

GeoGebraを用いた数学的探究とその教材化に関する研究 －表計算機能を中心に－

<修士論文要旨>

数学教育専攻 数学科教育学領域

木 下 潤 一

論文構成

序章 本研究の目的と方法	第3章 動的幾何環境と表計算機能を連動させた数学的探究事例
第1章 近年におけるコンピュータの教育的利用に関する考察	3.1 GeoGebraにおける表計算機能の有用性
1.1 テクノロジーを用いた教育に関する考察	3.2 GeoGebraの表計算機能の可能性と注意点
1.2 テクノロジーを用いる際の利用形態に関する考察	第4章 GeoGebraの特性を活かした教材について
1.3 既存のソフトウェアでの実践事例と課題	4.1 GeoGebraの特性を活かした教材に関する考察
第2章 GeoGebraの諸機能と可能な探究について	4.2 GeoGebraの特性を活かした教材開発
2.1 GeoGebraに関する先行研究	4.3 GeoGebraの特性を活かした教材に関するまとめ
2.2 先行研究から見るGeoGebraの特徴を活かした事例	終章 本研究のまとめと今後の課題

序章 本研究の目的および方法

0.1 研究の目的

近年、コンピュータをはじめとする、テクノロジーを数学教育に取り入れようとする試みは欧米を中心に世界中で行われている。日本でもソフトウェアの特徴を活かした実践が多く行われてきているが、中にはいくつかのソフトウェアを組み合わせるなどソフトウェア間の連携が必要となる実践もあり、非常に不便であった。そこでGeoGebraを用いて、機能を連動させることで、他のソフトウェアでは探究が困難であった事例を示し、機能を連動させることで可能となる探究について述べる。

0.2 研究の方法

先行研究をもとに、テクノロジーの利用環境や既存のソフトウェアを用いた探究について考察し、既存のソフトウェアでは探究困難であった事例について述べる。

そこで、それらの探究困難であった事例を解決するためのソフトウェアとして、大西(2011)や舟川(2010)を参考に、GeoGebraについて考察する。GeoGebraの様々な機能を連動させることで、可能になる探究について述べ、機能を連動させることで探究の幅が広がることを示す。

1. 近年におけるコンピュータの教育的利用に関する考察

1.1 テクノロジーを用いた教育に関する考察

テクノロジーを数学教育に取り入れようとする試みは、欧米を中心に広まりつつある。対して、日本においては思うように活用が進んでこなかったのも事実である。

しかし、近年テクノロジーを教育に用いようと議論や、政策等が活発に行われてきている。

1.2 テクノロジーを用いる際の利用形態に関する考察

飯島は、テクノロジーの利用形態について、(1)普通教室でのパソコン+プロジェクタ、(2)コンピュータ室などでの個別利用、(3)グラフ電卓・PDA・携帯・ネットワーク端末、(4)インターネット接続されたコンピュータ・個人用端末であるとしている。

1.3 既存のソフトウェアでの実践事例と課題

日本の数学教育において活用されてきたソフトウェアは主に6つに分類することができる。
[1] 電卓・グラフ電卓 [2] 作図ツール [3] 関数グラフツール [4] 数式処理ソフト [5] 表計算ソフト [6] プログラミング言語

しかし、ソフトウェアの限界を少し超えた部分の実践をする場合、探究が困難になることが多い。

2. GeoGebra の諸機能と可能な探究について

2.1 GeoGebra に関する先行研究

GeoGebra は 2002 年に開発され、ヨーロッパを中心として、活発な議論がなされている。GeoGebra は動的幾何ソフトウェアという本来の機能に加え、関数グラフツール、表計算機能、数式処理機能を実装している。

2.2 先行研究から見る GeoGebra の特徴を活かした事例

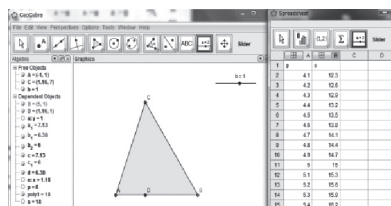
舟川 (2011) は、GeoGebra の積分機能と動的幾何ソフトウェアとしての機能を連動させて、図形が動的に動く際の、重なった部分の面積測定について述べている。

