形で活動を行っていく。その後の活動が発見の機能である。推測に対する証明が完成した後、その証明について振り返り見ていくことで、別の違った性質・事柄を発見させていく。このような活動は日本の証明指導の中では行われていない。証明されたことを再び振り返ることで、その証明の一文一文が何に由来しているのかを考え、結論の根拠となることをはっきりさせることで、新たな性質が見えてくるのである。GSPを使うことで、初めの推測を生徒自身のものとすることができ、新たに発見したことについても簡単に作図を行い確認することができる。

3.3 立証の機能 (Verification)

立証に機能とは証明を利用することによって真である命題について確認することができる機能である。説明の機能からなぜという問を取り除いたよりシンプルな機能と言える。これらの問題は、証明をする前にどの程度推測に対して自信があるかを確かめさせている。日本においてこの立証という機能として証明は行われている。しかし、なぜという問いがない中で証明をしていくことは、生徒に対して証明をなぜ行わなければならないのかという疑問や不満を抱かせてしまう。GSPを使うことで、もっと簡単にどうやらそうなるらしいという段階で立証を終わらせることもできる。証明を行うことで、それを確かめていくことがこの機能である。

3.4 挑戦の機能 (Challenge)

挑戦の機能とは証明を利用することで過去に見つけられた定理について自分自身で挑み取り組むことができる機能である。

これらの問題は、普通に解こうと思っても生徒にはかなり難問とされる。日本では、この機能を意識して証明指導はされていない。このような問題に対して、GSPを使うことで、生徒自身がその図形に隠されている性質を推測することができる。そして、これらの定理がどんな定理なのかを理解することが容易になり、証明を完成させることは難しくても証明するということの良さや必要性を意識することができる。

3.5 体系化の機能 (Systematization)

体系化の機能とは証明を利用することによって、要素を系列化して定義のより簡潔な示し方や正しい性質を見つけることができ、各性質について関係づけることのできる機能である。

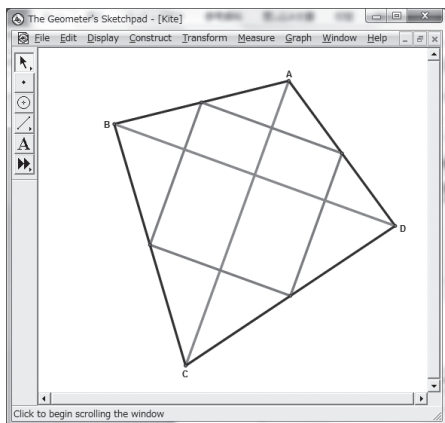
これらの問題は、図形の性質に関して整理してまとめていくことができる。例えば、ひし形とはどんな性質を持つ図形であるのか、どんな性質があればひし形とっていいのか、という双方向に言える性質はなんなのかを作図・変形・観察していくことで、各図形を正確に理解していくことができる。また、どの性質があることで、どんな三角形、四角形になるのかということが体系的にいうことができるようになる。日本では、このような証明を通し振り返り体系化するということは行われていない。GSPを使うことで、どの性質がどんな条件を作り出して、図形を確定していくという点を見ていくことにおいて非常に有効に働いている。

3.6 各機能のまとめ

まとめると、説明の機能と立証の機能は扱われているが、他の3つの機能に関しては、扱われてはいない。この中でも、発見や体系化の機能に関してはもっと意識して扱っていくことで生徒たちに証明の持っている良さ、証明を学ぶ必要性について理解できる。

3.7 発見 (Discovery) の機能を意識した「凧型四角形」の教材について

凧型の四角形について日本では扱われてはいないが、四角形を性質ごとにまとめていくうえで、利用していく価値のある図形であるといえる。



凧型の四角形の各辺の中点を結んでできる四角形について、何が言えるのかということを推測させていく。その後、対角線ひき、対角線の長さを表示させ、内側にできている四角形とその対角線の長さについて観察・推測させていく。以下のような推測がたてることができる。