大西 (2011) は、GeoGebra の表計算機能を用いて、統計領域に GeoGebra を用いることについて述べている。

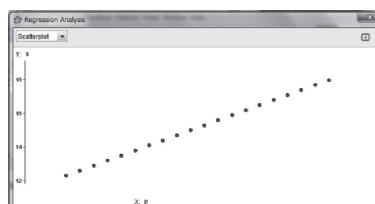
3. 動的幾何環境と表計算機能を連動させた数学的探究について

先行研究において、表計算機能と動的幾何環境を連動させた事例はほとんど見られない。そこで、GeoGebra の表計算機能について着目をし、他のソフトウェアとの比較をしながら、GeoGebra の表計算機能の有用性について述べる。

GeoGebra における表計算機能は、動的幾何環境の下で作図した際に、伴って変わる様々な数値を、表計算ビューにプロットすることが可能である。例えば三角形 ABC において、面積や辺の長さの値を、表計算ビューに記録することで、下図のように底辺の長さに対応する三角形の面積を記録することが可能である。



また、2変数を選択し、散布図として表示することも可能である。



このように用いることで、対応関係や変わり方の決まりなどを観察することが可能である。

4. GeoGebra の特性を活かした教材について

4.1 GeoGebra の特性を活かした教材に関する考察

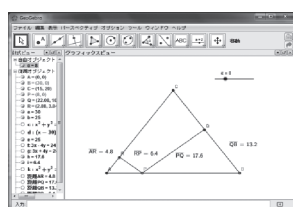
GeoGebra の特徴である動的幾何環境とその他の機能を組み合わせた事例を示す。その際、GeoGebra を用いることで可能となる活動に焦点を当てながら、それぞれの事例に対して、(1)教材の概要 (2)教材作成手順について (3)想定される発問 (4)探究の概要 (5)GeoGebra を用いることの良さについての、5項目から述べる。

4.2 GeoGebra の特性を活かした教材開発

4.2.1 二等辺三角形の内部にできる長さに関する事例

(1) 教材の概要

二等辺三角形の底辺上の点から垂線をひき、それらの線分の長さの和に関する問題である。



この図はスライダーを用いて、点Pを動かしてそれぞれの辺の長さの変化の様子を観察することができ、GCと同様の活動を行うことができる。

(2) 教材作成手順について

底辺の長さが30、残りの2辺の長さが25の二等辺三角形ABCと、スライダー a を作成する。スライダー a によって点Bを中心と

する円を作成し、その円とBCの交点を点Pとして、移動する点Pを作成する。点Pより辺AB、ACに向けてそれぞれ垂線を引き、交点をそれぞれQ、Rとする。

(3) 想定される発問

点Pが辺AB上を動くとき、AR、RP、PQ、QBの長さはどのような関係になるでしょうか。

(4) 探究の概要

辺の長さの対応関係に気づき、そのことを自ら証明する。点が動くにつれて辺の長さに変化するということを実感し、対応関係がどのようなものになっているかを考えさせる。そして、その性質が本当に正しいものかを証明する。テクノロジーを用いて考察したものを、証明したものとして扱うのではなく、あくまできっかけを与え、考察の手助けになるものとして扱う。

(5) GeoGebra を用いることの利点

GeoGebra の場合、表計算に値を記録することができ、多くの値の変化の組み合わせを確認することが容易であると言える。また、わからない場合には、BR、RP、PQ、QCの4つの線分の長さを表示して値を記録することで、GCなどで探究する場合に比べると、より多くの組み合わせで辺の長さの和が一定であることを確認することができる。

4.2.2 任意の三角形の内部にできる長さに関する問題

(1) 教材の概要

任意の三角形(BC = 30)の底辺BC上に点Pをとり、点PからAB、ACに平行な直線をひき、線分の長さの和を考察する教材である。

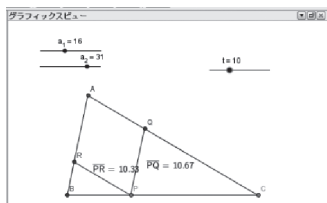
(2) 教材作成手順について

長さ30の底辺BC、任意の点Aを作図する。

3点A, B, Cを頂点とする三角形ABCを作図し、スライダー a をもちいて点Pを作成する。点PからAB, BCに向かって垂線を引き、交点をそれぞれR, Qとする。

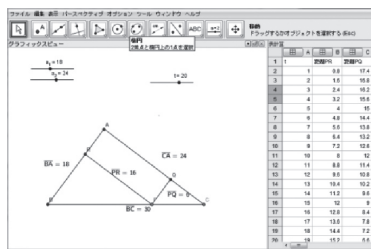
(3) 想定される発問

図のように三角形ABCの辺BC上に点Pがあります。点Pから辺AB, ACに向かって垂線を引き、交点をR, Qとする。点Pが辺AB上を動くとき, AR, RP, PQ, QBの長さはどのような関係になるでしょうか。また, RP, PQの長さはどのような関係になるのでしょうか。



(4) 探究の概要

AR, RP, PQ, QBの長さの和は一定になるため, 比較的気づきやすい。しかし, RP, PQの長さの和が一定ではなく, 一定の割合で増加もしくは減少していくことは, 気づきにくい。



表計算機能を用いて値をプロットすると, 一定の割合で増加していることがわかる。点Pの位置関係によって, 左右の比率が変わることで, $RP + PQ$ の長さの和が増加, もしくは減少していくことがわかる。

(5) GeoGebraを用いることの利点

長さの表示しなかった場合, 一定でないことはすぐに発見できても, 一定の割合で和が増加することは見つけにくい。

GeoGebraの表計算機能をうまく使うことで, RPとPQの長さの和が一定であることを気付きやすくなる。『和が一定であることを探すこと』に時間をかけることなく, 『なぜ一定の割合で増えていくのだろうか』という考察に時間をかけることが可能となる。

4.2.3 四角形の边上の2点が動くことによってできる三角形の面積について

(1) 教材の概要

この教材は中学校第3学年に学習する2次関数の発展事項としての教材である。

四角形上を移動する点P, Qによってできる三角形APQの面積はどのように変化するか表やグラフを用いて考察する教材である。

(2) 教材作成手順について

$AD = BC = 3$, $AB = DC = 5$ となるよう, 四角形ABCDを作成する。続いてスライダー a によって, 変化する点Pと点Qを作成し, 三角形APQを作成する。

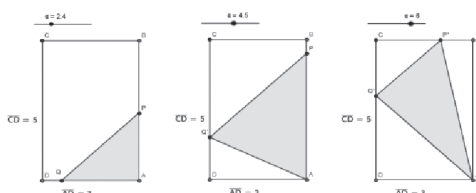
(3) 発問について

1辺が5cm, 3cmの四角形ABCDがあります。点Pは毎秒1cmの速さで点Bを通り点Cに向かって進みます。点Qは毎秒1cmの速さで点Dを通り点Cに向かって進みます。このとき, $\triangle APQ$ の面積はどのように変化するか表やグラフを用いて考察しましょう。

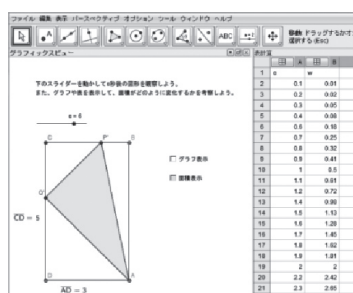
(4) 探究の概要

まずはスライダー a を動かし, 点Pと点Qを移動させ, 点の動き方や三角形の形の変化を観察する。この問題の場合, a の値がそれぞれ $0 \leq a \leq 3$, $3 \leq a \leq 5$, $5 \leq a \leq 8$ の

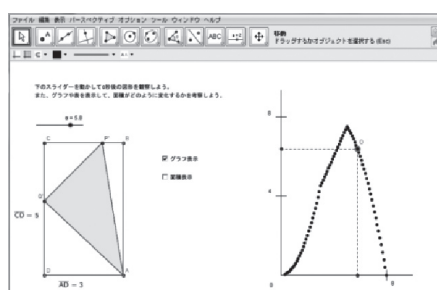
範囲をとるとき、三角形の形が大きく変わることがわかる。



この考察をもとに、予想を立て、表計算やグラフを用いて予想が正しいかどうかを考察する。



表計算ビューに時間と面積を記録すると、上図のようになる。また、グラフを作成すると、下図のようになる。



点 P 点 Q がどの位置にあるかによって、増減の値の変化の様子を観察することができる。視覚的にみることによって、グラフの形が一定でないことに改めて気づくことができる。また $a > 5$ の範囲でのグラフの考察は GeoGebra によって始めて可能になる。