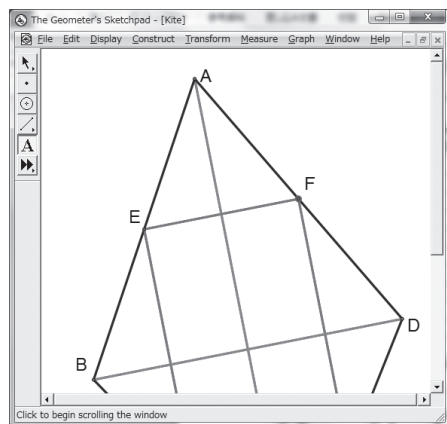
- ・ 凧型四角形の中点四角形は長方形である。
- ・ 凧型四角形の対角線の長さが等しいとき、中点四角形は正方形になる。

立てられた2つの推測について本当に言えるのかを説明していく。対角線で四角形を2つの

三角形に分け、見ていくABの中点をE、ADの中点をFとすると線分EFと線分BDの間には中点連結定理が成り立ち、 $EF \parallel BD$ かつ $2EF = BD$ が言える。

そのことを反対側の三角形についても述べ、もう一本の対角線についても同じように述べることで中点を結んだ四角形は平行四辺形であることが言える。

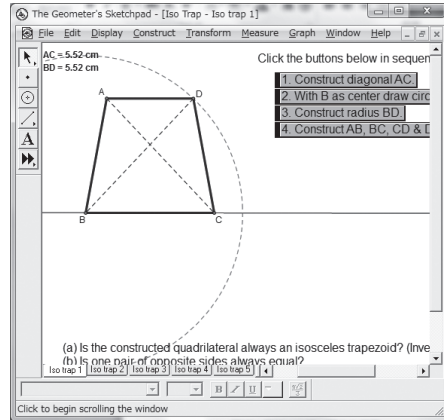
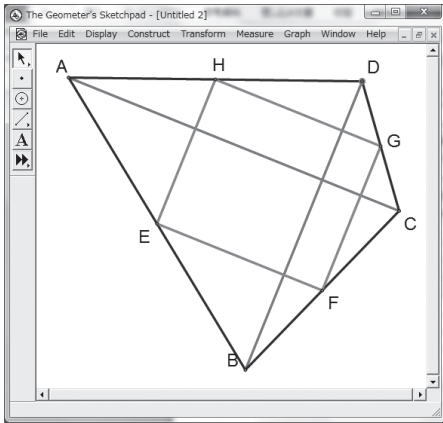
次に対角線が垂直に交わることで、対角線に平行な内接四角形の各辺も垂直に交わる可以说。これらの2つのことから、凧型の四角形の中点四角形は長方形となることが説明できる。また、長方形の4辺の長さがすべて等しいときに、つまり凧型の四角形の対角線の長さが等しいときに、中点四角形が正方形になることが説明できる。



ここからが発見の活動である。説明の活動を振り返ってみる。その中で、中点四角形が平行四辺形であることを示すのに、外側の四角形が凧型の四角形という性質を使っていないことが分かる。また、対角線が垂直に交わるという性質が長方形を決定している要素であるということも発見できる。

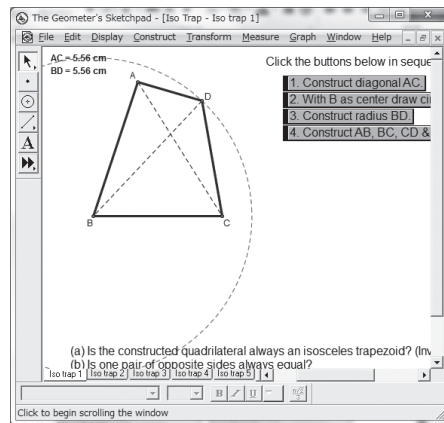
よって、右の図のように外側の四角形が凧型の四角形でなくても対角線が垂直に交わる四角