(5) GeoGebra を用いることの利点

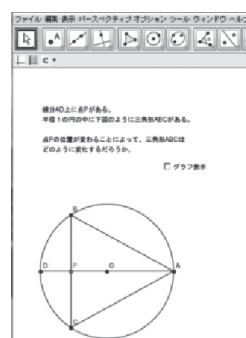
この教材は、4.2.1 や 4.2.2 の教材と違い、

他の動的幾何ソフトウェアでの教材化は困難である。また、グラフ表示や表計算に記録といった機能を連動させたような探究方法は他の動的幾何ソフトウェアにはない特徴である。表計算機能があることで、子どもの思考を妨げることなく、面積の推移や、グラフに関する考察の時間を多くとることができる。

4.2.4 円の内部にできる三角形の面積に関する問題

(1) 教材の概要

半径 1 の円の中に図のように三角形を作成する。点 P は点 A と中心 O を通る直径上において、点 P が線分上を移動すると内接する三角形が変化する。



(2) 教材の作成方法

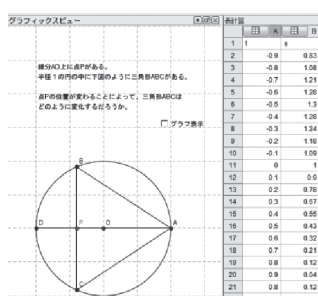
まず、円 O を作成する。中心を O とし、円上に点 A を作成する。点 O、点 A を通る直線と円 O が交わる点において、点 A と一致しない点を点 D とする。線分 AD 上に点 P を作成し、点 P から垂線を引く。垂線と円の交点をそれぞれ B、C とし、ABC を三角形とする。

(3) 発問について

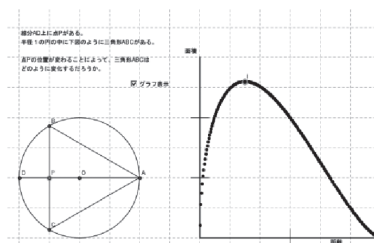
三角形 ABC の面積は、点 P の位置によってどのように変化するだろうか。また、最大になるところはどこでしょうか。実際に点 P を動かしてみても考察しましょう。

(4) 探究の概要

まず、三角形の面積がどのように推移し、どのように面積が変化するのかについていくかを考察する。



この問題の場合、点Pの位置によって、三角形の面積が図のように変化する。点PがDからAに向かって動くときの面積を表計算ビューにプロットした場合、正三角形になるときに、面積が最大になることを確認することができる。



このグラフを見ると、点Pの位置が $t = -0.5$ 付近で面積が最大になり、またグラフの形も一次関数や二次関数のようにならないことも確認できる。

(5) GeoGebra を用いることの利点

このように動的に図形を動かしながら、それらを用いて表計算に記録し、グラフを作成することは困難であった。この問題のように予想を超える表やグラフを提示することができるのは、扱い方によっては大きな効果を期待することができる。

4.3 GeoGebra の特徴を活かした教材に関するまとめ

3つの利点があると考ええる。

1つ目は、表計算機能と動的幾何環境を連動させた事例は、他のソフトウェアではでき

ない探究をすることができ、とても有効であると言える。

2つ目は、表計算機能があることで、履歴として値を記録し、その記録した多くの値の組み合わせから考察することが可能となる。それによって、今までにはできなかった探究や、より考察に時間を割いた活動ができると考える。

3つ目は、動的幾何環境と表計算機能、関数グラフツール、数式処理機能を連動させて用いることで選択肢が増え、今までのソフトウェアにはない教材を作成することが可能である。

終章 本研究のまとめと今後の課題

本研究では、先行研究を踏まえ、表計算機能を中心としてGeoGebraの機能を連動させた事例を提案した。その中には、表計算機能を用いることで探究の幅が広がり、また動的幾何環境・表計算機能・関数グラフツール・数式処理機能を連動させることで可能となる探究について主に述べた。今後は多くのサンプルを作成し、実際の授業計画に沿って、議論・改善を行うことが必要であると考ええる。また、表計算機能だけでなく数式処理機能との連動も考察していかなければならない。

《主な参考・引用文献》

大西俊弘 (2011) 「数学学習・数学教育用ソフトGeoGebraについて」, 日本数学教育学会 第44回数学教育論文発表会論文集, pp.561-566

舟川快 (2011). GeoGebra を利用した数学的探究とその教材化に関する研究. 愛知教育大学大学院. 修士論文.

GeoGebra

(<http://www.geogebra.org/cms/>)