形であれば、中点四角形は長方形となることが分かってくる。このように一度証明されたことを、振り返り結論を述べるために、どんなことが使われているのか、どんなことが使わなくてもいいのかということを見ていき、そこから新たなことが分かるということも証明の機能なのである。



次にファイルを開き等脚台形を作図していく。順番にボタンを押すと等脚台形ができあがる。作図の手順は①対角線ACを決める。②ACと同じ長さの半径の円を中心Bから引く。③円周上にDをとる。④ABCDを結ぶ。である。

このような作図を行えるファイルが5つ用意されていて、この作図の出来上がった図形について一つずつ、等脚台形であるのか、そのとき他にどんな性質があるのかの判定を行う。図形を動かしてみるとこの図形は等脚台形でないことが分かる。



この活動を繰り返すことによって等脚台形を定義するのに適当な文が分かってくる。この3つがこの内容でわかってきた等脚台形を表す文

3.8 体系化 (Systematization) 機能を意識した「等脚台形の体系化」の教材について

等脚台形とはどんな図形なのかが分からない相手に対して、言葉だけで説明できるようになることがこの活動の導入である。下のa～dが等脚台形を表しているかを考えていく。

- a 対角線の等しい四角形である。
- b 向かい合う辺を通る線対称の軸をもち、一組の隣接する角が等しい四角形である。
- c 等脚台形は平行な辺をもち、向かい合う辺の長さが等しい四角形である。
- d 等脚台形は一組の向かい合う辺が平行であり、円に内接する四角形である。

bとdの説明が等脚台形を示している。また十分ではない他の二つについて何が加わることで等脚台形であるといえるかを考えていく。

である。

A 等脚台形は一組の平行な辺をもち、対角線の長さが等しい四角形である。

B 等脚台形は向かい合う辺を横断する一本の軸によって線対称な四角形である。

C 等脚台形は一組の平行な辺をもつ、円に内接する四角形である。

ここから証明を使ってこの3つの文から始めてその他の性質を導き出していく。

このようにして等脚台形の定義をしていく。

4 考察と今後の課題

4.1 証明の機能の分類に関する考察

証明は5つの機能で分類することができた。しかし日本ではほとんどが説明の機能だけである。証明したことを振り返って他に何か言えないか、新たな発見はできないかということを見ていく発見の機能や体系化の機能は新たな知見が生み出されるのである。こういった活動を行うと証明の理解が深まり、証明の有益性が認識できる。

GSPを使った教材を通して証明の機能について見てきた。説明の機能は生徒に問を生ませられるようになる。発見の機能では、推測が立てられるようになる。立証では、図形を動かし簡単に確かめることができる。挑戦では、証明することが難しい問題でも、どんな定理なのかを理解しやすくなる。体系化する前に予想を立ててそれぞれの命題の関係をとらえやすくなる。

4.2 Geometer's Sketchpad を活用することに関する考察

日本の証明指導ではほとんどの場合に説明の機能として教師から与えられた課題や教科

書に示された問題をただ解くという活動にとどまっている。GSPが活用されることによってこれらの課題、問題は学習者である生徒自身の解決したい問になる。自らこうなるのではないか、このことが言えるといった推測を立てることで、証明して明らかにしたいという意欲が生まれ、証明の必要性について認識できる。GSPを使うことで生徒の関心に大きな変化が与えられることが期待できる。さらに、図形を動かしながら観察することで、図形の変化を視覚的にとらえることが容易になり、理解が高まることに大きく役に立てられる。

4.3 今後の課題

証明の指導は説明の機能ばかりに意識が向いているので日本の中学生は証明に対して、する意味が分からない、難しいとなっている。よって、発見や体系化の機能を意識した1つの証明から様々なことが分かる教材の開発をして行きたいと考える。また、GSPを利用することで問題を与えられるものから見つけるものへと変えることができた。この特性、利点を生かして動的幾何学ソフトを活用する授業を作りたいと考える。

5 主な参考文献

Michael D de Villiers (2003) Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad

Michael D de Villiers (1999) the Role and Function of Proof with The Geometer's Sketchpad